TD5 : Fonctions usuelles, continuité, dérivabilité

Exercice 1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 5$, 2) $f_2(x) = (x^2+1)e^{2x}$, 3) $f_3(x) = \ln(x^2 + e^x)$,

4) $f_4(x) = (2x+1)^3$, 5) $f_5(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$, 6) $f_6(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-3}$,

7) $f_7(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{2-3x}\right)$, 8) $f_8(x) = x^3 e^{-x}\ln(x)$.

Exercice 2. La figure 1 montre le nombre de phoques et d'ours dans une population arctique. L'évolution de ces deux populations a été étudiée sur une période de 600 jours.

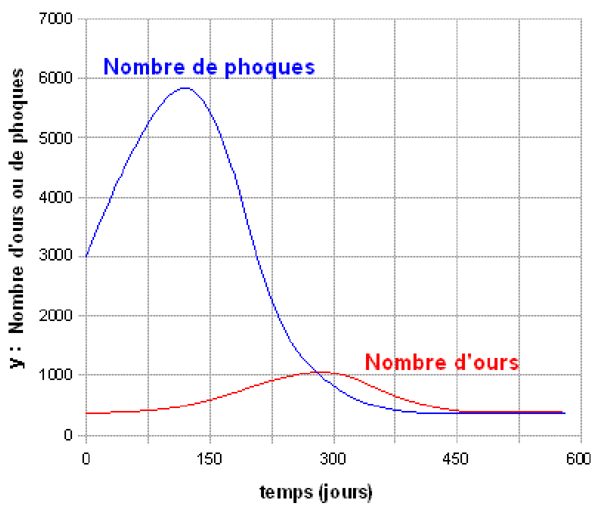

Figure 1 – Nombre de phoques et d'ours dans une population arctique.

1. Quelles sont approximativement les populations initiales de phoques et d'ours ?
2. Quelle est la vitesse de croissance de la population de phoques à l'instant initial ?
3. Quelle est la valeur de la dérivée de la population de phoques en fonction du temps lorsque le nombre de phoques est le plus important ? Lorsqu'il est le moins important ?
4. Faire un tracé approximatif de la dérivée de la population de phoques en fonction du temps.
5. En déduire des valeurs approximatives de la taille de la population de phoques lorsque sa dérivée est la plus grande ; lorsque sa dérivée est la plus faible.

Exercice 3. On souhaite couper un fil de 200 cm en deux morceaux pour former un cercle et un carré. À quelle endroit faut-il couper le fil pour que la somme des aires soit minimale ? maximale ?

Exercice 4. Le but de l'exercice est d'étudier la bijection réciproque de la fonction tangente.

1. Montrer que la fonction tan : $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est dérivable et strictement croissante. Déterminer ses limites en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
2. En déduire que tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan sa bijection réciproque.
3. Calculer la dérivée de la fonction arctan.

Exercice 5. On considère l'application $f\colon]-\frac{1}{3},+\infty[\to]\frac{2}{3},+\infty[$, $x\mapsto \frac{2x+1}{3x+1}$.

1. Montrer que f est strictement décroissante.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{1}{3},+\infty[$ dans $]\frac{2}{3},+\infty[$. Déterminer sa réciproque, notée f^{-1}.
3. Calculer la dérivée de f^{-1} en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de f^{-1}.

Exercice 6. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
1) $f(x,y)=2x^2y^2-x^2y+3xy-5y^3+1$, 2) $g(x,y)=\dfrac{x}{e^y}$, 3) $h(x,y)=\ln(x+y)$.

Exercice 7. Considérons un fluide décrit par l'équation d'état de Van der Waals

$$\left(P+a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V-nb)=nRT \tag{1}$$

où

- P est la pression du gaz en Pascal,
- V est le volume occupé par le gaz en m^3,
- n est la quantité de matière en moles,
- $R:=8.314472J\,K^{-1}\,mol^{-1}$ est la constante des gaz parfaits,
- T est la température absolue en Kelvin,
- a et b sont des paramètres dépendant du gaz.

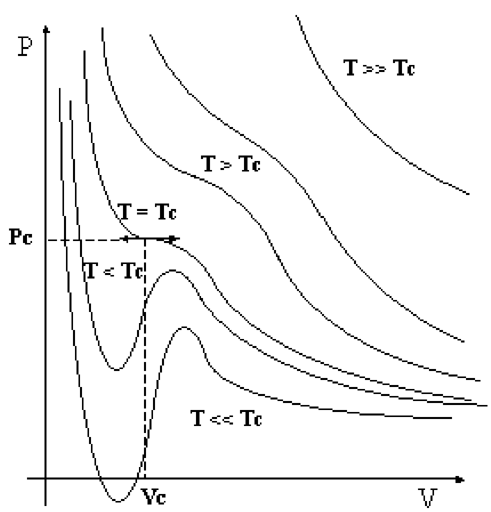

FIGURE 2 – Graphes des fonctions P=F(V) à température constante pour différentes valeurs de température.

Très grossièrement, si on trace les isothermes du gaz, c'est-à-dire les graphes des fonctions P=F(V) à température constante pour différentes valeurs de température (voir figure 2), on a 2 types de courbes :

- Pour $T > T_C$, à chaque pression ne correspond qu'un volume possible.
- Pour $T < T_C$, à chaque pression correspondent plusieurs volumes (cela s'explique par le fait que les phases gazeuses et liquides peuvent cohabiter).

On appelle point critique le point de transition qui correspond à la fois à une tangente horizontale et à un point d'inflexion. Mathématiquement, cela correspond donc à

$$\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T=T_C} = \left.\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right|_{T=T_C} = 0.$$

Notons à l'aide d'un indice C les pression P_C, volume V_C et température T_C du fluide au point critique.

1. Exprimer les coefficients a et b du fluide considéré en fonction de P_C, V_C, T_C, n, R.
2. Exprimer l'équation d'état (1) en fonction des variables réduites

$$\Pi := \frac{P}{P_C}, \quad \Theta := \frac{T}{T_C}, \quad \Phi := \frac{V}{V_C}.$$