TD6 : Primitives, Intégration

Exercice 1. Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^2 (2t^3 - 3t^2 + \frac{t}{2} - 1)\ dt$, 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{t+1}\ dt$, 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{-5}{2t+3}\ dt$, 4) $\displaystyle\int t^2(1+2t^3)^5\ dt$,

5) $\displaystyle\int \frac{3t}{(3-t^2)^3}dt$, 6) $\displaystyle\int te^{t^2}dt$, 7) $\displaystyle\int \frac{2}{2-t}dt$, 8) $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^4}dt$,

9) $\displaystyle\int \frac{t^3}{2t^4+1}dt$, 10) $\displaystyle\int (\sin t)e^{\cos t}dt$, 11) $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t}dt$, 12) $\int \frac{1}{t \ln t}dt$.

Exercice 2. En utilisant une intégration par partie, déterminer une primitive de $x \mapsto \ln x$.

Exercice 3. En utilisant une intégration par parties, calculez les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^2 (t-1)e^{2t}dt\,, \qquad 2) \int_0^\pi 2t\sin(3t)dt.$$

Exercice 4. Un corps de température T_0 est placé dans un environnement de température T_a. Sa température est donnée en fonction du temps par la loi de refroidissement de Newton :
$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$ où k est une constante. Calculer la température moyenne T_m du corps entre un temps t_1 et un temps t_2.

Exercice 5. La pression atmosphérique, à altitude donnée z, est due au poids de la colonne d'air située au dessus de la surface considérée S ("parallèle" à la surface de la terre, à altitude z). On note $m(z)$ la masse de l'air au dessus de la surface S à l'altitude z. On a ainsi la formule
$P(z) = \frac{m(z)g}{S}$ où g est la constante de pesanteur.

1. On note ρ la masse volumique et dz une petite variation d'altitude. Exprimer la différence $m(z+dz) - m(z)$ en fonction de S, ρ et dz.
2. En déduire une expression de $P(z+dz) - P(z)$ puis de $\frac{dP}{dz}$.
3. Si on suppose que la masse volumique ρ est constante (fluide incompressible), donnez l'expression de $P(z)$.
4. L'air est en fait compressible. Si on utilise l'équation des gaz parfaits $PV = nRT$, on obtient alors $\rho = \alpha\frac{P}{T}$ où α est une constante positive. Par ailleurs, la température varie en fonction de l'altitude ($T = T(z)$). On suppose que cette variation est linéaire : $T(z) = T_0 - \beta z$ où β est une constante positive. Donnez l'expression de la pression $P(z)$.