Corrigé du TD3

10 avril 2019

Exercice 1

a) Comme $u_{n+1} = -\frac{\pi}{\sqrt{17}} u_n$, (u_n) est géométrique de raison $q = -\frac{\pi}{\sqrt{17}}$. Son terme général est par conséquent $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times \left(-\frac{\pi}{\sqrt{17}}\right)^n$.

b) La suite (u_n) a comme premiers termes $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 0$. Par conséquent :

— comme $1 = u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 = -1$, la suite (u_n) ne peut pas être arithmétique,

— comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \neq 0$, la suite (u_n) ne peut pas être géométrique (sinon $u_1 = u_0 \times q = 0 \times q = 0$). Son terme général est :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(on l'a prouvé par récurrence).

c) La suite est constante égale à 1 (on l'a aussi prouvé par récurrence, même si c'était facile à voir). Elle est à la fois arithmétique de raison 0 (car $u_{n+1} = u_n = u_n + 0$) et géométrique de raison 1 (car $u_{n+1} = u_n = u_n \times 1$).

d) Comme $u_{n+1} = -\frac{1}{2}(3 - 2u_n) = u_n - \frac{3}{2}$, la suite est arithmétique de raison $r = -\frac{3}{2}$. Son terme général est donc $u_n = u_0 + n \times r = \frac{1}{2} + n \times (-\frac{3}{2})$.

Exercice 2

Si l'on note u_n l'effectif de la population à l'heure n, alors l'énoncé se traduit par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{10} u_n = u_n \times \frac{11}{10}$ (à chaque heure, j'ajoute à la population déjà présente 10% de son effectif). C'est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{11}{10}$, et ainsi $u_n = u_0 \times q^n = 200 \times \left(\frac{11}{10}\right)^n$. En particulier, $u_{24} \simeq 1970$.

Exercice 3

	majorée	minorée	croissante	décroissante	convergente
$a)$		✓			
$b)$	✓	✓	✓		✓
$c)$	✓	✓			✓
$d)$	✓	✓	✓		✓

Exercice 4

1. On pose $S = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$. Soit on le fait proprement avec une récurrence, soit on remarque que

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 1 \end{array}$$

   d'où $2S = n \times (n+1)$ en regroupant les termes verticaux, et $S = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. On met de côté le cas $q = 1$, et la récurrence fonctionnait (sinon, nouvelle astuce : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, donc $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$). La convergence dépend de celle de la suite $(q^n)_{n \geq 0}$, dont on sait qu'elle diverge si $|q| > 1$, si $q = -1$, et converge sinon.
3. Récurrence, et donc

$$\prod_{k=2}^{+\infty}(1 - \frac{1}{k^2}) := \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

   (ce "produit infini" est une notation pour signifier qu'on prend la limite des produits, si elle existe).

Exercice 6

1. On a $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x(2-x)$. On veut vérifier que f envoie $]0,1[$ dans $]0,1[$: une récurrence permet de conclure. Or f est polynomiale ($f(x) = -x^2 + 2$), de coefficient dominant -1 : elle donc croissante de $-\infty$ jusqu'au milieu de ses racines (le milieu de 0 et 2, donc 1), et décroissante de 1 à $+\infty$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on lit sur un tableau de variations que f envoie bien $]0,1[$ dans $]0,1[$.

2. Comme u_n n'est jamais nul (car > 0), on peut étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Or ce rapport vaut $2 - u_n$, qui est plus grand que 1 : la suite est donc croissante.
3. La suite est croissante et majorée, donc convergente. Comme f est continue, ses seules limites possibles sont les points fixes de l, c-à-d les points ℓ tels que $\ell = f(\ell)$. Ici, ces points sont solutions de $\ell(2 - \ell) = \ell$, c-à-d de $\ell(1 - \ell) = 0$: il ne peut y avoir que 0 et 1. Comme $u_n \geq u_0 > 0$, seule 1 reste une limite possible, et c'est donc la limite de notre suite.

Exercices 7, 8 et 9

Voir :
https://www.math.univ-toulouse.fr/~jhok/DCE/L1BIO/correction_td3.pdf.