

TD1 : Probabilités

Exercice 1. Les groupes sanguins furent découverts en 1901 par Karl Landsteiner. On distingue quatre phénotypes (c'est-à-dire groupes sanguins) : A , B , AB et O .

Le gène qui détermine le groupe sanguin existe sous trois formes alléliques A , B et O . On sait que A et B sont dominants et que O est récessif. Ainsi, on peut dire :

- le phénotype O correspond au génotype O/O
- le phénotype A correspond aux génotypes A/A et A/O
- le phénotype B correspond aux génotypes B/B et B/O
- le phénotype AB correspond au génotype A/B

On rappelle que le génotype d'un individu est déterminé par deux allèles : l'un hérité de la mère et l'autre du père. Ces deux transmissions d'allèles (père/mère) sont totalement indépendantes.

Chaque parent a lui-même deux allèles qui définissent son groupe sanguin et il transmet l'un ou l'autre avec la même probabilité 0.5.

On sait que dans la population, la répartition des allèles est : 68% pour l'allèle O , 25% pour l'allèle A et 7% pour l'allèle B .

1. Un individu (adulte) est pris au hasard dans la population. Donnez la probabilité qu'il transmette l'allèle A à son enfant (même question avec les allèles B et O).
2. Lorsqu'on prend un individu au hasard dans la population, on note $[A]$ l'événement "être du groupe sanguin A " (de même pour $[B]$, $[O]$ et $[AB]$). Calculez la probabilité de ces quatre événements.
3. Au 19ème siècle, on réalisait les transfusions sanguines au hasard, sans se soucier des groupes sanguins. Aujourd'hui, on sait que les groupes sanguins ne sont pas forcément compatibles. Les incompatibilités sont résumées dans le tableau suivant (\emptyset signifie "incompatible") :

	Donneur O	Donneur A	Donneur B	Donneur AB
Receveur O		\emptyset	\emptyset	\emptyset
Receveur A			\emptyset	\emptyset
Receveur B		\emptyset		\emptyset
Receveur AB				

On suppose qu'on fait une transfusion sanguine à un individu pris au hasard avec du sang prélevé chez un autre individu pris au hasard, sans se soucier des groupes sanguins. Calculez la probabilité qu'il y ait incompatibilité.

4. On suppose que 10% des individus du groupe O sont hémophiles, 8% des individus du groupe A sont hémophiles, 7% des individus du groupe B sont hémophiles et 8% des individus du groupe AB sont hémophiles.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'un individu qui est du groupe sanguin O soit hémophile ?
 Quelle est la probabilité qu'un individu soit du groupe sanguin O et hémophile ?
 - (b) Un individu du groupe sanguin O est pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas hémophile ?
 - (c) Un individu est pris au hasard dans la population. Quelle est la probabilité qu'il soit hémophile ?

(d) Quelle est la probabilité qu'un individu non hémophile soit du groupe sanguin A ?

Exercice 2. Un laboratoire pharmaceutique vient de créer un produit anticoagulant qui provoque malheureusement des allergies. On suppose que la population est formée de 45% d'hommes et de 55% de femmes. On a remarqué que la proportion des individus qui sont à la fois allergiques et de sexe masculin est de 0.2. De même, la proportion des individus qui sont à la fois allergiques et de sexe féminin est de 0.1.

1. On choisit au hasard un homme dans la population. Calculez la probabilité qu'il soit allergique.
2. Calculez la probabilité qu'un individu pris au hasard soit allergique au produit.
3. Est-ce que le fait d'être allergique au produit est indépendant du sexe ?
On sait que la répartition suivant les groupes sanguins est

O	A	B	AB
46 %	40 %	10 %	4 %

On a remarqué que parmi les individus du groupe sanguin A, 20% sont allergiques. De même, 15% des individus du groupe B sont allergiques et 5% des individus du groupe AB sont allergiques.

4. On choisit au hasard un individu allergique au produit. Calculez la probabilité qu'il soit du groupe sanguin B.
5. Un individu de groupe sanguin O est choisi au hasard. Calculez la probabilité qu'il soit allergique.
On sait que parmi les individus de groupe sanguin O, 60% sont de Rhésus positif. On a remarqué que la probabilité qu'un individu soit allergique sachant qu'il est du groupe O⁺ (groupe O rhésus +) est 0.2.
6. Calculez la probabilité qu'un individu soit à la fois allergique et du groupe sanguin O⁺.

Exercice 3. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraises produites en une semaine, au printemps, par un plant d'une variété de fraisier. On a observé les valeurs de X avec les fréquences :

nombre de fraises	3	4	5	6	7
fréquence	0.1	0.23	0.36	0.2	0.11

1. Calculez la moyenne $E(X)$ ainsi que l'écart-type $\sigma(X)$ de X .
2. Donnez la probabilité qu'un plant de fraisier ait une production inférieure ou égale à 5 fraises en une semaine.
3. On note maintenant Y la variable aléatoire représentant le nombre de fraises produites en une semaine par 7 plants de fraisier au printemps. On suppose que les productions de deux fraisiers plantés à proximité sont indépendantes. Donnez la moyenne $E(Y)$ ainsi que l'écart-type $\sigma(Y)$ de Y .

Exercice 4. On considère deux types d'une même espèce de plantes, le premier est caractérisé par des fleurs rouges et des feuilles découpées, le second par des fleurs jaunes et des feuilles entières. On estime à 35% la proportion de plantes du premier type. On cueille 100 plantes. Soit X le nombre de plantes du premier type parmi les plantes cueillies. Quel est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.