Memento

Florian Bertuol

2 août 2018

Table des matières

1 Analyse

1.1 Intégration

1.1.1 Tout est mesurable

Les fonctions que l'on veut intégrer dans la théorie de l'intégration sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), toujours équipé de sa tribu borélienne (la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle), et il faut avant tout vérifier qu'elles soient bien mesurables. Beaucoup de fonctions le sont gratuitement : comme premier exemple, lorsque l'espace de départ est topologique (muni de sa tribu borélienne), on peut citer les fonctions continues (l'image réciproque d'un ouvert étant encore un ouvert et se comportant très bien avec l'union et l'intersection). Ainsi, lorsque l'on se demande si $|f|$ est mesurable lorsque $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable (nécessaire à la bonne définition de l'intégrabilité), la réponse est oui. On montre aussi qu'un supremum, un infimum, une limite supérieure et une limite inférieure de fonctions mesurables sont encore mesurables (en particulier le sont donc les limites simples de fonctions mesurables). On voit enfin qu'une application continue par morceaux est mesurable, en remarquant plus généralement que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de $\mathbb{R}$ telle que $f|_{A_n}$ est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est mesurable : la bonne partition à considérer est celle des ouverts de continuité et des points de raccord.

1.1.2 Différence entre fonctions positives et fonctions à valeurs quelconques

On a dans le cas d'une fonction mesurable positive que la quantité $\int_X f\,dx$ est toujours bien définie, quitte à valoir $+\infty$. La différence dans le cas d'une fonction de signe quelconque est que l'on doit vérifier une condition supplémentaire, celle qui demande à ce que $\int_X |f|\,dx$ soit fini. On notera que, lorsque f est réelle de signe quelconque, l'écriture $\int_X f\,dx < +\infty$ n'a pas lieu d'être : on demande déjà par définition que ce terme soit fini.

1.1.3 Intégrale par rapport à une masse de Dirac

Dans l'égalité connue $\int_\Omega f\,d\delta_x = f(x)$, on peut être tenté de dire que si l'on change $f(x)$ par la valeur de son choix ("toujours possible dans les L^p..."), on aurait deux valeurs distinctes pour un même représentant de la classe de f et l'intégrale est alors mal définie. Il y a ici deux erreurs :

1. on ne travaille pas ici dans un L^p mais simplement sur $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_x)$, donc pas de raison de quotienter,

2. quand bien même on effectuerait cette modification, la nouvelle fonction f ne vaut pas *presque partout* la fonction f initiale, car elles diffèrent sur l'ensemble $\{x\}$ de mesure non-nulle.

1.1.4 Séries et intégrale de Lebesgue

On peut être tenté de voir les séries comme des intégrales sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), C)$, ce qui donne pour f intégrable et C la mesure de comptage :

$$\int_{\mathbb{N}} f\,dC = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

La discussion est la suivante :

— De cette manière on se priverait de toutes les séries semi-convergentes (du type $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$), qui ne sont effectivement pas intégrables et donc ne sont pas définies. Dans ces cas-là, on préfèrera penser en terme de séries,

— Dans d'autres cas, comme lorsque l'on cherche à justifie une interversion de limite et/ou de signes Σ et $\int$, la théorie de la mesure permet d'utiliser des théorèmes puissants. Dans ces cas-là, on préfèrera penser en terme de séries.

1.1.5 Fonctions Riemann-intégrables

On utilise la théorie de Riemann pour intégrer principalement des fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact, à l'aide des outils classiques (théorème fondamental de l'analyse, intégration par parties, changement de variables). Parler d'intégrale de Riemann impropre sur un intervalle $[a, b[$ consiste à étudier la limite en b de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ d'une fonction localement Riemann-intégrable (pour qu'elle soit bien définie). Ces dernières coïncident avec l'intégrale de Lebesgue dès qu'elles sont absolument intégrables (i.e. $\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f dx$, mais $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt < +\infty$ ne dit pas que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est Lebesgue-intégrable, ce qui n'est en effet pas le cas).

1.1.6 Coïncidence de l'intégrale de Lebesgue et de celle de Riemann

On a que les intégrales (propres *et* impropres) coïncident là où on les attend :

1. Dès que f est continue par morceaux sur un compact. On a même la proposition :

Proposition 1. *Soit f mesurable et bornée sur $[a,b]$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure de Lebesgue nulle,*

2. Dès que f est positive continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert,
3. Dès que f est continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert et que f est intégrable, i.e. $\int_{[a,b[} |f| \, d\lambda < +\infty$. On notera que la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x) \, dx$ n'entraîne pas l'intégrabilité de f, et l'on s'en convaincra à l'aide de l'exemple 1.1.7

1.1.7 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

On voit qu'elle converge grâce à un intégration par parties, mais on voit qu'elle n'est pas absolument convergente en minorant les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Pour comprendre pourquoi cet argument est valable, voir le paragraphe 1.1.8.

1.1.8 Découpe d'intégrales, intégrale sur un ensemble négligeable : Lebesgue VS Riemann

1. On a bien comme prévu pour toute fonction f positive, ou de signe quelconque intégrable :

$$\int_{A \uplus B} f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda$$

en écrivant $f\mathbf{1}_{A \uplus B} = f\mathbf{1}_A + f\mathbf{1}_B$ et en séparant la somme.

2. Quand on se donne une application $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, le théorème de convergence monotone assure que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{[-n,n]} f d\lambda$$

car on a en effet $f\mathbf{1}_{[-n,n]} \leq f\mathbf{1}_{[-m,m]}$ lorsque $n \leq m$. Pour les fonctions de signe quelconque intégrables, cela tient toujours par le théorème de convergence dominée en vertu du fait que $|f\mathbf{1}_{[-n,n]}| \leq |f|$.

3. L'intégrale d'une fonction positive sur un ensemble N de mesure nulle vaut zéro, comme par définition ce sera le supremum des intégrales des fonctions étagées g, valant toutes $\sum \alpha_i \mu(A_i \cap N) = 0$. Ceci tient évidemment pour les fonctions de signe quelconque intégrables, car on a
$$\int_N f \, d\lambda = \int_N f^+ d\lambda - \int_N f^- d\lambda = 0 - 0 = 0.$$
En particulier le point 1. dit que l'intégrale ne change pas si on enlève à l'ensemble sur lequel on intègre un sous-ensemble de mesure nulle.
4. Les points précédents permettent de calculer, lorsqu'elles coïncident, des intégrales de Riemann propres (toujours) et impropres (parfois : dans le cas de l'absolue intégrabilité).

1.1.9 Convolution

On peut voir la convolution comme une moyenne au sens suivant : on a
$$f * \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(y-x) \, dx = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} f(x) \, dx,$$
valeur moyenne de f sur l'intervalle $[y-\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}]$. Dans un souci de généralisation, on remplace l'indicatrice par des partitions de l'unité et on gagne en régularité.

1.1.10 Une transformée de Fourier d'une fonction réelle à valeurs complexes

Prendre la transformée de Fourier d'une fonction intégrable à valeurs réelles ne garantit pas que la fonction ainsi obtenue soit à valeurs réelles : prendre comme contre exemple $f = \mathbf{1}_{[0,\pi]} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ qui est telle que
$$\forall \omega \in \mathbb{R}^*, \hat{f}(\omega) = \int_0^{\pi} e^{-i\omega x} \, dx = \frac{e^{-i\omega\pi}}{-i\omega} - \frac{1}{-i\omega} = \frac{i}{\omega}[e^{-i\omega\pi} - 1],$$
prenant la valeur $-2i$ en $\omega = 1$.

1.1.11 Question à propos de la complétude des espaces L^p

La question est la suivante : *si une suite d'éléments de* L^p *converge, est-ce vers un élément de* L^p ? Remarquons que cette question n'a pas de sens : on ne précise pas quel est l'espace ambiant, quelle est la topologie sur cet espace et vers quoi cette suite converge. Le cadre naturel est de considérer l'espace vectoriel normé

$(\mathrm{L}^p, ||.||_p)$: lorsque l'on affirme qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément f, ça ne peut être par définition que pour un $f \in \mathrm{L}^p$. La bonne question est en fait : *est-ce que tel espace est complet* ? Elle permet lorsque la réponse est positive de voir l'ensemble comme un "tout", et non comme un sous-ensemble d'un espace plus gros. Ici, le théorème de Riesz-Fischer résout le problème, en affirmant que les espaces L^p, avec $p \in [1, +\infty]$, sont des espaces de Banach.

1.1.12 Question sur les espaces $\mathcal{L}^p$

Une autre question, mieux posée, serait la suivante : *si une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p$ converge simplement vers une application f, est-ce que f est un élément de $\mathcal{L}^p$?* On parle de $\mathcal{L}^p$ et non de L^p, car considérer la convergence simple d'une suite de classes d'équivalences vers une classe d'équivalence (pour la relation "être égale p.p. à") n'aurait pas de sens. La réponse est cette fois-ci non : considérer par exemple les $\mathbf{1}_{[-n,n]}$ dans $\mathcal{L}^1$, dont la limite simple n'est pas intégrable.

1.1.13 Lien entre convergence simple et convergence $\mathcal{L}^p$

Les résultats qui établissent des liens sont les suivants (les fonctions sont supposées mesurables) :

1. (Théorème de convergence dominée) Pour $p = 1$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f et si $|f_n| \leq g$ avec $g \in \mathcal{L}^1$ positive, alors $f \in \mathcal{L}^1$ et $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ (en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$),
2. (Convergence modulo extraction, apparaît dans la preuve du théorème de Riesz-Fischer) Si $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f.

1.2 Topologie

1.2.1 Limite dans un espace vectoriel normé

Dans un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$, on a équivalence entre

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ et } ||x_n - x|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On établit ce fait en remarquant qu'une base d'ouverts pour la topologie de E est l'ensemble des $B(x, \varepsilon)$, et en traduisant la définition "habituelle" de limite dans ce contexte. Par suite, dans un tel espace, dès que l'on a $||x_n - x|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$

0 et une application continue (comme $x \mapsto \langle y, x \rangle$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on peut écrire $\langle y, x_n \rangle \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \langle y, x \rangle$ par la caractérisation séquentielle de la continuité dans un espace métrique.

1.2.2 Limite et limite épointée

On définit la limite usuelle d'une fonction $f : D \subset E \to F$ en un point d'accumulation $a \in D$ par la limite le long du sous-espace $A = D \setminus \{a\}$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Ce point de vue permet d'envisager le prolongement par continuité (penser à la fonction $\mathbf{1}_{\{0\}}$ qui n'a pas de limite en 0 mais possède comme limite épointée 1 en 0).

1.2.3 Compacts et espaces vectoriels

Dans un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés de l'espace d'origine : c'est la propriété de Borel-Heine. Ce n'est pas vrai dès que l'on prend un sous-ensemble d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel : exemple avec $]0, 1[\subset \mathbb{R}$ qui est un fermé (de lui-même) borné, et n'est bien sûr pas compact.

1.2.4 Distance et uniformité

La continuité uniforme est une propriété d'espace métrique, et ne peut pas être étendue canoniquement à un espace topologique quelconque. En effet, si l'on tente l'analogie continue/uniformément continue connue qui est, pour $f : A \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$:

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall y \in A, d_X(x, y) < \eta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon (\text{continuité}),$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in A, \forall y \in A, d_X(x, y) < \eta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon (\text{continuité uniforme}),$$

on est bloqué par la définition habituelle de la continuité :

$$\forall x \in A, \forall W \in \mathcal{V}(f(x)), \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ tq } f(V \cap A) \subset W,$$

celle-ci ne ne permettant pas d'intervertir le $\forall x \in A$ et le $\forall W \in \mathcal{V}(f(x))$, car ce dernier dépend alors *a priori* de x.

Une analogie du même type montre qu'on n'arriverait pas à une définition convaincante pour la convergence uniforme de fonctions.

1.2.5 Convergence simple et uniforme de fonctions

On remarque que pour parler de convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions (bornées), on n'a besoin de mettre une topologie que sur l'espace d'arrivée (c'est là que la limite nous intéresse). Notons qu'il doit être séparé dans le premier cas pour garantir l'unicité de la limite, et métrique dans le second cas pour pouvoir parler d'uniformité (voir le paragraphe 1.2.4) : c'est pourquoi dans le cas général, on demande simplement à ce que l'espace d'arrivée soit métrique. On remarque qu'on peut définir la distance uniforme via $d_\infty(f,g) = \min(1, \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)))$, et vérifier que l'espace (Y^X, d_∞) est complet dès que Y est complet.

1.2.6 Une fonction de deux variables continues par rapport à chacune d'entre elles mais pas globalement

On peut considérer le contre-exemple $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ prolongée par continuité par 0 en $(0,0)$.

1.2.7 Les types de points adhérents

Dans un espace topologique E, on distingue les points isolés et les points d'accumulation de A comme suit :

1. les points isolés, si il existe un voisinage V de x dans E tel que $V \cap A = \{x\}$, autrement dit si $\{x\}$ est ouvert dans A pour la topologie induite par E,
2. les points d'accumulation, si tout voisinage de $\{x\}$ rencontre $A \setminus \{x\}$, autrement dit si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

De tels points sont bien sûr adhérents à A, et un point adhérent à A est soit isolé soit d'accumulation (soit à comprendre comme ou exclusif).

1.2.8 Un ouvert d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé ne contient que des points d'accumulation

On a en effet pour $U \subset E$ que tout point $x \in U$ est limite d'une suite de points de $U \setminus \{x\}$, définie par

$$x_n = x + \frac{1}{n} \cdot y \text{ pour tout } n \geq \left\lfloor \frac{||y||}{\varepsilon} \right\rfloor$$

avec y un vecteur non-nul et $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$ (ces conditions permettant d'écrire $0 < ||x - x_n|| = \frac{1}{n}||y|| < \varepsilon$, et ainsi $x_n \in U \setminus \{x\}$).

NB : C'est bien sûr faux pour d'autres structures. Par exemple, pour un espace X muni de la topologie discrète (métrique pour d_{dis}), tous les points d'un sous-ensemble A quelconque sont isolés : on a en effet

$$x \notin \overline{A \setminus \{x\}} = A \setminus \{x\},$$

ou encore qu'une suite qui tend vers x étant nécessairement stationnaire, on ne peut obtenir que des points isolés.

1.2.9 Un sous-ensemble non-dénombrable de $\mathbb{R}^n$ contient un point d'accumulation

La contraposée donne le résultat : un ensemble I qui ne contient que des points isolés permet de construire une injection vers $\mathbb{Q}^n$, en choisissant un rationnel dans chaque boule qui isole chaque point. Comme $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable en tant que produit fini d'ensembles dénombrables, il en est de même pour I.

1.2.10 Convergence simple sur un compact

Le théorème de Heine assure qu'une fonction continue sur un compact y est uniformément continue : on peut se demander si une suite de fonctions continues qui converge simplement sur un compact y converge uniformément (le seul rapport étant bien entendu la présence du terme "uniformément") ? La réponse est non, en considérant $f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle compact $[0, 1]$, dont la limite simple n'est pas continue et dont la convergence ne saurait alors être uniforme.

1.2.11 Frontière

La frontière est toujours un fermé : on a en effet $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, et donc

$$E \setminus (\partial A) = E \setminus (\overline{A} \setminus \mathring{A}) = E \cap (\overline{A} \cap \mathring{A}^c)^c = E \cap (\overline{A}^c \cup \mathring{A})$$

par les lois de de Morgan, et cet ensemble est bien un ouvert en tant qu'intersection d'un ouvert avec une union de deux ouverts.

1.2.12 Un espace métrique connexe non-trivial est indénombrable

Prouvons l'énoncé :

Démonstration. On raisonne par contraposée. Soit (X, d) un espace métrique connexe. On suppose que X est dénombrable. Alors, pour $x \in X$ fixé, on a que

$f : y \mapsto d(x,y)$ est continue (par la seconde inégalité triangulaire). Par conséquent, $f(X)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ dénombrable et donc un intervalle réduit à un point. Comme $d(x,x) = 0 \in f(X)$ on a $f(X) = \{0\}$ et alors $X = \{x\}$. □

1.2.13 Un ensemble dénombrable n'est pas un G_δ

Proposition 2. *Soit X un espace métrique complet sans point isolé et soit $D \subset X$ un sous-ensemble dénombrable dense. Alors D n'est pas un G_δ.*

Démonstration. Supposons que D soit un G_δ, i.e. $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ avec les U_n des ouverts. Comme on a que $D \subset U_n$, chaque U_n est dense. De plus, on peut écrire que $X \setminus D = \cap_{x\in D} X \setminus \{x\}$, et chaque ensemble $X \setminus \{x\}$ est ouvert et dense par l'hypothèse que X n'a pas de point isolé. Ainsi, on a

$$\varnothing = D \cap (X \setminus D) = \Big(\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \Big) \cap \Big(\cap_{x\in D} X \setminus \{x\} \Big),$$

qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses : le théorème de Baire assure alors que $\overline{\varnothing} = X$, ce qui constitue une contradiction. Par conséquent, D n'est pas un G_δ. □

1.2.14 Le théorème de Weierstrass

Proposition 3. *Une fonction numérique continue sur un compact atteint ses bornes.*

Démonstration. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une telle fonction. Alors $f(K) \subset \mathbb{R}$ est un compact, donc est fermé borné et contient ansi sa borne sup et sa borne inf, qui sont bien définies. Les éléments de $f(K)$ étant de la forme $f(x^*)$ et $f(x_*)$, de tels x^* et x_* conviennent. □

1.3 Analyse fonctionnelle

1.3.1 Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet

Comme première remarque, on fera attention au fait que ce résultat (ainsi que quelques autres...) sont valables uniquement sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il peut se passer des choses peu agréables dans d'autres cas, voir par exemple le paragraphe 1.3.3. Ceci vient du fait que les normes sont toutes équivalentes en dimension finie, et on peut utiliser l'isomorphisme habituel

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array},$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F, ainsi que le fait que si $|| \cdot ||$ est une norme sur F alors $N : x \mapsto ||u(x)||$ en est une autre sur $\mathbb{R}^n$. On observe ensuite que $u : (\mathbb{R}^n, N) \to (F, ||.||)$ est une isométrie, et qu'ainsi les propriétés métriques de ces deux espaces vectoriels normés vont coïncider.

1.3.2 Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de dimension finie est fermé

On a ici une démonstration plus rapide que celle qui consiste à dire "F est complet et donc fermé" : il suffit de prendre une base de F $(e_1, \ldots, e_p)$ et de la compléter en une base de E $(e_1 \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$, puis de voir F comme $p_F^{-1}(\{0\})$ où p_F est le projecteur de E sur F parallèlement à $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Les applications linéaires en dimension finie étant continues, on a que F est un fermé en tant qu'image réciproque continue d'un fermé.

1.3.3 Exemple d'espace vectoriel de dimension finie possédant deux normes non-équivalentes

Ce résultat lui aussi ne tient en effet que sur les $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le contre exemple est $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\ ;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$, pour $N_1(a + \sqrt{2}) = |a| + |b|$ et $N_2(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$, où il faut considérer une suite $a_n \to -\sqrt{2}$ et $b = 1$ pour aboutir à une contradiction quant à l'équivalence.

1.3.4 Un sous-espace vectoriel strict est d'intérieur vide

En effet, si ce n'était pas le cas, il contiendrait une boule, puis par translation et dilatation, la boule unité. Chaque vecteur (non-nul) s'exprimant comme

$$||x|| \underbrace{\frac{x}{||x||}}_{\in B(0,1)},$$

la structure d'espace vectoriel permet de conclure.

1.3.5 Réflexivité

Notons que l'on parle d'espace réflexif lorsque l'isométrie vectorielle

$$\mathrm{ev} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H'' \\ x & \longmapsto & \left(\mathrm{ev}_x : \begin{array}{ccc} H' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}\right) \end{array}$$

est surjective, ce qui n'équivaut pas par exemple au fait que l'on exhibe une isométrie quelconque $H \simeq H''$.

1.3.6 Les théorèmes de Banach

Ce paragraphe récapitule quels espaces doivent être supposés de Banach dans les théorèmes de Banach :

— Banach-Steinhaus : c'est l'espace de départ qui est supposé de Banach, car c'est sur les ensembles $\{x \in E\ ;\ \sup_{\alpha \in A} ||T(x)|| < +\infty\}$ que porte la condition,

— Théorème de l'application ouverte : les deux espaces sont supposés de Banach,

— Théorème du graphe fermé : les deux espaces sont supposés de Banach,

— Hahn-Banach : l'espace est simplement supposé normé.

1.3.7 Le dual topologique est séparant

En application du théorème de Hahn-Banach, on peut voir que pour $x \in E$, il existe $f \in E'$ telle que $||f|| = 1$ et $f(x) = ||x||$ (en prolongeant $\lambda x \mapsto \lambda ||x||$ sur $\mathbb{K}x$, continue car linéaire en dimension finie). En particulier, si $x_1 \neq x_2$ (et donc $x_1 - x_2 \neq 0$), on a $f \in E'$ telle que $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = ||x_1 - x_2|| \neq 0$, donc le dual topologique de E sépare les points de E.

1.3.8 Applications dont le but est complet

On a les deux résultats suivants :

1. Si (X, d) est un espace métrique, alors $(C(X), d_\infty)$ est complet (où $d_\infty(f, g) = \min(1, \sup\limits_{x \in X} |g(x) - f(x)|)$),
2. Si E est un espace vectoriel normé et F un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E, F), ||.||)$ est un espace de Banach (où $||u|| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{||u(x)||_F}{||x||_E}$).

1.3.9 Une base hilbertienne en dimension infinie n'est jamais une base algébrique

En effet, on a en considérant une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des éléments de notre base hilbertienne (qui est forcément infinie, sans quoi notre espace serait de dimension finie) que la série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} e_k$ est absolument convergente, donc convergente comme nous somme dans un espace complet. Or la limite u ainsi obtenue ne saurait être une combinaison linéaire finie des e_n, car on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les égalités

$$\langle u, e_n \rangle = \lim_{p \to +\infty} \langle \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} e_k, e_n \rangle = \frac{1}{n^2} > 0,$$

ce qui consituerait une contradiction.

1.3.10 Bessel et Parseval

Dans un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a l'égalité fondamentale

$$\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

où les $\langle x, e_n \rangle$ sont appelés les coefficients de Fourier de x. Cette égalité n'est pas triviale et découle de l'égalité de Parseval

$$||x||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

(on pourrait la généraliser au cas des bases hilbertiennes indénombrables grâce aux familles sommables, mais on n'y a pratiquement jamais affaire).

1.3.11 Un exemple de forme linéaire non-continue

On considère sur $(\mathbb{R}[X], ||.||)$, avec $|| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i || = \sup_{i \in \{0,\dots,n\}} |a_i|$, la fonction f définie par $f(P) = P'(1)$. On a pout tout $n \in \mathbb{N}$ que $||X^n|| = 1$ et appartient donc à la sphère unité, tandis que $|f(X^n)| = |n| = n$. Donc f n'est pas bornée sur la sphère unité, et ainsi elle n'est pas continue.

1.4 Calcul différentiel

1.4.1 Holomorphie et différentiabilité

Par définition de la différentiabilité, lorsque l'on dispose de deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on demande à ce que la différentielle $\mathrm{D}f(a) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ d'une application f en un point a soit $\mathbb{R}-$linéaire, et non $\mathbb{C}-$linéaire. On peut légitimement se demander si cette application n'est pas en plus $\mathbb{C}-$linéaire, les combinaisons linéaires à coefficients complexes restant bien dans E et F lorsque ces derniers sont des $\mathbb{C}-$espaces vectoriels : si c'est le cas, on dira que f est holomorphe en a.

1.4.2 Identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$

Pour vérifier que la jacobienne de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$ est bien une similitude, i.e. un nombre complexe et que f est holomorphe, on la calcule via l'application

$$\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ définie par } \hat{f}(x,y) = \Big(\mathrm{Re}(f(x+iy)), \mathrm{Im}(f(x+iy))\Big) =: (u(x,y), v(x,y)).$$

Cette identification nous permet d'écrire que

$$[Df(z)]_{(1,i)} = [D\hat{f}(x,y)]_{\mathcal{C}},$$

où $z = x + iy$ et $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1.4.3 Ce que généralisent les formules de Taylor

Taylor-Young permet l'obtention de développements limités, Taylor-Lagrange généralise l'inégalité des accroissements finis tandis que Taylor avec reste intégral généralise le théorème fondamental de l'analyse.

1.4.4 Application de classe C^1 bijective dont la réciproque n'est pas de classe C^1

On peut considérer le contre-exemple $x \mapsto x^3$, dont la réciproque n'est même pas différentiable. Notons que cela ne contredit pas le le théorème d'inversion globale, car $3 \times 0^2 = 0$.

1.4.5 Fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée non continue

On peut considérer le contre-exemple $x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$.

1.5 Équations différentielles

1.5.1 Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie

$$\forall t \in [a,b], u'(t) = f(u(t)), u(a) = u(b) = k.$$

Montrer que u est nécessairement constante.

Démonstration. On montre que $\max u = k$, un raisonnement analogue permettant de montrer que $\min u = k$. Supposons par l'absurde que $\max u = M > k$. On note $c \in]a,b[$ un point tel que $u(c) = M$. Le théorème des accroissements finis donne alors l'existence de $d^+ \in]a,c[$ tel que $u'(d^+) = \frac{u(c)-u(a)}{c-a} = \frac{M-k}{c-a} > 0$. On note $m = u(d^+)$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $d^- \in]c,b[$ tel que $u(d^-) = m$: on peut de plus supposer que $u'(d^-) \leq 0$, sans quoi on aurait, pour tout $x \in]c,b[$ tel que $u(x) = m$, que $u'(x) > 0$, en particulier pour x_{max} le plus grand d'entre eux. Comme u' est continue, ceci donnerait $u'(t) > 0$ pour t dans un voisinage $[x_g, x_d]$ de x_{max}, ce qui impliquerait $\int_{x_{max}}^{x_d} u'(t)\,dt = u(x_d) - u(x_{max}) > 0$, d'où $u(x_d) > m$. Par continuité de u [1], ceci est impossible. Finalement, on a fabriqué d^+ et d^- tels que

$$0 < u'(d^+) = f(u(d^+)) = f(m) = f(u(d^-)) = u'(d^-) \leq 0,$$

et on aboutit à une contradiction. Par conséquent $M = k$, et on a notre résultat. □

On remarque qu'on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz sans plus d'informations sur f !

NB : Ou alors, plus astucieusement :

$$0 = \int_k^k f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_a^b (u'(t))^2\,dt.$$

1.6 Probabilités

1.6.1 Loi discrète

On dit qu'une loi est discrète si c'est une combinaison linéaire dénombrable de mesures de Dirac : rien à voir avec le discret topologique. On notera qu'une telle probabilité est bien déterminée par les probabilités atomiques :

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} p_i \delta_i\right)(\{n\}) = p_n$$

(une remarque au passage : c'est toujours bien défini en tant que somme de mesures et donc de quantités positives).

1. i.e. le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à u sur $[x_{max}, b]$.

1.7 Analyse classique

1.7.1 Convergence de séries

On notera que la règle de d'Alembert ($\frac{a_{n+1}}{a_n}$) et la règle de Cauchy ($a_n^{\frac{1}{n}}$) donnent un critère de convergence des séries numériques à termes réels positifs (non-nuls à partir d'un certain rang pour la première), tandis que le théorème de Hadamard ($\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$) donne le rayon de convergence d'une série entière à coefficients complexes.

1.7.2 Dérivée d'une intégrale à paramètres dont les bornes sont fonctions du paramètres

Proposition 4. *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On a que $\varphi : (u, v, w) \mapsto \int_u^v f(w, x)\, dx$ est C^1, avec :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -f(w, u), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = f(w, v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial w}(w, x)\, dx.$$

Corollaire 1. *Si $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto v(t)$ sont C^1, on a pour $g : t \mapsto \int_{u(t)}^{v(t)} f(t, x)\, dx$ que*

$$g'(t) = v'(t) \cdot f(t, v(t)) - u'(t) \cdot f(t, u(t)) + \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, dx.$$

1.7.3 Critère de convergence des séries

1. Lorsque l'on considère une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ d'éléments d'un espace de Banach, on a que la convergence absolue (i.e. la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} ||a_n||$) entraîne la convergence de la série, via la critère de Cauchy.
2. Lorsque l'on considère une série de fonctions de $\mathcal{B}(X, E)$ de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, où X est un ensemble et E un espace de Banach, on a que la convergence normale (i.e. la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n||_\infty$) entraîne la convergence uniforme de la série, via le critère de Cauchy uniforme.

2 Algèbre

2.1 Algèbre linéaire

2.1.1 Matrices et applications associées canoniquement

À une matrice carrée, on peut selon le contexte associer canoniquement une application (endomorphisme, application bilinéaire...) si l'on dispose d'une base canonique. Par exemple, on peut voir

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme l'application linéaire $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $(x + y, x)$, donné par le calcul

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}.$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de cette application linéaire est effectivement M : ainsi l'identification est valable. On fait la même chose avec la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

à qui on associe canoniquement la forme quadratique

$$q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 4xy + 3y^2,$$

dont la matrice de forme bilinéaire symétrique dans la base canonique est à nouveau M. On consultera 2.1.3 pour un autre détail.

2.1.2 Sous-espaces propres et sous-espaces stables

Attention à ne pas faire d'amalgames : un sous-espace propre est un sous-espace stable sur lequel l'endomorphisme agit de plus comme une homothétie. On notera que l'existence d'une valeur propre implique l'existence d'un sous-espace stable (une droite vectorielle en l'occurence), c'est donc le cas de tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire (analyse et degré du polynôme caractéristique...).

2.1.3 Théorème spectral

Théorème 1. *Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors u est diagonalisable en base orthonormée.*

On donne les idées de la démonstration : on montre que les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles (ce qui implique au passage que son polynôme caractéristique est scindé), puis on montre que ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux-à-deux, avant de considérer $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} E_{\lambda_i}$ et de voir que $F^{\perp}$ est stable par f (car par f^*), et enfin on observe que $f|_{F^{\perp}}$ est symétrique et possède au moins une valeur propre, donc $F^{\perp} = \{0\}$ et donc en concaténant des bases orthonormales de chaque sous-espace propre on a notre résultat.

On a le corollaire suivant : pour une matrice symétrique réelle, le résultat affirme est qu'elle est semblable à une matrice diagonale via une matrice de passage orthogonale, qui correspond en fait à la matrice de passage la base canonique (orthonormale pour le produit scalaire usuel) de $\mathbb{R}^n$ (base pour laquelle on suppose que M représente un certain endomorphisme $\tilde{M}$) et la base orthonormale donnée par le théorème. On peut par la suite simplifier des matrices symétriques sans même être dans le contexte de l'algèbre linéaire : par exemple, une matrice d'application bilinéaire symétrique réelle est toujours congrue à une matrice diagonale, ceci donnant l'existence de bases orthogonales dans le cas des espaces vectoriels réels.

2.1.4 Endomorphisme nilpotent

On a la proposition suivante :

Proposition 5. *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ (et en particulier de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$...) est nilpotent si et seulement si son spectre est réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$u \text{ est nilpotent} \iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } u^n = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } X^n \text{ est annulateur de } u \iff \mathrm{Sp}(u) = \{0\}.$$

□

2.1.5 Matrices de passage

Il faut se souvenir que $\mathrm{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, ce qui va correspondre à une sorte de relation de Chasles dans le produit matriciel. En particulier, pour exprimer cette matrice, il faut être capable d'exprimer les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ (dite "nouvelle") en fonction de celles des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ (dite "ancienne"), ce qui se fait très bien dans le cas particulier où l'on travaille dans $\mathbb{R}^n$ et où $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique. En effet, pour $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_n)$, on aura alors

$$f_i = (f_{i,1}, \ldots, f_{i,n}) = f_{i,1}e_1 + \cdots + f_{i,n}e_n$$

et on a égalité (à une transposition près, que l'on sous-entend très souvent, via l'isomorphisme $\mathbb{R}^n \simeq \mathscr{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$) entre les vecteurs f_i et les vecteurs $[f_i]_{\mathcal{C}}$ de leurs coordonnées dans la base canonique : on a alors juste besoin d'aligner ces vecteurs en colonnes pour obtenir notre nouvelle base. On notera que pour quelqu'un de sensé, la terminologie "ancienne" et "nouvelle" ne colle pas avec la terminologie ensembliste "source" et "but", les anciennes coordonnées étant celles du but et les nouvelles coordonnées étant celles de la source... On notera que dans les problèmes, lorsque l'on dispose d'une matrice M dans une base $\mathcal{C}$ (ancienne) que l'on veut exprimer comme M' dans une base $\mathcal{B}$ (nouvelle), alors en notant $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ on aura :

$$M = PM'P^{-1}.$$

2.1.6 Coordonnées

On rappelle que, lorsque l'on travaille avec des matrices de passage, ce sont les coordonnées qui entrent en jeu, et non pas les vecteurs eux-mêmes (ce qui serait totalement absurde en travaillant sur $\mathbb{R}_3[X]$ par exemple : aucun sens à $P(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Q(X)$...). Considérons l'exemple suivant : dans $\mathbb{R}^2$, si je me donne la base canonique $\mathcal{C} = ((1,0),(0,1))$ et la base $\mathcal{B} = ((1,1),(2,0))$, alors la matrice de passage

$$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est telle que $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien envoyé sur $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (noter cette dernière égalité). Le calcul, pour être on ne peut plus sûr :

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.7 Réduction : diagonalisation et trigonalisation

Une fois qu'on a vérifié qu'un endomorphisme était diagonalisable, i.e. que $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$, il suffit de construire une base de chacun des sous-espaces propres pour avoir notre matrice diagonale. Dans le cas trigonalisable, i.e. quand on a l'égalité $E = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r}$, on cherche pour chaque endomorphisme nilpotent $f - \lambda_i \mathrm{id}|_{F_{\lambda_i}}$ une base dans laquelle la matrice de cet endomorphisme sera triangulaire avec des zéros sur la diagonale, puis on voit que l'endomorphisme $\lambda_i \mathrm{id}|_{F_{\lambda_i}}$ rajoute la valeur propre sur la diagonale. En concaténant les bases obtenues, on obtient bien une matrice triangulaire.

2.1.8 Endomorphisme cyclique

Pour montrer que, dans le cas d'un endomorphisme cyclique, on a bien $\mu_f = (-1)^n \chi_f$, on note que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, et qu'alors aucun polynôme non-nul de degré strictement inférieur à n ne saurait être annulateur de u. Par conséquent, $\deg \mu_f = \deg \chi_f$ et on a notre résultat.

2.1.9 Dénombrer les bases de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$

Cela revient à dénombrer les bases des $\mathbb{F}_p^n$, car il suffit de voir sur quelle base il est possible d'envoyer la base canonique. On compte alors $p^n - 1$ choix possibles (p^n étant le cardinal de $\mathbb{F}_p^n$, auquel on retire le vecteur nul) pour le premier vecteur, puis $p^n - p$ choix possibles pour le second vecteur (le cardinal de $\mathbb{F}_p$ moins les vecteurs colinéaires au premier déjà choisi), $p^n - p^2$ choix possibles pour le troisième vecteur (le cardinal de $\mathbb{F}_p$ moins les vecteurs dans le plan engendrés par les deux premiers, à mettre en bijection avec $\mathbb{F}_p^2$), etc. On en dénombre donc au final $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \ldots (p^n - p^{n-1})$.

2.1.10 Dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$

Si l'on adopte le point de vue "interne" $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n) = \{\sum \lambda_i e_i \ ; \ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, on a en se souvenant de la convention qu'une somme vide vaut l'élément neutre du groupe additif (ici 0) que $\varnothing$ est une base de $\{0\}$ qui est ainsi de dimension 0. D'autre part, d'un point de vue "externe", si l'on pose $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n) = \bigcap_{i \in I} V_i$ où $(V_i)_{i \in I}$ est la famille des espaces vectoriels qui contiennent tous les $e_1, \ldots, e_n$, on retrouve bien le résultat précédent.

2.1.11 Questions de nature géométrique

Pour toutes les questions du type "l'intersection de deux hyperplans d'un espace vectoriel de dimension 4 peut-elle être une droite", il faut penser à la formule de Grassmann :

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

En l'occurence la réponse est non.

2.1.12 Les bases canoniques

Dans les espaces vectoriels finis (de dimension n) qui possèdent une base canonique $\mathcal{C}$ (par exemple $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_{n-1}[X], ...$), on s'autorise quelques abus : par exemple, l'identification entre une matrice et une application linéaire (à M on associe $\tilde{M}$, l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M). On peut y faire d'autres choses sympathiques, comme par exemple utiliser le pivot de Gauss pour vérifier si une famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ de n vecteurs est une base (en vérifiant si la matrice des coordonnées en colonne

$$[f]_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c|c} [v_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [v_n]_{\mathcal{C}} \end{array} \right)$$

est de rang maximal, i.e. que l'application f qui à e_1 associe $f(e_1) = v_1$ est inversible : une telle application faisant correspondre une base à une base, on sera fixés). On peut remarquer *a fortiori* que, dans le cas où $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base, on a

$$[f]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{V}} = \mathrm{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{V}).$$

2.2 Algèbre bilinéaire

2.2.1 Produits scalaires réels et produits scalaires complexes

On fera attention à ne pas confondre produits scalaires réels et produits scalaires complexes (voir les points vocabulaire 3.5.6, 3.5.7 et 3.5.8 pour les définitions) : un forme bilinéaire symétrique ne saurait être définie positive sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, car rien ne garantit *a priori* que $\varphi(x, x)$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$, et deuxièmement si toutefois on avait $\varphi(x, x) > 0$ pour au moins tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors $\varphi(ix, ix) = i^2\varphi(x, x) = -\varphi(x, x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

2.2.2 Procédé de Gram-Schmidt

On notera que le procédé de Gram-Schmidt permet d'orthogonaliser une famille libre de vecteurs d'un espace euclidien, et par suite de les orthonormaliser. On remarquera qu'on utilise de manière essentielle dans la démonstration du procédé que la forme que l'on considère est bien un produit scalaire réel, i.e. bilinéaire, symétrique et définie positive (ce dernier point n'ayant *a priori* aucun sens lorsque l'on considère un $\mathbb{K}-$espace vectoriel où $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$).

2.2.3 Produit scalaire et orthogonalité

Dans un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, si l'on se donne une base orthonormée $\mathcal{B}$, deux vecteurs $x, y \in E$ et que l'on note $X = [x]_{\mathcal{B}}$ et $Y = [y]_{\mathcal{B}}$, alors on a l'égalité fondamentale suivante :

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY,$$

Autrement dit on se ramène toujours au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ en choisissant une bonne base. Le fait qu'un endomorphisme soit orthogonal (i.e. que $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$ ou encore $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$) se traduit donc par le fait que, toujours en considérant une base orthonormée,

$${}^tX{}^tUUY = {}^tXY,$$

ce qui équivaut à dire que

$${}^tUU = \mathrm{I}_n.$$

Finalement, les matrices orthogonales sont exactement les matrices d'endomorphismes orthogonaux en base orthonormée (la réciproque venant en considérant l'application linéaire canoniquement associée à la matrice, et le produit scalaire usuel : pour $P \in O_n(\mathbb{R})$, on aura $||PX||^2 = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = ||X||^2$). En particulier, un endomorphisme étant orthogonal si et seulement si il envoie une base orthonormée sur une base orthonormée, les matrices de passage entre bases orthonormées seront orthogonales, grâce à l'écriture

$$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}},$$

où f est l'endomorphisme défini par $f(b_i) = b_i'$.

2.2.4 Matrices de passage et matrices orthogonales

Proposition 6. *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ un base orthonormée de E. Alors pour toute base $\mathcal{B}'$, on a l'équivalence*

$$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \text{ est orthogonale } \iff \mathcal{B}' \text{ est orthonormée}$$

Démonstration. On a l'égalité matricielle $P = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}$, où f envoie b_i sur b_i'. Cette matrice est orthogonale si et seulement si f est orthogonal (la base $\mathcal{B}$ étant orthonormée), i.e. si et seulement si la base $\mathcal{B}'$ est orthonormée (un endomorphisme orthogonal étant caractérisé par le fait qu'il envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée, ou de manière équivalente s'il envoie une base orthonormée sur une base orthonormée). □

2.2.5 Formes bilinéaire symétrique et congruences

Deux matrices représentant la même forme bilinéaire symétrique dans deux bases distinctes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont congrues, i.e. on a $M' = {}^tPMP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a en effet, en notant $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$, que

$$ {}^tXMY = {}^t(PX')M(PY') = {}^tX'({}^tPMP)Y' = {}^tX'M'Y', $$

d'où le résultat. On insiste en remarquant bien que les matrices ne sont pas semblables *a priori*, la remarque de 2.2.6 mettant clairement ce point en évidence.

2.2.6 Théorème d'inertie de Sylvester

Lorsque l'on considère une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, le théorème d'inertie de Sylvester assure que la signature de cette forme est bien définie, i.e. que lorsque l'on prend une base orthogonale pour q (attention, l'orthonormée n'existe pas toujours), le nombre d'éléments strictement positifs, strictement négatifs et nuls de la matrice diagonale que l'on obtient est fixe. On peut aussi remarquer, en écrivant

$$ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & -\lambda_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \times \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, $$

que l'on est capables de se ramener à une congruence du type

$$ M = {}^tP' \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & & \\ & -\mathrm{I}_{r'} & \\ & & 0 \end{pmatrix} P', $$

où $P' = AP$ (et ${}^tP' = {}^t(AP) = {}^tP^tA = {}^tPA$) avec A exhibée précédemment, ce qui correspond en fait à un changement d'échelle des vecteurs de la base dans laquelle on représente notre forme quadratique par les facteurs $\sqrt{\lambda_i}^{-1}$. On remarque une nouvelle fois que la relation en jeu est la congruence et non la similitude : on est capable ici de donner au signe près la valeur de notre choix aux éléments non-nuls de la diagonale, ce qui reviendrait à changer les valeurs propres d'un endomorphisme dans le second cas.

2.2.7 Existence de bases orthogonales et orthonormales pour une forme bilinéaire symétrique

On peut montrer que, quelle que soit φ la forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}-$espace vectoriel que l'on considère, il existe une base orthogonale pour q (i.e. une base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$). En revanche, il faut plus de travail pour qu'une base soit orthonormée (i.e. $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$) : dans le cas d'un espace réel, il en existe toujours une lorsque la forme est définie positive (par le procédé de Gram-Schmidt, voir 2.2.2), mais dans les autres cas il faut pousser l'étude plus loin. On notera que dans $\mathbb{C}$, il existe une telle base si et seulement si la forme est non-dégénérée, voir 2.2.6.

2.2.8 Liens entre endomorphismes symétriques, applications bilinéaires symétriques et matrice symétriques

Un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$ est représenté en base orthonormée par une matrice symétrique : une telle base existe toujours, par le fait que $\langle ., . \rangle$ est définie positive (voir 2.2.2), le second point venant du fait que $[u]_{\mathcal{C}} = [u^*]_{\mathcal{C}} = {}^t[u]_{\mathcal{C}}$ via $\langle u^*(e_i), e_j \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle$, puis que les $\langle u(e_i), e_j \rangle$ représentent bien le coefficient d'indice i, j de la matrice car la base est orthonormée. Il ne faut pas confondre endomorphisme symétrique et forme bilinéaire symétrique : remarquons pour se persuader que ce serait une erreur que, si l'on appelle f l'une ou l'autre de ces applications :

— la matrice d'une forme bilinéaire symétrique sera toujours symétrique dans n'importe quelle base (par construction),

— dire que "f diagonalisable en base orthonormée" n'a pas de sens dans le cas où f est une forme bilinéaire symétrique (que seraient les vecteurs propres de f ?), mais est une assertion correcte pour un endomorphisme symétrique (via 2.1.3),

— dire que "il existe une base orthogonale pour f de E" n'a pas de sens pour un endomorphisme (quelconque), mais est une assertion correcte pour une forme bilinéaire symétrique (via le corollaire donné par 2.1.3).

2.2.9 Les projections orthogonales et les autres

Le théorème de Pythagore assure que la norme d'un projeté orthogonal (sur un sous-espace vectoriel fermé) est inférieure ou égale à la norme du vecteur initial, on fera attention au fait que ceci n'est pas forcément vrai si le projeté que l'on considère n'est plus orthogonal.

2.3 Algèbre des structures

2.3.1 Théorème de Lagrange

Proposition 7. *Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G. Alors H et $G/H = \{gH \; ; \; g \in G\}$ (l'ensemble des classes à gauche, i.e. les classes d'équivalence* *pour la relation $x \sim y \iff xy^{-1} \in H$, qui n'est pas forcément muni d'une structure de groupe !) sont finis, et on a la relation*

$$|G| = [G : H] \cdot |H|,$$

où $[G : H]$ désigne le cardinal de G/H.

Démonstration. On a que $m_g : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & gH \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$ est injective car g est inversible et surjective par définition de gH. Donc gH est en bijection avec H pour tout $g \in G$. Comme on a $G = H \uplus g_1 H \uplus \ldots \uplus g_n H$, où $n+1$ est donc le nombre de classes à gauche, on a finalement $|G| = [G : H] \cdot |H|$. □

2.3.2 Un anneau intègre fini est un corps

Démontrons le titre pour un tel anneau $(A, +, \cdot)$:

Démonstration. Supposons qu'il existe $a \in A^*$ tel que a ne soit pas inversible (disons à droite). Alors l'application de A dans lui-même $f_a : b \mapsto a \cdot b$ n'est pas surjective car 1_A n'est jamais atteint. Elle ne saurait alors être injective, et par conséquent il existe $b \neq c$ tels que $a \cdot b = a \cdot c$. Mais alors $a \cdot (b - c) = 0$ et donc $a = 0$, ce qui constitue une contradiction. □

2.3.3 Corollaire aux théorèmes de Sylow

Corollaire 2. *Un p-Sylow S de G est distingué dans G si et seulement si c'est l'unique p-Sylow de G.*

Démonstration. Si il est distingué, alors pour tout p-Sylow S' on a l'existence d'un $g \in G$ tel que $S' = gSg^{-1} = S$. Réciproquement, si c'est le seul p-Sylow de G alors pour tout $g \in G$ on a que $gSg^{-1} = \varphi_g(S)$ est un p-Sylow de G donc $gSg^{-1} = S$ et S est distingué. □

Bien faire la différence entre ensembles conjugués ($A = gBg^{-1}$) et classe de conjugaison ($\omega(x) = \cup_{g \in G}\{gxg^{-1}\}$).

2.3.4 Polynômes et racines

On sait que, si K est un corps, alors $P \in K[X]$ admet une racine α si et seulement si P est divisible par $X - \alpha$, ce qui se vérifie par division euclidienne. On peut se demander si ce résultat tient toujours lorsque A est un anneau (commutatif), la réciproque étant immédiate mais l'implication plus subtile. La réponse est en fait oui, grâce à la division euclidienne généralisée : on affirme que si le polynôme $Q \in A[X]$ par lequel on désire diviser notre polynôme $P \in A[X]$ est à coefficient dominant inversible (ce qui tient ici car le polynôme $Q = X - \alpha$ est unitaire), alors on peut effectuer la division dans $A[X]$ (avec au passage unicité du quotient et du reste : ce cas particulier du degré parmi les stathmes nous servira pour le paragraphe 2.3.6). La preuve du résultat est alors identique.

2.3.5 Polynômes et racines, suite

Dans $A[X]$, où A est un anneau intègre, on peut affirmer que si α et β sont deux racines distinctes de P, alors $(X-\alpha)(X-\beta)$ divise P. En effet, on a que $P = Q(X-\alpha)$ (ceci caractérise les racines dans un anneau (commutatif) quelconque, voir le paragraphe 2.3.4) et $P(\beta) = Q(\beta)(\beta-\alpha) = 0$. Par intégrité de A, on a $Q(\beta) = 0$ et ainsi $X - \beta$ divise Q.

2.3.6 Polynômes et racines, suite et fin

En utilisant toujours la division euclidienne généralisée, on affirme que : si pour des polynômes A, B et C à coefficients dans un anneau (commutatif), avec B unitaire, on a l'égalité $A = BC$, alors C est encore à coefficients dans l'anneau. En effet, par unicité du quotient et du reste (cas particulier du degré parmi les stathmes), on a P, Q à coefficients dans l'anneau tels que $A = BQ + R = BC$ et ainsi $C = Q, R = 0$ et on a notre résultat.

2.3.7 Polynômes à plusieurs indéterminées

Par construction, on a $A[X,Y] = A[X][Y]$, que l'on peut bien définir étant donné que $A[X]$ est un anneau unitaire. Les éléments de cet ensemble sont donc des suites nulles à partir d'un certain rang de suites nulles à partir d'un certain rang : on comprend l'intérêt de la notation à l'aide de X et de Y.

2.3.8 Les fractions dans un corps

On sait définir $\frac{a}{b}$ pour a et b dans un corps $\mathbb{K}$ en posant $\frac{a}{b} = ab^{-1} = b^{-1}a$. Les propriétés vérifiées sont les suivantes :

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc,$
2. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd},$
3. $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}.$

Ces propriétés justifient la définition ultérieure du corps des fractions, et permettent d'écrire par exemple des expressions comme $\frac{1+i}{3+2i}$ dans $\mathbb{C}$, puis de mener les calculs comme on a l'habitude de les faire.

2.3.9 Déterminer les cardinaux possibles pour un corps fini

Soit K un corps fini. La caractéristique d'un corps est définie comme étant l'entier p tel que, si l'on note

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & K \\ m & \longmapsto & m \cdot 1_K \end{array},$$

$\ker \psi = p\mathbb{Z}$. Comme le théorème d'isomorphisme donne alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Im} \psi$, on a en particulier que $p > 0$ (sinon le corps serait infini) et que p est premier (sinon le corps K ne serait pas intègre). En voyant finalement le corps K comme une extension du corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, de degré fini n, on en déduit que $|K| = |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|^n = p^n$. Finalement, les corps finis sont de cardinaux possibles les puissances des nombres premiers. On montre de plus que, une puissance d'un nombre premier étant fixée, on est capable d'exhiber un corps de ce cardinal.

3 Autres

3.1 Arithmétique

3.1.1 $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a+b,b)$

On note $d = \text{pgcd}(a,b)$ si $d \in \text{pgcd}(a,b)$. La proposition du titre de la section tient : en effet, supposons que $d = \text{pgcd}(a,b)$. On a alors $a = cd$ et $b = ed$. Vérifions que d divise $a+b$: on a $a+b = cd+ed = (c+e)d$. À présent supposons que d' est un autre diviseur de $a+b = cd'$ et $b = ed'$. Par conséquent, $a = a+b-b = cd'-ed' = (c-e)d'$. Comme d' divise a et b, on a que d' divise d. Finalement, $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a+b,b)$.

3.1.2 Propriétés du pgcd et du ppcm

Si on a les décompositions de deux éléments u et v en facteurs d'irréductibles $u = \prod_{p\in\mathcal{P}} p_i^{u_i}$ et $v = \prod_{p\in\mathcal{P}} p_i^{v_i}$, alors

$$\text{pgcd}(u,v) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p_i^{\min(u_i,v_i)} \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(u,v) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p_i^{\max(u_i,v_i)}.$$

Ceci montre au passage que $\text{pgcd}(u,v)\cdot\text{ppcm}(u,v) = uv$ et que $\text{pgcd}(u,v)$ divise $\text{ppcm}(u,v)$.

3.2 Axiomatisation

3.2.1 Relation d'ordre et opposés

Si l'on a un corps ordonné $(\mathbb{K},\leq)$, i.e. si

1. $\forall x,y,z \in \mathbb{K}, y \leq z \Longrightarrow x+y \leq x+z$,
2. $\forall x,y \in \mathbb{K}, x \geq 0$ et $y \geq 0 \Longrightarrow xy \geq 0$, alors en particulier on a $x \leq y \Longrightarrow -y \leq -x$, par le fait que

$$x \leq y \Longrightarrow x-x \leq y-x \Longrightarrow 0-y \leq y-x-y \Longrightarrow -y \leq -x.$$

3.2.2 Le symbole =

Le symbole = n'est défini qu'entre ensembles, et $A = B$ revient à dire que chaque élément de A est contenu dans B et que chaque élément de B est contenu dans A. Ainsi, tous les objets que l'on manipule avec l'axiomatisation ZF-C sont des ensembles, et affirmer $1+1=2$ a bien du sens : seulement, on ne vérifie par les inclusions à chaque fois, ce qui serait pénible en termes de coupures de Dedekind ou quotient de suites de Cauchy. Les axiomes sur les opérations (par exemple dans les espaces vectoriels) permettent eux aussi d'"admettre" des égalités qui seraient fastidieuses à démontrer.

3.3 Ensemble et raisonnements

3.3.1 Logique et prédicats

La phrase mathématique $''x = 2''$ n'est pas une assertion lorsque x n'est pas défini préalablement. La phrase "Soit x un réel, et soit $P : ''x = 2''$" est en revanche une manière correcte de définir l'assertion P. Un prédicat nécessite donc l'introduction préalable de l'ensemble dans lequel vit sa variable pour être bien défini : néanmoins, dans les cas où le contexte permet directement de savoir à quel ensemble est sensé appartenir x, on écrira $P(x)$ sans autres précisions. Donnons un exemple qui contient une double subtilité : lorsque l'on écrit

$$P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

sans indiquer la provenance de x, on sous-entend

$$\forall x \in E, P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

qui est elle-même une écriture pour l'assertion

$$\forall x \in E, \big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big),$$

qui elle est vraie par définition si pour tout x dans l'ensemble E, on a l'implication $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ qui est alors bien définie (on appelle ceci le *principe de quantification universelle implicite*).

La différence principale est à faire entre $P(x)$ lorsque x est déjà défini et $\forall x \in E, P(x)$: dans le premier cas, x est une variable prise alors qu'elle est muette dans le second cas (où l'on définit une nouvelle assertion à partir du prédicat P). Un prédicat est *a priori* une assertion, quitte à lui substituer des x clairement indiqués par le contexte : on peut se permettre dans la majorité des cas cet abus.

3.3.2 Une application d'un ensemble dans le même ensemble possédant un inverse à droite qui n'est pas un inverse à gauche

Il suffit de considérer $\mathbb{R}[X]$ et l'application $f : X^k \mapsto kX^{k-1}$ (la dérivée au sens algébrique). Un inverse à droite est donné par $g : X^k \mapsto \frac{X^{k+1}}{k+1}$ (une primitive au sens algébrique). On a bien $f \circ g(X^k) = f(\frac{X^{k+1}}{k+1}) = X^k$, mais en considérant par exemple $X + 1$ on a $g \circ f(X + 1) = g(1) = X \neq X + 1$ et ainsi g n'est pas inverse à gauche.

3.3.3 Quantifications sur l'ensemble vide

Toute quantifiaction universelle sur l'ensemble vide est vraie, tandis que toute quantification universelle sur l'ensemble vide est fausse. Cela se voit clairement en écrivant que

$$\text{non}(\forall x \in \varnothing, P(x)) \iff (\exists x \in \varnothing \text{ tq } P(x)).$$

3.4 Conventions

3.4.1 Parenthèses et calculs

On a que $1 + 2 \times 3 = 7$ et non pas $1 + 2 \times 3 = 9$: cette convention sur l'ordre de priorité des opérations sert essentiellement à alléger les écritures en parenthèses, tout comme l'associativité d'une loi $\cdot$ permet d'écrire $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c =: a \cdot b \cdot c$.

3.4.2 Somme et produits sur l'ensemble vide

On a par convention que, dans les groupes additifs ou multiplicatifs, que

$$\sum_{i \in \varnothing} a_i = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{i \in \varnothing} a_i = 1.$$

3.5 Vocabulaire

3.5.1 Point vocabulaire à propos de l'intégrale de Riemann impropre et l'intégrale de Lebesgue

Noter que l'on parle de *convergence de l'intégrale* dans le cas des intégrales impropres au sens de Riemann, tandis que l'on parle d'*intégrabilité de la fonction* dans le cas des intégrales au sens de Lebesgue.

3.5.2 Point vocabulaire sur le nom des limites

Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou d'une fonction $f : A \to Y$, on parle simplement de limite. Les noms remarquables sont les suivants :

1. somme lorsque la suite est une série,
2. valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque la suite considérée est une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou que la limite considérée est une limite le long d'un sous-espace strict, la seconde définition entraînant la première lorsque l'on pense à une suite comme étant une application $f : \mathbb{N} \to X$ en considérant la topologie de l'ordre sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

3.5.3 Point vocabulaire sur les noms d'espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle :

— espace préhilbertien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (réel ou complexe selon si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),

— espace de Hilbert un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (idem), complet pour la topologie d'espace métrique induite par son produit scalaire,

— espace de Banach un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme, complet pour la topologie d'espace métrique induite par sa norme,

— espace euclidien un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire (réel),

— espace hermitien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire (complexe).

3.5.4 Point vocabulaire sur les ensembles de Baire

Une intersection dénombrable d'ouverts s'appelle un G_δ, tandis qu'une intersection dénombrable de fermés s'appelle un F_σ. Un ensemble est dit maigre (ou de première catégorie de Baire), s'il est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides, et est dit de seconde catégorie s'il n'est pas maigre. Enfin, un ensemble est résiduel si son complémentaire est maigre.

3.5.5 Point vocabulaire sur les morphismes

La notion de morphisme correspond a une relation non pas entre ensembles mais entre ensembles munis de structures. Ainsi, un même nom peut définir plusieurs objets, comme en témoigne le tableau de correspondance suivant :

Algèbre	Topologie
homomorphisme	application continue
isomorphisme	homéomorphisme

3.5.6 Point vocabulaire sur les formes hermitiennes

Une forme hermitienne $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E est une application qui vérifie :

1. (sesquilinéarité) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$:
   (a) $\varphi(\lambda x + x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y)$

(b) $\varphi(x, \lambda y + y') = \overline{\lambda}\varphi(x, y) + \varphi(x, y')$

2. (symétrie hermitienne) $\forall x, y \in \mathbb{C}, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

On appelle forme quadratique hermitienne une application $q : E \to \mathbb{R}$ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$, où φ est une forme hermitienne. Cette application est bien définie (i.e. arrive bien dans $\mathbb{R}$) par le fait que $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$, et qu'ainsi $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$. On peut grâce à cette remarque parler de forme hermitienne positive et définie positive, puis définir un produit scalaire (complexe) comme étant une forme hermitienne définie positive.

3.5.7 Point vocabulaire sur les formes quadratiques et les formes quadratiques hermitiennes

On remarquera qu'une forme quadratique est la donnée d'une forme bilinéaire symétrique, tandis qu'une forme quadratique hermitienne est la donnée d'une forme hermitienne.

3.5.8 Point vocabulaire sur les deux différents produits scalaires

On remarquera que l'on ne peut définir une forme bilinéaire symétrique définie positive que si l'on travaille sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, la condition $\varphi(x, x) > 0$ n'ayant *a priori* pas de sens sinon. De même, on a vu précédemment qu'une forme hermitienne ne pouvait se définir qu'à l'aide du module et donc dans un $\mathbb{C}-$espace vectoriel : par conséquent, on ne peut définir une forme hermitienne définie positive que si l'on travaille sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

3.5.9 Point vocabulaire sur les formules de Moivre et d'Euler

La formule de Moivre est l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx),$$

tandis que la formule d'Euler est

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Les deux permettent d'interpréter la multiplication par un complexe de module 1 et d'argument x comme étant une rotation d'angle x.

3.5.10 Point vocabulaire sur les fonctions de la variable complexe

1. Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est appelée une fonction entière,
2. Si $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, on dit que a est une singularité isolée de f. On distingue les cas suivants, en fonction du développement en série de Laurent obtenu :
   (a) Si f peut être prolongée en une fonction holomorphe sur Ω, on dit que a est une singularité artificielle,
   (b) Si f s'écrit $\sum_{n=-m}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n$, on dit que a est un pôle d'ordre m,
   (c) Sinon, on dit que a est une singularitée essentielle de f.

Une fonction qui est holomorphe sur $\Omega \setminus A$, où $A \subset$ est un ensemble de points isolés tel que pour tout $a \in A$, a soit un pôle pour f, est dite fonction méromorphe sur Ω.

3.5.11 Point vocabulaire sur la multiplicité des racines des polynômes annulateurs

Soit u un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. On appelle :

— multiplicité algébrique d'une valeur propre λ de u la dimension du sous-espace caractéristique F_λ (c'est aussi la multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique de u)

— multiplicité géométrique d'une valeur propre λ sa la dimension du sous-espace propre E_λ.

3.5.12 Point vocabulaire sur les endomorphismes normaux

Dans un espace euclidien ou hermitien E, un endomorphisme qui commute avec son adjoint est appelé endomorphisme normal. Les noms changent en fonction du corps impliqué :

Corps/Relation vérifiée	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$u^* = u$	symétrique	hermitien
$u^* = -u = \mathrm{id}_E$	antisymétrique	antihermitien
$u^*u = uu^* = \mathrm{id}_E$	orthogonal	unitaire

3.5.13 Point vocabulaire sur les formules d'algèbre

On a les formules suivantes, lorsque G est un groupe fini :

1. **Formule des classes :** Lorsque l'on dispose d'une action $G \curvearrowright X$, alors on a l'égalité
$$\frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|} = |\omega(x)|$$
où l'on a noté $|\text{Stab(x)}| = \{g \in G \,;\, g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x et $\omega(x) = \{g \cdot x \,;\, g \in G\}$ l'orbite de x. Elle se montre en remarquant que $\overline{g} = g\text{Stab}(x) \mapsto g \cdot x$ de $G/\text{Stab}(x)$ dans $\omega(x)$ est bien définie et est une bijection.

2. **Équation aux classes :** Via l'action de G sur lui-même par conjugaison, on établit que :
$$|G| = |Z(G)| + \sum_i |\omega(x_i)|,$$
où la somme porte sur toutes les classes de conjugaisons de cardinal > 1.

3. **Formule de Burnside :** On suppose de plus X fini. Alors :
$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|,$$
où Ω désigne l'ensemble des orbites de X sous l'action de G et $\text{Fix}(g) = \{x \in X \,;\, g \cdot x = x\}$ (on retiendra que c'est le nombre moyen de points fixes).

3.5.14 Point "vocabulaire" sur l'alphabet grec

Lettre	Minuscule	Majuscule
alpha	α	$\cdot$
beta	β	$\cdot$
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	$\cdot$
zeta	ζ	$\cdot$
eta	η	$\cdot$
theta	θ	Θ
iota	ι	$\cdot$
kappa	κ	$\cdot$
lambda	λ	Λ
mu	μ	$\cdot$
nu	ν	$\cdot$
xi	ξ	Ξ
pi	π	Π
rho	ρ	$\cdot$
sigma	σ	Σ
tau	τ	$\cdot$
upsilon	υ	Υ
phi	ϕ	Φ
chi	χ	$\cdot$
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω