# TD3 : Suites numériques

**Exercice 1.** Ces suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Le cas échéant, préciser leur raison. Dans tous les cas, calculer leur terme général $u_n$.

$$a)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{\pi u_n}{\sqrt{17}} \\ u_0 = 3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_{n+1} = 1 - u_n \\ u_0 = 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = 1 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}(3 - 2u_n) \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Exercice 2.** Une population microbienne voit son effectif augmenter de 10% toutes les heures. Sachant qu'elle comporte 200 individus au moment où nous l'observons, qu'en sera-t-il au bout de 24 heures ? Au bout de $n$ heures (où $n$ est un entier naturel) ?

**Exercice 3.** Les suites suivantes sont-elles majorées ? minorées ? croissantes ? décroissantes ? convergentes ?

$$a)\ u_n = (-3)^n + 3^n \qquad b)\ u_n = \frac{n+1000}{n+2012} \qquad c)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \qquad d)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$$

**Exercice 4.** Sommes et produits.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Soit $q \neq 1$ un réel. Montrer par récurrence que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$, et en déduire la limite de $S_n$ quand $n \to \infty$ (discuter selon la valeur de $q$).
3. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$, et en déduire que $\displaystyle\prod_{k=2}^{+\infty}(1 - \frac{1}{k^2}) = 1/2$.

**Exercice 5.** Calculer les limites des suites suivantes :

$$a)\ \frac{2^n}{n^3} \qquad b)\ \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \qquad c)\ \frac{2^{\log(n)}}{n^{\log(3)}} \qquad d)\ \frac{2^n}{n!}$$

**Exercice 6.** Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\ , \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$.
2) Montrer que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.
3) En déduire la limite de la suite $(v_n)$ puis celle de la suite $(u_n)$.

**Exercice 7.** On considère une population bactérienne modélisée par le modèle logistique discret suivant :

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, 1[ \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n), \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que $0 < u_n < 1$, pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et déterminer sa limite quand $n \to \infty$.

**Exercice 8.** Soit $a$ un réel et $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $(u_n)$ est croissante.
2. Montrer que si $(u_n)$ converge alors sa limite est nécessairement 1.
3. On suppose $a \in [0, 1]$. Montrer par récurrence que $u_n \leq 1$. En déduire que $(u_n)$ est convergente.
4. On suppose $a > 1$. Montrer que $(u_n)$ diverge.
5. On suppose $a < 0$. Calculer $u_1$. Pour quelles valeurs de $a$ la suite $(u_n)$ converge-t-elle ?

**Exercice 9. (Plus difficile, pour aller plus loin).** On cherche à modéliser une population de lapins. On estime qu'un couple de jeunes lapins met un mois à devenir adulte et productif, et un couple de lapins adultes produit chaque mois un couple de jeunes lapins.
On suppose que les couples sont fidèles, et qu'il n'y a pas de mortalité dans la population. On note $u_n$ le nombre de couples au $n$-ième mois, et on suppose qu'à l'instant initial $n = 0$, il n'y a qu'un couple de jeunes lapins.

1. Donner les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Justifier la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, pour tout $n \geq 0$ (suite de Fibonacci).
3. On pose, pour tout $n \geq 0$, $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ satisfait la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{1}{1+v_n}$, et calculer les premiers termes de la suite.
4. Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
5. On introduit les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(i_n)_{n\geq 0}$ définies par $p_n = v_{2n}$ et $i_n = v_{2n+1}$. Montrer que $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(i_n)_{n\geq 0}$ convergent vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (on remarquera que $p_n = f \circ f(p_{n-1})$ et $i_n = f \circ f(i_{n-1})$).
6. En déduire que la suite $(\frac{1}{v_n})_{n\geq 0}$ converge vers $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).