TD8 : Équations différentielles

Exercice 1. Cinétique chimique
Dans tout cet exercice, on notera $a = [A]$ la concentration de l'espèce A.

1. Réactions chimiques d'ordre 1 par rapport à tous les réactifs.
   (a) Pour une réaction du type $A \to B$, cela correspond à une équation différentielle du style
   $$-\frac{da}{dt} = ka^1 = \frac{db}{dt}.$$
   Résoudre l'équation différentielle en a en fonction de la concentration initiale a_0 de l'espèce A et donner la concentration de l'espèce b en fonction du temps.
   (b) Pour une réaction du type $A + B \to C$, cela correspond à une équation différentielle du style
   $$-\frac{da}{dt} = -\frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt} = kab.$$
   En utilisant le bilan de matière, écrire une équation différentielle en a uniquement qui dépendra de $\lambda_0 := b_0 - a_0$. Donner ensuite la solution générale de cette équation différentielle. Attention, il faudra discuter suivant les valeurs de λ_0.
2. Réaction chimique $A \to B$ d'ordre α par rapport à tous les réactifs. Cela correspond à une équation différentielle du style
   $$-\frac{da}{dt} = ka^\alpha = \frac{db}{dt}.$$
   Résoudre l'équation différentielle en a en fonction de la concentration initiale a_0 de l'espèce A, pour $\alpha \neq 1$.

Exercice 2. Profil de température
On considère un problème à une dimension, avec l'axe vertical positif vers le bas, perpendiculaire au plan du sol. On étudie le profil de température dans ce sol, dont on maintient la température
- $T = 0$ à la profondeur $z = 0$
- et $T = T_1 > 0$ à la profondeur $z = L$.

On installe dans ce sol un système de chauffage qui fournit une quantité de chaleur R. L'évolution de la température dans le sol est alors donnée par l'équation différentielle suivante
$$\frac{d^2T}{dz^2} = R. \tag{1}$$
Résoudre cette équation différentielle, donner le profil de température en fonction de T_1, R et L et représenter graphiquement ce profil de température.

Exercice 3. On répand un engrais sur un champ. Une partie de cet engrais passe dans l'eau de la nappe phréatique sous forme de nitrates ; on note $q(t)$ la quantité de nitrates correspondant à cette partie. Ces nitrates se dissolvent ensuite dans l'eau, et on note $f(t)$ la quantité de nitrates dissous. On sait que les fonctions f et q vérifient les équations suivantes pour $t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
q'(t) &= -\alpha q(t) \qquad (2)\\
f'(t) &= \alpha q(t) - \beta f(t), \qquad (3)
\end{aligned}
$$

avec des constantes $\alpha > \beta > 0$. A l'instant $t = 0$, $q(0) = q_0$ et $f(0) = 0$. Déterminer la quantité maximale au cours du temps des nitrates dissous dans la nappe phréatique.

Exercice 4. Hauteur de la nappe phréatique

On effectue un forage dans une nappe phréatique confinée. On connaît l'expression qui relie le taux de variation de hauteur piézométrique h à une distance r du centre du forage, à la conductivité hydraulique K de l'aquifère, d'épaisseur b et au débit Q pompé dans le forage :

$$Q = 2\pi r b K \frac{dh}{dr}. \qquad (4)$$

On se donne également la hauteur piézométrique lorsque $r = r_w$, le rayon du forage :

$$h(r_w) = h_w.$$

Notons H la hauteur piézométrique initiale à l'équilibre avant le début du pompage. On appelle rayon d'influence du forage la valeur R telle que $h(R) = H$.

1. Trouver l'expression $h(r)$ de la hauteur piézométrique à la distance r du centre du forage, en fonction des caractéristiques de la nappe (b, K).
2. Trouver la valeur du rayon d'influence du forage R.
3. Pour l'application numérique, on prendra

$$H = 15 \text{ m}, h_w = 14 \text{ m}, r_w = 30 \text{ cm}, b = 13 \text{ m}, K = 5\,10^{-4} \text{ m/s}, Q = 10 \text{ l/s}.$$