Corrigé du TD4

10 avril 2019

Exercice 9

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$

   On a directement que f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$: le seul point à vérifier est que le « raccord » se fasse correctement en 1. On a :
   - $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2,$
   - $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1) = 2e^{1-1} = 2e^0 = 2.$

   En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$ entier.

2. $g(x) = \begin{cases} 4e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

   On a directement que g est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$: le seul point à vérifier est que le « raccord » se fasse correctement en 0. On a :
   - $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = g(0) = 4e^0 - 1 = 3,$
   - $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \ln(0+1) = \ln(1) = 0.$

   Les deux valeurs diffèrent, donc g n'est pas continue en 0.

3. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^4 + 5x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

   On a directement que h est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$: le seul point à vérifier est que le « raccord » se fasse correctement en 0, et prenne bien la valeur précisée ($h(0) = 0$). On a :

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x) = 2 \times 0 + 1 = 1$,

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = \ln(0+1) = 0^4 + 5 \times 0^2 + 1 = 1$.

Malgré le fait que les deux valeurs soient les mêmes, elles ne valent pas 0 : la fonction est donc discontinue en 0.

Remarque 1. Si on avait eu $h(0) = 1$, alors la fonction aurait été continue.