Corrigé du TD2

10 avril 2019

Exercice 6

1. La v.a. S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(500, \frac{1}{2})$.
2. Le théorème central limite affirme que la probabilité que la variable aléatoire centrée-réduite

$$T = \frac{S - \mathbb{E}(S)}{\sigma(S)} = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{S - 250}{5\sqrt{5}}$$

soit comprise entre a et b (avec a ou b pouvant valoir $-\infty$ et $+\infty$) est proche de la probabilité qu'une variable aléatoire N suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ soit comprise entre ces mêmes a et b (c-à-d que la valeur $\mathbb{P}(a \leq T \leq b)$ est proche de la valeur $\mathbb{P}(a \leq N \leq b)$), ceci à condition que plusieurs points soient vérifiés :

   (a) $n \geq 30$: ici, $n = 500 \geq 30$,

   (b) $np \geq 5$: ici, $np = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \geq 5$,

   (c) $np(1-p) \geq 5$: ici, $np(1-p) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 125 \geq 5$.

L'énoncé donne de plus que, pour une telle variable N, $\mathbb{P}(N > 1,65) \simeq 0,05$.

La question est de déterminer un entier m tel que $\mathbb{P}(S > m) \leq 0,05$. On se ramène dans le cadre d'application du théorème central limite en écrivant que :

$$\mathbb{P}(S > m) = \mathbb{P}\Big(\frac{S-250}{5\sqrt{5}} > \frac{m-250}{5\sqrt{5}}\Big) \simeq \mathbb{P}\Big(N > \frac{m-250}{5\sqrt{5}}\Big).$$

Cette dernière probabilité est inférieure à $0,05$ dès que $\frac{m-250}{5\sqrt{5}}$ est supérieur à $1,65$ (quand $\frac{m-250}{5\sqrt{5}} = 1,65$, $\mathbb{P}(N > \frac{m-250}{5\sqrt{5}}) \simeq 0,05$, et si $\frac{m-250}{5\sqrt{5}}$ est supérieur à $1,65$ alors $\mathbb{P}(N > \frac{m-250}{5\sqrt{5}}) \leq \mathbb{P}(N > 1,65) \simeq 0,05$). On calcule

alors :
$$\frac{m-250}{5\sqrt{5}} \geq 1,65 \Longleftrightarrow m \geq 1,65 \cdot 5\sqrt{5} + 250 \simeq 268,4.$$
L'entier recherché est donc $m = 269$.