TD7 : Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 2y(x) = 0$,
2. $xy'(x) - y(x) = 0$, sur $]0, +\infty[$ avec $y(1) = 2$,
3. $y'(x) + xy(x) = 0$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 5y(x) = xe^{2x}$,
2. $y'(x) - 5y(x) = xe^{5x}$,
3. $xy'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur $]0, +\infty[$,
4. $(x+2)y'(x) - 3y(x) = -5$ sur $]-2, +\infty[$, avec la condition $y(0) = 1/8$,
5. $(1+x)y'(x) + 2y(x) = e^x$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3. Un élément radioactif se dégrade de telle façon qu'il perd 1 pour cent de sa masse par unité de temps, et cette dégradation se fait continument dans le temps. Modéliser ceci par une équation différentielle linéaire d'ordre 1, et la résoudre.
Calculer la demi-vie de l'élément, c'est-à-dire la durée au bout de laquelle la moitié de la masse sera dégradée (on prend l'année pour unité de temps).

Exercice 4. Un médicament administré par voie orale est éliminé par la fonction reinale. On suppose que la durée d'absorption par voie orale est négligeable (à t=0, la quantité Q_0 de produit est présente dans le tube digestif). La vitesse de passage du médicament du système digestif à la circulation sanguine est proportionnelle à la quantité de médicament restant dans le tube digestif (de constante d'absorption $k_a > 0$). La vitesse d'élimination du médicament par les reins est proportionnelle à la quantité présente dans le sang (de constante d'élimination k_e, $0 < k_e < k_a$). On note $Q(t)$ (respectivement $S(t)$) la quantité de médicament présent dans le tube digestif (resp. dans le sang) à l'instant t.

1. Calculer la quantité de médicament dans le tube digestif en fonction du temps.
2. Expliquer la relation suivante : $S'(t) = k_a Q(t) - k_e S(t)$. En déduire l'expression de $S(t)$.
3. Au bout de combien de temps la quantité de médicament dans le sang sera-t-elle maximale ?

Exercice 5. L'effectif $N(t)$ (exprimé en milliers) d'une population de microbes s'accroit pendant l'intervalle de temps Δt de la moitié du produit $N(100 - N)\Delta t$.

1. Etablir l'équation différentielle satisfaite par $N(t)$.
2. On pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $y(t)$.
3. Donner l'expression de $y(t)$ et en déduire $N(t)$.
4. Sachant que $N(0) = 50$, étudier l'évolution de la population au cours du temps. En particulier, quel est l'effectif limite quand t tend vers l'infini ?

Exercice 6. On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.1y^2(t),$$

avec t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille.

1. Sans résoudre l'équation, indiquer le comportement (croissance, décroissance) de cette population.
2. On suppose $y(0) = 10$. Montrer que $y(t) = \frac{10}{1-t}$ est solution de l'équation.
3. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 pour 10000 :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.1y^2(t) - 50y(t).$$

   En étudiant la fonction $f(y) = 0.1y^2 - 50y$, prévoir le comportement de cette population selon sa taille initiale $y(0)$.