TD4 : Fonctions usuelles, continuité, dérivabilité

Exercice 1. Dessiner puis déterminer l'ensemble des x réels tels que

$$1)\ \ln x > 1, \quad 2)\ e^{2x} < 7, \quad 3)\ x^2 > 2, \quad 4)\ (x+3)(e^x - 1) < 0.$$

Exercice 2. Équation de Nernst
On se donne deux compartiments A et B de même volume contenant de l'eau pure et séparés par une membrane poreuse. Dans le compartiment A, on dissout un composé chimique qui se dissocie en 2 types d'ions. Si on suppose que la membrane poreuse ne laisse passer qu'une espèce (dite perméante) d'ions entre les 2 compartiments, il s'établit une différence de potentiel entre les 2 compartiments qui est modélisée par l'équation de Nerst suivante

$$V_{AB} = \frac{RT}{zF} \ln\left(\frac{[X]_A}{[X]_B}\right)$$

où

- $V_{AB} = E_A - E_B$ est la différence de potentiel entre le compartiment A et le compartiment B,
- R est la constante des gaz parfaits,
- T est la température en Kelvin,
- z est la charge de l'ion perméant (avec le signe),
- F est la constante de Faraday
- $[X]_i$, $i \in \{A, B\}$, est la concentration de l'espèce perméante dans le compartiment i.

1. Que se passe-t-il si on échange les compartiments ?
2. Exprimer $[X]_A$ en fonction de $[X]_B$ et V_{AB}.

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = \frac{1}{x-7}, \qquad 2)\ g(x) = \ln(2x+3), \qquad 3)\ h(x) = \frac{1}{e^{x^3-18}},$$

$$4)\ F(x) = \ln(x^2+3x-10), \qquad 5)\ G(x) = \sqrt{x-1}, \qquad 6)\ H(x) = (e^x-1)^{-2}.$$

Exercice 4. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$1)\ 16 - e^{2x} = 0, \qquad 2)\ \ln(5x) + \ln(x+1) = \ln 10, \qquad 3)\ 2\ln x - \ln(x+1) = \ln 3,$$

$$4)\ 20\ln^2 x - 16\ln x + 3 = 0, \qquad 5)\ 2e^{-x} + e^x - 3 > 0, \qquad 6)\ \frac{e^{2x}e^{x-1}}{e^{x+3}} < 1.$$

Exercice 5. La figure 1 représente le graphe, en gras, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (Attention : le repère n'est pas orthonormé !), ainsi que les graphes de deux droites D_1 et D_2.

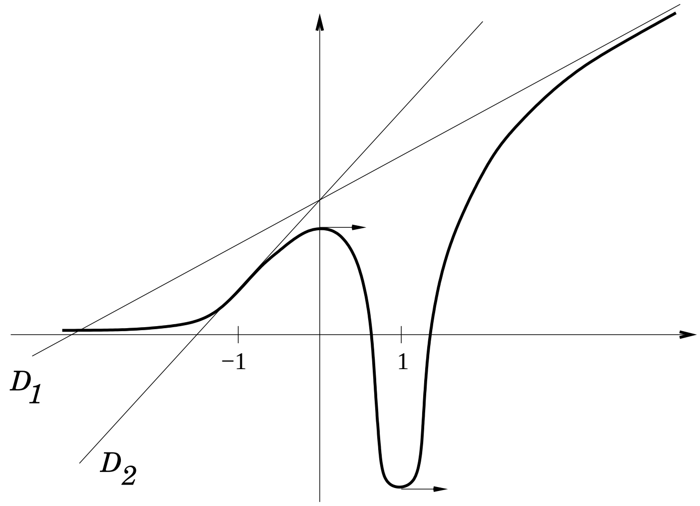

FIGURE 1 – Graphe de f et de 2 droites D_1 et D_2.

1. Dire à quelle droite correspond chaque équation

$$y = x + 3, \quad (1)$$
$$y = 2x + 3. \quad (2)$$

2. Expliquez pourquoi on a $f(x) < 3$ pour tout x dans l'intervalle $[-1, 1]$.
3. D'après le graphe de f donné, quelles semblent être les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?

Dans les deux questions suivantes, on admet que le comportement de f en $-\infty$ et en $+\infty$ est le même que celui que laisse supposer le graphe donné dans l'énoncé.

4. Dressez le tableau de variations de f.
5. Donner une valeur approchée du réel γ vérifiant $f(\gamma) = 10$.

Exercice 6. Etudier les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}, \quad 2)\ \lim_{x\to 0} x^{-3}e^{-x}, \quad 3)\ \lim_{x\to+\infty} x^{-2}(\ln x)^3,$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} (x\ln x)^{-4}e^{x}, \quad 5)\ \lim_{x\to 0} (\ln x)^4xe^{-2x}, \quad 6)\ \lim_{x\to-\infty} x^2e^{2x}.$$

Exercice 7. Calculer (si elles existent !) les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} -3x^2 + x + 1, \quad 2)\ \lim_{x\to-\infty} 4x^5 - 3x^4 + x^2 - 2, \quad 3)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)},$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5 - 3x^4 + x^2 - 2}{-3x^2 + x + 1}, \quad 5)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(e^x + e^{-x}), \quad 6)\ \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

Exercice 8. Variations de la température dans l'atmosphère en fonction de l'altitude : un modèle simple

Le modèle le plus simple de prise en compte des variations de la température dans l'atmosphère en fonction de l'altitude suppose la température affine par morceaux avec

- une variation de -3.7 degrés par kilomètre entre 0 et 11 km,
- une variation de 0 degrés par kilomètre entre 11 et 20 km,
- une variation de $+0.9$ degrés par kilomètre entre 20 et 32 km,
- une variation de $+2.8$ degrés par kilomètre entre 32 et 47 km.

Sachant que la température moyenne au niveau de la mer est de 15 degrés, exprimer la température T en degrés en fonction de l'altitude h en kilomètres et tracer le graphe correspondant.

Exercice 9. Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad 2)\ g(x) = \begin{cases} 4e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$3)\ h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^4 + 5x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 10. Plus difficile, pour aller plus loin : Équilibre acide/base

On considère l'équilibre acide/base suivant $HA + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$ où HA est l'acide et A^- sa base conjuguée.

Notons C_0 la concentration initiale en acide et $\alpha_{eq} := \dfrac{[A^-]_{eq}}{C_0}$ le taux de dissociation de l'acide à l'équilibre. Un acide est d'autant plus fort que son taux de dissociation est fort.

On rappelle que la constante d'acidité s'écrit $K_a = \dfrac{[A^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}{[HA]_{eq}}$ (quotient de concentrations à l'équilibre) et on note $pK_a = -\log_{10}(K_a)$.

On rappelle également la signification du pH d'une solution : $pH = -\log_{10}[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+.

Comme on néglige, parmi les ions H_3O^+, ceux qui proviennent de la dissociation de l'eau, ils ne peuvent venir que de la dissociation de l'acide HA. Cette dernière dissociation produit à chaque fois une molécule de A^- et une molécule de H_3O^+. A tout instant de la réaction, on a donc $[A^-] = [H_3O^+]$.

1. Calculer α_{eq} en fonction de C_0 et K_a.
2. Montrer que si $\dfrac{K_a}{C_0} << 1$, $\alpha_{eq} \sim \sqrt{\frac{K_a}{C_0}}$.
3. Compléter les phrases suivantes :
   - Plus K_a est ..., plus l'acide est fort.
   - Plus pK_a est ..., plus l'acide est fort.
4. Exprimer pH en fonction de pK_a et α_{eq}.
5. En déduire α_{eq} en fonction de pH et pK_a.