TD2 : Probabilités

Exercice 1. Par expérience, les compagnies aériennes savent que toute personne ayant réservé un billet d'avion a une probabilité $p = \frac{1}{4}$ de ne pas se présenter à l'embarquement. On suppose que, pour un même vol, ces désistements se font indépendamment d'un passager à l'autre.
Une compagnie aérienne possède un avion pouvant accueillir $n = 18$ personnes mais vend $N = 20$ billets. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes (parmi les N qui possèdent un billet) qui viennent effectivement prendre leur avion.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Trouver l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la probabilité que l'avion soit en sur-réservation.

Exercice 2. Un ascenseur d'un immeuble dessert 8 étages. 7 personnes le prennent au rez-de-chaussée et chacune choisit un des 8 étages au hasard, uniformément et indépendamment les unes des autres.

1. Soit, pour $i \in \{1, \dots, 8\}$, X_i la variable aléatoire égale à 1 si au moins une personne s'arrête au i^{e} étage, et 0 sinon. Déterminer la loi de X_i et calculer son espérance.
2. Les variables X_i sont-elles indépendantes ?
3. Exprimer le nombre d'étages auxquels l'ascenseur s'arrête en fonction des v.a. X_i, et en déduire le nombre moyen d'étages auxquels l'ascenseur s'arrête.

Exercice 3. Absence de mémoire. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire $\mathbb{P}(T = n) = (1 - p)^{n-1}p$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\mathbb{P}(T \leq n)$ et en déduire $\mathbb{P}(T > n)$.
2. Montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(T > n + k \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > k).$$
3. On modélise la durée de vie en années d'une ampoule électrique par une loi géométrique de paramètre $1/2$. Donner la durée de vie moyenne de l'ampoule.
4. Que peut-on dire de la durée de vie moyenne d'une ampoule dont on sait qu'elle fonctionne encore au bout de 2 ans ?

Exercice 4. Loi Binomiale/loi de Poisson
On a estimé qu'un certain vaccin peut provoquer une légère réaction allergique, à une fréquence d'une allergie sur cent vaccinations.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de réactions allergiques dans des échantillons de 20 personnes vaccinées.

1. Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ dont on précisera les paramètres. Rappeler alors la loi de probabilité de X, sa moyenne $\mathbb{E}(X)$ ainsi que son écart-type $\sigma(X)$. Calculez la probabilité $\mathbb{P}(X > 2)$.

On a remarqué que ce vaccin peut également provoquer des accidents graves à une fréquence d'un accident pour 100 000 vaccinations. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'accidents graves survenus dans des échantillons de 30 000 personnes vaccinées. Ainsi, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m, \pi)$ avec $m = 30\,000$ et $\pi = 0.00001$.

2. Calculez $\mathbb{P}(Y = 0)$ et $\mathbb{P}(Y = 1)$ (on gardera beaucoup de chiffres après la virgule).
3. Pourquoi peut-on supposer que Y suit approximativement une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ dont on déterminera le paramètre $\lambda > 0$? Vérifiez que cette approximation est plutôt bonne en recalculant $\mathbb{P}(Y = 0)$ et $\mathbb{P}(Y = 1)$ à partir de la loi de Poisson.
4. En utilisant la loi de Poisson, tracez les points $\big(k, \mathbb{P}(Y = k)\big)$ pour $k \in \{0, \ldots, 4\}$.

Exercice 5. Loi de Poisson
L'expérience de Luria et Delbrück (1943) a démontré que l'apparition de mutants dans une culture bactérienne est un phénomène aléatoire, les mutations sont spontanées et ne sont pas induites par le milieu.
On met en culture des bactéries *coli* dans un milieu contenant un antibiotique (*streptomycine*) et on laisse se développer les colonies. On s'intéresse alors aux bactéries qui présentent une mutation de résistance à l'antibiotique (mutant SmR). On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de bactéries mutantes dans une colonie. On modélise les fluctuations de X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ qu'on va chercher à déterminer.
Expérimentalement, on a obtenu 166 colonies parmi lesquelles 15 ne possèdent aucune bactérie mutante.

1. Déterminez le réel λ.
2. Donnez le nombre moyen de bactéries mutantes par colonie. Donnez également l'écart-type.
3. Si Z est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ de paramètre $\mu > 0$, montrez qu'on a alors la relation $\mathbb{P}(Z = k + 1) = \frac{\lambda}{k+1}\mathbb{P}(Z = k)$.
4. En utilisant la propriété du 3, calculez (rapidement) les $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0, \ldots, 9\}$. Tracez alors les points $\big(k, \mathbb{P}(X = k)\big)$ pour $k \in \{0, \ldots, 9\}$. Comparez avec le graphique fait à la question 4 de l'exercice “Loi Binomiale/loi de Poisson”.

Exercice 6. Au restaurant universitaire, deux légumes sont proposés : haricots verts ou épinards. On suppose que les 500 étudiants quotidiens du restaurant choisissent indépendamment les uns des autres les haricots verts avec probabilité 1/2 ou les épinards avec probabilité 1/2.
Pour éviter le gaspillage, on décide de prévoir assez de parts pour qu'il y ait moins de une chance sur vingt (soit une probabilité de 0.05) pour que certains étudiants ne puisse pas choisir des épinards. On note S le nombre d'étudiants choisissant les épinards.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire S ?
2. En utilisant le théorème central limite, déterminer n pour que $\mathbb{P}(S > n) \leq 0.05$. On donne que si N suit une loi normale centrée réduite, $\mathbb{P}(N > 1.65) \simeq 0.05$).