Université Paul Sabatier 2018/2019

L2 Maths "Compléments de théorie des ensembles"

TD n^{o}3: Relations

Exercice 1 Soient $A, B \subset E$ des sous-ensembles d'un ensemble E. On définit la relation $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $C_E A \subset B$. Montrer que $A\mathcal{R}B$ est symétrique. De même pour la relation $B \subset C_E A$.

Exercice 2 On appelle *l'ensemble quotient* de E par la relation $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence par $\mathcal{R}$, et on le note par $E/\mathcal{R}$. Dans chacun des cas suivants, montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E et reconnaître l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

1. $E = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \underset{def}{\Leftrightarrow} a+d = b+c$.

2. $E = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ et $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \underset{def}{\Leftrightarrow} ad = bc$.

Exercice 3 Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E par:

$$\forall x, y \in E \ : \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1) Vérifier que l'on obtient ainsi une relation d'équivalence. Démontrer que la classe d'équivalence de $x \in E$ est $f^{-1}(f(x))$.
2) Traiter complètement les exemples suivants:

1. $E = [0,1] \times [0,1]$, $F = \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } x \neq 0 \\ (1,y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

2. $E = [0,1] \times [0,1]$, $F = \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } x \neq 0, y \neq 0 \\ (1,y) & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ (x,1) & \text{si } y = 0, x \neq 0 \\ (1,1) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

On précisera dans chaque cas l'ensemble image et les classes d'équivalence. Quels sont les ensembles quotients obtenus?

Exercice 4 On dit qu'une relation est *antiréflexive* si pour tout $x \in E$, x n'est pas en relation avec lui même. Une *relation d'ordre strict* est une relation antiréflexive, antisymétrique et transitive.
1) Montrer que, si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, la relation $\mathcal{R}'$ définie par:

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y$$

est une relation d'ordre strict.
2) Montrer que, si $\mathcal{R}'$ est une relation d'ordre strict, la relation $\mathcal{R}$ définie par:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}'y \text{ ou } x = y$$

est une relation d'ordre.

Exercice 5 Soient I un ensemble totalement ordonné et (E_i) une famille d'ensembles ordonnés indexée par I. On munit $E := \prod_{i \in I} E_i$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par:

$$(a_i)\mathcal{R}(b_i) \Leftrightarrow \exists i_0 \in I \;:\; a_{i_0} < b_{i_0} \text{ et } \forall i < i_0 \;,\; a_i = b_i.$$

Montrer que c'est une relation d'ordre strict.

Exercice 6 Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ son ensemble de parties. Montrer que $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$ est une relation d'ordre dans E, et qu'elle n'est pas totale. Montrer que $\emptyset$ est un minimum dans $\mathcal{P}(E)$ et E est un maximum.

Exercice 7 Vérifier que, dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ muni de l'ordre produit ou de l'ordre lexicographique, toute suite décroissante est stationnaire. Dans chacun des cas, préciser si toute partie non vide admet un plus petit élément.

Exercice 8 Sur l'ensemble $E^{\mathbf{N}}$ des suites dans E, on définit la relation $\sim$ par:

$$(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \sim (v_n)_{n \in \mathbf{N}} \Longleftrightarrow \exists p \in \mathbf{N} \;:\; \forall n \geq p \;,\; u_n = v_n.$$

Démontrer que c'est une relation d'équivalence. Quel est l'espace quotient obtenu?

Deuxième série (exercices facultatifs)

Exercice 9 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation. Peut-on décrire la clôture transitive, la clôture réflexive transitive et la relation d'équivalence engendrée par $\mathcal{R}$ à partir de la relation d'ordre $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$? Si oui, comment?

Exercice 10 1) On munit $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ de l'ordre lexicographique, pour lequel $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \leq (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si les deux suites sont égales ou s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p < v_p$ et $\forall n < p$, $u_n = v_n$. Démontrer que c'est un ordre total.
2) Décrire l'unique relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ telle que la bijection $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ soit strictement croissante.

Exercice 11 Soient E un espace vectoriel et E' un sous-espace vectoriel de E.
1) Montrer que la relation sur E définie par $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x-y \in E'$ est une relation d'équivalence. On note E/E' l'ensemble quotient.
2) Soit E'' un supplémentaire de E'. Montrer que E'' est un ensemble de représentants pour la relation ci-dessus.
3) En déduire que la restriction à E'' de l'application canonique $E \to E/E'$ est bijective.

Exercice 12 On définit par récurrence $E_0 := \emptyset$ et $E_{k+1} := E_k \cup \{E_k\}$. Démontrer que la relation $x \in y$ est une relation d'ordre strict total sur chaque E_k ainsi que sur $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} E_k$. En sachant que celle-ci est une construction des naturels $\mathbf{N}$, quelle relation sur $\mathbf{N}$ répresente $\in$ dans ce contexte?

Exercice 13 Sur l'ensemble $E^{\mathbf{R}}$, on définit la relation $\sim$ par:

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall x \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\ , \ f(x) = g(x).$$

Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 14 1) On dit qu'un ensemble ordonné est *noetherien* si toute suite croissante est stationnaire; ou, de manière équivalente, si toute partie non vide admet au moins un élément maximal. Aussi, on dit qu'un ensemble ordonné est *artinien* si toute suite décroissante est stationnaire; ou, de manière équivalente, si toute partie non vide admet au moins un élément minimal. Montrer qu'un ensemble ordonné fini est noetherien et artinien, et que la réciproque est vraie si l'ensemble est supposé totalement ordonné.
2) Plus généralement, montrer qu'un ensemble ordonné E est noetherien et artinien si, et seulement si, toute chaîne de E (c'est-à-dire toute partie totalement ordonnée) est finie.

3) Montrer que l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie donné est noetherien et artinien, mais en général infini. Autre exemple: l'ensemble des entiers naturels ayant au plus N facteurs premiers comptés avec leur multiplicité (N arbitraire).

Exercice 15 Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $\mathcal{R}'$ une relation d'équivalence sur E'; on note $E/\mathcal{R}$ et $E'/\mathcal{R}'$ les ensembles quotients. Soit $f : E \to E'$ une application. À quelle condition peut-on passer au quotient et définir l'application $\overline{f} : E/\mathcal{R} \to E'/\mathcal{R}'$? À quelle condition cette dernière est-elle injective ?

Exercice 16 Soit $\mathcal{R}$ une relation de *préordre*, c'est-à-dire réflexive et transitive. Montrer que la relation $\mathcal{R}'$ défine par $x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ est une relation d'équivalence.
