Corrigé de l'examen partiel du 30 Novembre 2018

21 décembre 2018

Exercice 1. ***(I)Soient F et G sous-ensembles d'un ensemble E. Démontrer les proprétés suivantes du complémentaire :***
(i) $C_E(F \cup G) = (C_E F) \cap (C_E G)$***. (1 point)***
(ii) $C_E(F \cap G) = (C_E F) \cup (C_E G)$***. (1 point)***

Montrons cela par définition des ensembles.

$$C_E(F \cup G) = \{x \in E/\ x \notin (F \cup G)\} = \{x \in E/\neg(x \in F \text{ ou } x \in G)\} = ...$$

$$... = \{x \in E/x \notin F \text{ et } x \notin G\} = \{(x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin G)\} = ...$$

$$... = \{x \in E/x \notin F\} \cap \{x \in E/x \notin G\} = C_E(F) \cap C_E(G)$$

Pareil pour l'autre égalité.

$$C_E(F \cap G) = \{x \in E/\ x \notin (F \cap G)\} = \{x \in E/\neg(x \in F \text{ et } x \in G)\} = ...$$

$$... = \{x \in E/x \notin F \text{ ou } x \notin G\} = \{(x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin G)\} = ...$$

$$... = \{x \in E/x \notin F\} \cup \{x \in E/x \notin G\} = C_E(F) \cup C_E(G)$$

On utilise pour cela les lois de Morgan pour les connecteurs logiques, qui nous disent que

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q.$$

Par contre, si on ne se sent pas très à l'aise avec les connecteurs logiques, on peut aussi le raisonner e tèrmes d'ensembles.Pour qu'un élément ne soit pas dans un ensemble qui contient tout F et tout G, il faudra qu'il ne soit ni dans F ni dans G. De la même manière, pour qu'un élément ne soit pas dans un ensemble qui contient uniquement les éléments qui sont en même temps dans F et dans G, il suffit qu'il ne soit pas dans l'un des deux.

Il est aussi possible de montrer ce résultat par double inclusion.

Soit $x \in C_E(F \cup G)$. Alors $x \in E$ et $x \notin (F \cup G)$. Cela veut dire que $x \in E$ et ($x \notin F$ et $x \notin G$) (avec les mêmes arguments qu'avant). Le fait que $x \in E$ et $x \notin F$ implique que $x \in C_E F$. Également, le fait que $x \in E$ et $x \notin G$ implique que $x \in C_E G$. Donc on a que $x \in C_E F \cap C_E G$.
On a $C_E(F \cup G) \subset (C_E F) \cap (C_E G)$.

Soit $x \in (C_E F) \cap (C_E G)$. Alors $x \in E$ et $x \notin F$, et aussi $x \in E$ et $x \notin G$. On a $x \in E$ dans les deux cas, donc on peut les regrouper, et dire que $x \in E$ et aussi $x \notin F$ et $x \notin G$. Cette dernière partie est équivalente à $x \notin F \cup G$ (par les arguments d'avant), donc on a $x \in E$ et $x \notin F \cup G$. Donc par définition $x \in C_E(F \cup G)$.
On a $(C_E F) \cap (C_E G) \subset C_E(F \cup G)$.

On a alors $C_E(F \cup G) = (C_E F) \cap (C_E G)$.

La démostration de (ii) par double inclusion suit la même structure.

Note : En général, cette exercice a eu des bons résultats. Bon travail. Les deux erreurs les plus habituels sont les suivants.

1) Oublier qu'il faut que $x \in E$. Il est vrai qu'en pratique on ne fait pas trop attention à cette condition, puisqu'elle ne change pas (et que dans pas mal de cas on travaille dans le même E fixé tout le temps, donc il n'est pas intéressant), mais il s'agit quand même d'une propriété essentielle. Si vous pensez à ce qu'on a fait au tout début du cours, si on prend uniquement l'ensemble des $x \notin F$, on serait obligés à démontrer qu'il existe à chaque fois. Ici, l'axiome de séparation nous assure son existence.

2) Considérer que $x \notin (F \cup G)$ est équivalent à $x \notin F$ ou $x \notin G$. Elle est une erreur habituelle, si on applique les définitions d'union et intérsection sans y penser. Mon conseil, si vous avez des doutes, serait de penser dans les tèrmes qu'on a utilisé quelques paragraphes auparavant. Comment on peut s'assurer qu'un élément ne soit pas dans l'ensemble qui contient tous les éléments de F et tous les éléments de G ? En disant qu'il n'est dans aucun des deux. Pareil pour l'intersection. Même si on vous demande d'utiliser des symboles mathématiques pour faire vos démostrations, faites confiance à votre intuition sur le sens des mots que vous utilisez. Dans beaucoup de cas elle aide.

(II)Soient E, F, G des ensembles quelconques. Démontrer l'égalité suivante d'ensembles : (2 points, un par inclusion)

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G).$$

Procédons par double inclusion.

Soit $x \in E \cap (F \cup G)$. Alors on a que $x \in E$ et que $x \in F \cup G$. On a que x est forcément dans E, et que soit $x \in F$, soit $x \in G$ (soit les deux). On a deux possibilités :

— $x \in F$. Alors $x \in E$ et $x \in F$. Par définition, cela veut dire que $x \in E \cap F$.

— $x \in G$. Alors $x \in E$ et $x \in G$. Par définition, cela veut dire que $x \in E \cap G$.

On a alors que $x \in E \cap F$ ou $x \in E \cap G$. Par définition d'union, on a que $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
On a $E \cap (F \cup G) \subset (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

Soit $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$. On a alors que $x \in E \cap F$ ou $x \in E \cap G$. Cela veut dire que on a soit $x \in E$ et $x \in F$, soit $x \in E$ et $x \in G$ (ou les deux). Dans tous les cas, $x \in E$. On peut alors les regrouper, et on aura $x \in E$ et soit $x \in F$, soit $x \in G$. Par définition, cela vuet dire que $x \in E \cap (F \cup G)$.
On a $(E \cap F) \cup (E \cap G) \subset E \cap (F \cup G)$.

Par double inclusion, on a $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

Note : il n'y a pas eu beaucoup de problèmes dans cet exercice, au moins pas suffisament importants pour les marquer ici. La seule chose que je peux dire est que, même si je sais que normalement si on utilise deux fois la même lettre dans deux parties du même exercice cela veut dire qu'il s'agit du même objet, ce n'est pas toujours le cas. Ici on n'avait pas $F, G \subset E$ (c'était marqué "des ensembles quelconques"). Faites attention à l'enoncé !

(III) Soient A, B des ensembles non vides. Démontrer la propriété suivante du produit cartésien : (2 points ; 1.5 pour la première implication + 0.5 pour la deuxième)

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B.$$

On ŕesout par double implication.

Supposons que $A \times B = B \times A$. On a alors que $\forall (x,y) \in A \times B$, $(x,y) \in B \times A$. On veut montrer que $A = B$. Par l'axiome d'extensionalité, cela revient à montrer que pour tout $x \in A$, $x \in B$, et pour tout $y \in B$, $y \in A$.
Soient $x \in A$, $y \in B$. Alors, par définition de $A \times B = \{(a,b)/\ a \in A,\ b \in B\}$, on sait que $(x,y) \in A \times B$. Comme on a supposé que $A \times B = B \times A$, on a que $(x,y) \in B \times A = \{(b',a')/\ b' \in B, a' \in A\}$. Par définition, cela veut dire que $x \in B$ et $y \in A$.
On a donc montré que si $x \in A$, alors $x \in B$. Cela nous donne $A \subset B$. On a aussi que si $y \in B$, alors $y \in A$. Cela nous donne $B \subset A$, et par double inclusion on a l'égalité $A = B$.

Pour l'autre implication, on suppose que $A = B$. Alors, on a que $A \times B = A \times A$ (car $B = A$), et $B \times A = A \times A$ (pour la même raison). Donc

$$A \times B = A \times A = B \times A.$$

On a l'équivalence.

Note : Ici j'ai remarqué une erreur assez commune. En effet, pas mal d'entre vous m'ont dit que $\{(a,b)/\ a \in A,\ b \in B\} = \{(b,a)/\ a \in A,\ b \in B\}$, alors $(a,b) = (b,a)$, donc $a = b$ et $A = B$. Mais celui-ci n'est pas un raisonnaiment valable. Quand on écrit "$(a,b)/\ a \in A,\ b \in B$" à l'intérieur des accolades d'un ensemble, les lettres utilisées sont uniquement des marqueurs : elles servent à avoir une description des éléments qui a dans l'ensemble. Il est parfaitement valable d'utiliser deux fois les mêmes lettres dans deux ensembles différents, mais je vous le déconseille pour cette raison : il est plus facile de se tromper et de penser qu'il s'agit des mêmes éléments. Aussi, il faut se rapeller que l'égalité d'ensembles implique la double inclusion, mais pas plus. Vous savez que si (x,y) est dans $A \times B$, il existe un élément dans $B \times A$ qui est égal à (x,y), mais vous ne pouvez pas choisir lequel.

Aussi, un commentaire : si on pousse le raisonnement que vous m'avez donné à ses dernières conséquences, on trouve que $A \times B = B \times A$ si et seulement A et B sont des singletons. En effet, si on a que pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$, $a = b$, fixons un $b \in B$. Alors tout $a \in A$ est égal à b, et A est un singleton, $A = \{b\}$. L'espace $\mathbb{R}^2$ ne va pas apprécier ! ;)

***Exercice 2. (I) Considérons l'application** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.*
(i)Calculer l'image** $f(I)$ **de l'intervalle** $I =]-2,1]$. **Calculer également l'image** $f(J)$ **de l'intervalle** $J = [-5,-3]$. **(2 points, un par calcul)

La définition de l'image d'un ensemble I par f est $f(I) = \{y/\ \exists x \in I \text{ tq } y = f(x)\}$. Donc dans notre cas, on veut l'ensemble suivant :

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}/\ \exists x \in]-2,1],\ y = x^2\} = \{x^2 \in \mathbb{R}/\ x \in]-2,1]\} = \{x^2 \in \mathbb{R}/\ -2 < x \leq 1\}$$

Maintentant, on sait que $f(x) = x^2$ est une parabole centrée en 0. La fonction a la même image dans x et $-x$. On peut alors diviser l'intervale en deux morceaux :

$$f(]-2,1]) = f(]-2,0] \cup [0,1]) = f(]-2,0]) \cup f([0,1]) = [0,4[\cup [0,1] = [0,4[.$$

De même pour $J = [-5,3]$. Alors, on a

$$f([-5,-3]) = \{x^2 \in \mathbb{R}/\ -5 < x \leq -3\} = [9,25].$$

Note : puisque les arguments nécessaires pour justifier cette réponse proprement (la monotonie de la fontion, la simétrie, etc.) sont plutôt des notions d'Analyse que de Théorie des Ensembles, j'ai mis les points aux réponses correctes même s'il n'y avait pas de justification.

Par contre, faites attention : $[a, b]$ *est une notation pour l'intervalle, qui veut dire* $[a, b] = \{x/\ a \leq x \leq b\}$. *Elle est déjà un ensemble, donc on n'a pas besoin de mettre des accolades par dessus. De même, l'intervalle* $]4, 0]$ *est vide, puisqu'il n'existe pas d'éléments qui soient en même temps plus grands que* 4 *et plus petits que* 0.

(ii)Calculer l'image réciproque $f^{-1}(A)$ ***de l'intervalle*** $A = [9, 16]$***. Calculer également l'image réciproque*** $f^{-1}(B)$ ***de l'intervalle*** $B = [-16, 4]$***. (2 points, un par calcul)***

La définition de l'image réciproque d'un ensemble A par f est $f^{-1}(A) = \{x/\ f(x) \in A\}$. Donc cela veut dire que dans notre cas, on veut l'ensemble suivant :

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}/\ f(x) \in [9, 16]\} = \{x \in \mathbb{R}/\ 9 \leq f(x) \leq 16\} = \{x \in \mathbb{R}/\ 9 \leq x^2 \leq 16\}.$$

Alors, on sait que chaque réel positif x a deux antécedents, $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$. Alors, on a que

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}/\ \sqrt{9} \leq x \leq \sqrt{16} \text{ ou } -\sqrt{16} \leq x \leq -\sqrt{9}\} = \{x \in \mathbb{R}/\ 3 \leq x \leq 4 \text{ ou } -4 \leq x \leq -3\} = ...$$

$$... = \{x \in \mathbb{R}/\ 3 \leq x \leq 4\} \cup \{x \in \mathbb{R}/\ -4 \leq x \leq -3\} = [3, 4] \cup [-4, -3].$$

De même pour $B = [-16, 4]$. La spécificité de ce cas est, par contre, que si tout réel positif a deux antécedents, tout réel négatif en a aucun. Donc cela veut dire que $f^{-1}([-16, 0[) = \emptyset$ (si $x \in [-16, 0[$, il n'existe aucun $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$). On a alors que

$$f^{-1}(B) = f^{-1}([-16, 0[\cup[0, 4]) = f^{-1}([-16, 0[) \cup f^{-1}([0, 4]) = ...$$

$$... = \emptyset \cup f^{-1}([0, 4]) = f^{-1}([0, 4]) = \{x \in \mathbb{R}/\ \sqrt{0} \leq x \leq \sqrt{4} \text{ ou } -\sqrt{4} \leq x \leq -\sqrt{0}\} = [0, 2] \cup [-2, 0] = [-2, 2].$$

Note : La façon de corriger ici est la même que dans (i). Par contre, il y a eu une erreur très très habituelle, et assez importante : considérer l'image inverse comme l'image par f^{-1}. *Malheureusement, dans ce cas la fonction inverse* f^{-1} *n'existe pas. En effet, la définition de une fonction implique que pour tout élément de l'ensemble de départ, on aie un* ***et un seul*** *élément dans l'ensemble d'arrivée. Dans le cas de* $f(x) = x^2$, *si on voulait une fonction réciproque, on se retrouverait avec deux images pour chaque élément :* $\sqrt{x}$ *et* $-\sqrt{x}$. *Comment on choisit lequel des deux on prend ? Au hasard ?*

Ça fait la beauté de l'image réciproque : il s'agit tout simplement d'un ensemble, qui contient tous les antécedents possibles des éléments de l'ensemble. Et comme il s'agit d'un ensemble, et pas d'une fonction, il n'a pas des contraintes d'unicité. De même, je vous conseille, si vous n'êtes pas sûr de l'existence de la fonction inverse, d'éviter d'écrire f^{-1} *d'un élément : dans la partie (II) j'ai eu plusieures instances de "*$x = f^{-1}(y)$, *càd* $f(x) = y$*". Les deux propositions veulent dire exactement la même chose, mais la deuxième est définie, tant que la première ne l'est pas.*

(II) Soient E, F ***des ensembles et soit*** $f : E \to F$ ***une application. Démontrer que, pour tous sous-ensembles*** $A, B \subset F$***, on a l'égalité suivante d'ensembles :***

$$f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$$

où f^{-1} désigne l'image réciproque d'une partie de F. (3 points)

On a deux manières principales de résoudre cet exercice : par egalité d'ensembles, ou par double inclusion. En dépendant de la manière, on pouvait se retrouver avec une petite subtilité supplémentaire. En effet, l'enoncé de cet exercice ne nous assure pas, comme dans l'exercice 1(III), que les ensembles à traiter soient non vides. En conséquence, si on veut le faire par double inclusion, il faut séparer le cas où $(A\backslash B)\cap Imf = \emptyset$, c'est à dire le cas où $A\backslash B$ ne contient aucun point de l'image par f de E, et en conséquence que $f^{-1}(A\backslash B)$ est vide.

Commençons par la double inclusion. Supposons que $(A\backslash B)\cap Imf \neq \emptyset$. Alors, soit $x \in f^{-1}(A\backslash B)$, qui existe car $f^{-1}(A\backslash B) \neq \emptyset$. Alors, par définition de l'image réciproque d'un ensemble par f, on sait que $f(x) \in (A\backslash B)$. Par définition, cela veut dire que $f(x) \in A$ et que $f(x) \notin B$. À nouveau par définition de l'image inverse, cela veut dire que $x \in f^{-1}(A)$ et $x \notin f^{-1}(B)$. Puisque x est toujours dans E, cela est équivalent à dire que $x \in f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$.
On a alors que $f^{-1}(A\backslash B) \subset f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$.

Pour l'autre inclusion, supposons toujours que $(A\backslash B)\cap Imf \neq \emptyset$. Soit $x \in f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$, qui existe car $f^{-1}(A) \neq f^{-1}(B)$. Alors on a que $f(x) \in A$, et que $f(x) \notin B$. Par conséquence, $f(x) \in A\backslash B$, et $x \in f^{-1}(A\backslash B)$.
Donc on a $f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(A\backslash B)$.

Par double inclusion, si $(A\backslash B)\cap Imf \neq \emptyset$, on a l'égalité.

Faisons le cas $(A\backslash B)\cap Imf = \emptyset$. On a alors qu'il n'existe pas de y dans l'image par f tel que $x \in A\backslash B$, c'est à dire qu'il n'existe pas de $x \in E$ tel que $f(x) \in A\backslash B$. Par définition, cela veut dire que $f^{-1}(A\backslash B) = \emptyset$. De son côté, pour calculer $f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$, on regarde $(A\backslash B)\cap Imf = \emptyset$. Alors, on a qu'il n'y a pas des éléments de l'image de f dans A qui ne soient pas aussi dans B. On a $A\cap Imf \subset B$. Par une propriété du cours, on sait que $f^{-1}(A\cap Imf) \subset f^{-1}(B)$, et par une autre propriété, $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(Imf) \subset f^{-1}(B)$. Or $f^{-1}(Imf) = E$, car $Imf = f(E)$, et on a que $E \subset f^{-1}(f(E))$ (l'image inverse est toujours contenue dans l'espace de départ, E). Donc on a que $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(Imf) = f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Alors, $f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B) = \emptyset$.
Si $(A\backslash B)\cap Imf = \emptyset$, on a $f^{-1}(A\backslash B) = \emptyset = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$ et on a gagné.

Une autre façon de résoudre cet exercice serait tout simplement par égalité d'ensembles.

$$f^{-1}(A\backslash B) = \{x \in E/\ f(x) \in A\backslash B\} = \{x \in E/\ f(x) \in A \text{ et } f(x) \notin B\} = ...$$

$$... = \{x \in E/\ f(x) \in A\}\backslash\{x \in E/\ f(x) \in B\} = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B).$$

Note : L'avantage de cette méthode est que les ensembles sont toujours définis (au pire, ils seront vides ; mais les égalités marchent toujours). Le désavantage est que, dans la plupart de cas, trouver une description de l'ensemble qui nous permette de passer d'une partie à l'autre n'est pas aussi simple, voir n'est pas possible. Alors, même s'il est vrai que dans ce cas précis l'égalité ensembliste est beaucoup plus facile et beaucoup plus directe, je ne vous conseille pas de le prendre comme méthode principale pour résoudre ce type de problèmes. Il est beaucoup moins facile de se retrouver coincé-e avec la double inclusion.

Aussi, pour la répartition des points, les personnes qui ont fait la deuxième méthode ont eu tous les points, parce que le raisonnaiment était complet. Celles qui ont fait la première méthode, chaque inclusion comptait pour 1 point, + 1 point pour le cas $A = B$. Je viens de me rendre compte que cela ne suffit pas, et qu'il faut séparer le cas $(A\backslash B)\cap Imf = \emptyset$ en entier : mais vu que c'est mon erreur et pas le votre, les gens qui ont eu ce point le garderont.

Exercice 3. Soient E, F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application. On dit qu'un ensemble $S \subset E$ est f-saturé si pour tout $x \in S$ et tout $x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$, on a $x' \in S$. Soit A un ensemble quelconque. Démontrer que

(i)** $A \subset f^{-1}(f(A))$**. (1 point)

Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}(f(A))$. Pour cela, on va découper la définition de $f^{-1}(f(A))$. On sait que $f(A) = \{y \in F/\ \exists a \in A \text{ tq } y = f(a)\} = \{f(a)/\ a \in A\}$, l'ensemble des images des éléments de A. Alors, par définition, $f(x) \in f(A)$. Maintenant, $f^{-1}(f(A)) = \{a \in E/\ f(a) \in f(A)\}$. Donc, comme $f(x) \in f(A)$, on a que $x \in f^{-1}(f(A))$. Par l'axiome d'extensionalité, on a que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Note : À nouveau, le plus gros problème qui a eu avec cet exercice était que on ne peut pas supposer l'existence d'une fontion réciproque. Si dans l'exercice 2(I) on savait qu'elle n'existait pas, ici on est tout simplement dans un cas général : notre raisonnaiment doit marcher tout aussi pour les cas bijectifs, où la réciproque existe sans soucis, que pour les cas comme $f(x) = x^2$, où elle n'existe pas.

Également, certains d'entre vous ont utilisé le résultat $A = f^{-1}(f(A))$. Malheureusement, cette égalité n'est vrai que si la fonction f est injective. D'ailleurs, on avait un exercice dans la feuille de TD sur les applications qui consistait à donner un exemple dans lequel cette égalité était fausse. L'exemple $f(x) = x^2$ marche, d'ailleurs : prenez l'exercice 2, partie (I), sous-partie (ii) : $[9, 16]$ peut être l'image de $[3, 4]$. A-t-on alors que $[-4, -3] \cup [3, 4] \subset [3, 4]$?

(ii)** $f^{-1}(f(A))$ **est saturé. (2 points)

Appliquons la définition. On doit montrer que si $x \in f^{-1}(f(A))$ et $x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$, alors $x' \in f^{-1}(f(A))$. Soient alors $x \in f^{-1}(f(A))$ et $x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$. Par la définition d'image réciproque, on sait que $f(x) \in f(A)$. Comme $f(x) = f(x')$, on a aussi que $f(x') \in f(A)$. Et, pour les mêmes raisons, cela nous donne $x' \in f^{-1}(f(A))$. On a donc que $f^{-1}(f(A))$ est f-saturé.

Notes : Il y a eu deux problèms principaux avec cet exercice. Le premier était tout simplement des soucis pour écrire ce qu'on voulait démontrer. À nouveau, il faut tenir compte que, quand on écrit des définitions, les variables utilisées sont muettes : c'est-à dire, elles sont juste là pour représenter les propriétés. En conséquence, le premier travail à faire quand on essaye de démontrer que quelque chose vérifie une définition est de trouver à quelles variables de l'enoncé correspond chaqu'un de trucs de notre cas particulier. Dans cette instance, E ne changait pas. Par contre, on veut démontrer que $f^{-1}(f(A))$ est f-saturé : alors, il faut prendre la définition de S f-saturé, et changer toutes les S par des $f^{-1}(f(A))$.

L'autre eurreur habituelle, une fois de plus, revient à la question des fonctions inverses. En effet, il y a des personnes qui ont écrit que, puisque $f(x) = f(x')$, on avait que $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')) = x'$. Cela est faux. Utilisant pour la n-ième fois l'exemple du carré, $x^2 = y^2 = 4$ ne veut pas dire que $x = y$: on pourrait avoir $x = 2$ et $y = -2$. On peut juste assurer que si x et x' ont la même image, elles sont toutes les deux dans l'ensemble des éléments qui ont la même image, $f^{-1}(\{f(4)\})$. En fait, si vous y réflechissez, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ est exactement la définition de fonction injective. Pourquoi on aurait inventé un mot particulier pour cette caractéristique là, si elle était verifiée par toutes les applications ?

(iii)** $f^{-1}(f(A))$ **est le minimum dans l'ensemble des parties** B **de** E **qui sont** f**-saturées et contiennent** A**. (3 points)

On va noter l'ensemble des parties (=sous-ensembles) de E qui sont f-saturés et contiennent A par $P_A(E)$. Alors, par les parties (i) et (ii) de l'exercice, on a bien que $f^{-1}(f(A)) \in P_A(E)$. On nous demande de montrer que cet ensemble est le minimum dans $P_A(E)$. Comme j'avais dit en cours la veille du partiel (surprise, la prof de TD qui connait le sujet du partiel rappelle des choses qui seront importantes la veille !), si on ne dit pas le contraire, l'ordre utilisé pour les sous-ensembles d'un ensemble donné est l'inclusion. On doit alors montrer que $f^{-1}(f(A))$ est le plus petit (pour l'inclusion) ensemble f-saturé qui contient A.

On doit alors montrer que, pour tout $B \in P_A(E)$, $f^{-1}(f(A))$ est plus petit que B, c'est-à-dire que $f^{-1}(f(A)) \subset B$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Montrons que $x \in B$. Par défintion d'image inverse, on sait que $f(x) \in f(A)$. Mais par définition d'image directe, cela veut dire qu'il existe un $x' \in A$, tel que $f(x) = f(x')$. Or, puisque $B \in P_A(E)$, on sait que $A \subset B$. Donc $x' \in B$. On a trouvé un élément de B, x', tel que $f(x) = f(x')$. Comme B est f-saturé (car $B \in P_A(E)$), cela implique que $x \in B$. Donc on a ce qu'on voulait : $f^{-1}(f(A)) \subset B$. Donc $f^{-1}(f(A))$ est plus petit que tout élément de $P_A(E)$, et il est bien le minimum.

Exercice 4. (1) Soit E un ensemble. Sur l'ensemble des suites d'éléments de E, on considère la relation $\sim$ définie par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geq p, u_n = v_n.$$

Démontrer que c'est une relation d'équivalence. (2 points : 0.5 pour la reflexivité, 0.5 pour la symétrie, 1 pour la transitivité)

La définition d'une relation d'équivalence est une relation binaire qui est reflexive, symétrique et transitive. Alors, on doit montrer que

- $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ (u_n) \sim (u_n)$ (Reflexivité).
- $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ (u_n) \sim (v_n) \Rightarrow (v_n) \sim (u_n)$ (Symétrie).
- $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$, alors $(u_n) \sim (w_n)$ (Transitivité).

Reflexivité :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Alors on doit trouver un $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n = u_n$ (en d'autres tèrmes, un p à partir duquel (u_n) et (u_n) sont la même suite). Dans ce cas, on a deux options : soit on donne un $p \in \mathbb{N}$ pour lequel ça marche ($p = 0$, $p = 42$, $p = 3500$, au choix, puisque (u_n) est toujours égale à elle même), soit on dit que ça marche pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Symétrie :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $(u_n) \sim (v_n)$. Alors, par définition cela veut dire que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, u_n = v_n$. Par la symétrie de l'égalité, on a que pour ce même $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq p, v_n = u_n$. On remplit alors les conditions de la définition et $(v_n) \sim (u_n)$. On a montré la symétrie.

Transitivité :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tels que $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Alors, par la définition de la relation, on a que

1. $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, u_n = v_n$
2. $\exists p' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p', v_n = w_n$.

On a besoin de trouver un $P \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_n \sim w_n$ pour tout $n \geq P$. Sachant que on a déjà que tout aussi (u_n) que (w_n) sont égales à (v_n) à partir d'un certain moment (pas forcément le même !), la façon la plus facile de faire est de s'assurer un P qui marche est de trouver juste un qui soit plus grand que p et que p'. On a plusieurs choix pour celui-là. On prend par exemple $P = max(p, p')$ ($P = p + p'$ marcherait aussi, entre autres).

Alors, on a que pour tout $n \geq P = max(p, p') \geq p$, par 1. $u_n = v_n$. Aussi, par 2., pour tout $n \geq P = max(p, p') \geq p'$ on a $v_n = w_n$. Donc pour tout $n \geq P$, $u_n = v_n = w_n$. On a trouvé un P qui vérifie la définition. On a $(u_n) \sim (w_n)$, et on a demontré la transitivité.

Notes : Cet exercice a eu deux erreurs, un que je m'attendais et l'autre que je ne m'attendais pas. Celui que je m'attendais pas était de juste oublier la partie sur le p qui existe, et travailler comme si la rélation était $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a tout simplement la relation d'égalité, et le resutlat est trivial. Je ne pas pas si quelqu'un a fait cela pour une autre raison *(si c'est le cas, j'apprécierais avoir l'information de pourquoi), mais je dirais qu'il s'agit simplement d'une erreur de lecture. Je ne peux pas vous dire plus que "faites attention aux enoncés. Il vaut mieux perdre cinq minutes à relire la consigne que résoudre un exercice qui n'est pas le bon". Normalement je met des points si le raisonnement est bon, même s'il ne suit pas exactement l'enoncé, mais ici la version incorrecte était trop facile.*

L'autre erreur, celle que je m'attendais, était de considérer, dans la transitivité, le même p pour les deux conditions. Il s'agit de la première erreur qu'on nous dit en formation, et j'imagine qu'on vous en a parlé en cours d'Analyse, aussi (pour la définition de continuité, par exemple). Si vous avez une défition qui inclut un "il existe", il dépend, forcément, de ce qui va avant. Ici, le p dépend de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans la définition de continuité en un point, le δ dépend du point et du ϵ. Faites attention à ça !

(2) Soient a et B deux ensembles totalement ordonnés. Démontrer que l'ensemble produit cartésien $A \times B$ muni de l'ordre lexicographique est également totalement ordonné. (0.5 points pour la reflexivité, 0.5 points pour l'antisymétrie, 1 point pour la transitivité, 1 point pour l'ordre total)

Si on a un ordre $\leq_A$ sur A et $\leq_B$ un ordre sur B, on définit l'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ sur $A \times B$ de la façon suivante :

$$(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq_A a_2 \text{ si } a_1 \neq a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \text{ si } a_1 = a_2 \end{cases}$$

La définition d'une relation d'ordre est une relation binaire qui est reflexive, antisymétrique et transitive. Alors on doit montrer que

— $\forall (a, b) \in A \times B, (a, b) \leq_{lex} (a, b)$ (Reflexivité).

— $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, si $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ et $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$, alors $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ (Antisymétrie).

— $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A \times B$ tels que $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ et $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_3, b_3)$, alors $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_3, b_3)$ (Transitivité).

En plus, on nous demande de montrer que $\leq_{lex}$ est un ordre total. Par définition, cela revient à montrer que pour tout $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, soit $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ soit $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$ (soit les deux, et dans ce cas on a que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ par l'antisymétrie).

<u>Reflexivité</u>
Soit $(a, b) \in A \times B$. Alors $a = a$, et on est dans le deuxième cas dans la définition. Est-ce que $b \leq_B b$? On sait que $\leq_B$ est une relation d'ordre, donc on a toujours que $b \leq_B b$, et la deuxième condition est toujours remplie. On $(a, b) \leq_{lex} (a, b)$, et la relation est reflexive.

<u>Antisymétrie</u>
Soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ tels que $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ et $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$. Alors on a plusieures possibilités :

1. Une inegalité est dans le premier cas et l'autre dans le deuxième. Prenons l'un des deux (l'autre cas serait pareil, en changeant le nom des variables). Alors $a_1 \neq a_2$ et $a_1 \leq_A a_2$, et $a_2 = a_1$ et $b_2 \leq_B b_1$.
2. Les deux inegalités sont dans le premier cas : $a_1 \leq_A a_2$ et $a_2 \leq_A a_2$, avec $a_1 \neq a_2$.
3. Les deux inegalités sont dans le deuxième cas : $a_1 = a_2$, $b_1 \leq_B b_2$ et $b_2 \leq_B b_1$.

Il est facile à voir que le cas 1. ne peut pas exister. En effet, on a que $a_1 \neq a_2$ et que $a_2 = a_1$ en même temps. Absurde.
Dans le cas 2., on a que $a_1 \leq_A a_2$ et que $a_2 \leq_A a_1$. Comme $\leq_A$ est une relation d'ordre, par antisymmétrie cela veut dire que $a_1 = a_2$. Or on sait que $a_1 \neq a_2$. Absurde. Donc ce cas ne peut pas arriver non plus.

On a finalement le cas 3. On a alors que $a_1 = a_2$, $b_1 \leq_B$ et $b_2 \leq_B b_1$. Comme $\leq_B$ est une relation d'ordre, par antisymétrie on a que $b_1 = b_2$. On a alors que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. On a l'antisymétrie.

<u>Transitivité</u>
Soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A \times B$ tels que $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ et $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_3, b_3)$. À nouveau, on a plusieures possibilités :

1. Les deux inegalités sont dans le premier cas. Alors, $a_1 \neq a_2$ et $a_1 \leq_A a_2$, $a_2 \neq a_3$ et $a_2 \leq_A a_3$.
2. La première est dans le première cas, la deuxième dans le deuxième : $a_1 = a_2$, $b_1 \leq_B b_2$ et $a_2 \neq a_3$, $a_2 \leq_A a_3$.
3. La première est dans le deuxième cas, la deuxième dans le premier cas : $a_1 \neq a_2$, $a_1 \leq_A a_2$ et $a_2 = a_3$, $b_1 \leq_B b_2$.
4. Les deux inegalités dans le deuxième cas : $a_1 = a_2$ et $b_1 \leq_B b_2$, $a_2 = a_3$ et $b_2 \leq_B b_3$.

Dans le cas 1. on a que $a_1 \leq_A a_2$ et $a_2 \leq_A a_3$. Donc on sait que $a_1 \leq_A a_2 \leq_A a_3$, et comme on sait que $\leq_A$ est une relation d'ordre, par transitivité $a_1 \leq_A a_3$. On est dans le premier cas de la définition, donc $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_3, b_3)$.
Dans le cas 2., on a $a_1 \neq a_2 = a_3$ (donc on est dans le premier cas de la définition). On a $a_1 = a_2 \leq_A a_3$, donc $a_1 \neq a_3$ et $a_1 \leq_A a_3$. On a trouvé $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_3, b_3)$.
Dans le cas 3. on a $a_1 = a_2 \neq a_3$ (donc on est dans le premier cas de la définition). On a $a_1 \leq_A a_2 = a_3$, donc $a_1 \neq a_3$ et $a_1 \leq_A a_3$. On a trouvé $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_3, b_3)$.
Finalement, dans le cas 4., on a que $a_1 = a_2 = a_3$, donc on est dans le second cas de la définition. Par la transitivité de $\leq_B$, $b_1 \leq_B b_2 \leq_B b_3$ implique que $b_1 \leq_B b_3$. On a trouvé $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_3, b_3)$.
Dans tous les cas on a trouvé ce qu'on voulait, donc on a bien la transitivité.

<u>Relation d'ordre totale</u>
Soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$. On a donc que soit $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ soit $(a_2, b_2) \leq_{lex} (a_1, b_1)$. Prenons les premiers tèrmes. On a forcément que soit $a_1 \neq a_2$, soit $a_1 = a_2$.
Dans le premier cas, l'ordre sur A est total, donc on a que soit $a_1 \leq_A a_2$, soit que $a_1 \leq_A a_2$. On a la première condition de $\leq_{lex}$, et on a une façon de les ordonner.
Dans le deuxième cas, on a que $a_1 = a_2$. Comme l'ordre sur B est total, on a soit $b_1 \leq_B b_2$, soit $b_2 \leq_B s_1$. On a la deuxième condition de $\leq_{lex}$, et on a une façon de les ordonner.
Donc pour tous deux éléments de $A \times B$, on peut trouver que l'un des deux est plus petit que l'autre pour l'ordre lexicographique, et on a bien démontré que l'ordre était total.

Notes : Le "problème" le plus habituel que j'ai vu avec cette question était... des personnes qui ne connaissaient pas la définition de l'ordre lexicographique et qui en ont juste inventé. Il y en a qui l'ont carrément dit, d'autres qui ont essayé de m'embruiller, mais elles sont toutes arrivées à la même idée :

$$(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq_A a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \end{cases}$$

Celui-ci n'est pas l'ordre lexicographique, mais il est un ordre (l'ordre produit) qui est tout aussi utilisé. Ainsi, j'ai mis 1.5 points à tout le monde qui m'a demontré que c'était bien une relation d'ordre. Par contre, il est pas total : pensez à $(1, 2)$ et $(2, 1)$ avec l'ordre usuel sur les naturels. On a que $1 < 2$ et $2 > 1$. Avec l'ordre produit il n'a aucun des deux qui soit "plus grand" que l'autre.

Je suis quand même un poil déçue que personne n'entre vous n'a pensé à utiliser l'exercice 5 du TD sur les relations. L'ordre lexicographique dans $A \times B$ est un cas particulier, avec $I = \{1, 2\}$. Sachant que vous aviez le droit à utiliser tout ce qui était dans les feuilles de TD, vous auriez pu me démontrer que c'est effectivement un cas particulier de l'exo (presque immediat) et partir avec 3 points de plus. Je m'attandais pas à que vous y pensiez, mais j'aurais bien aimé... ;)