Corrigé du TP2

10 avril 2019

Exercice 10

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $[0,1]$ et $F' = f$. Comme f est de classe C^1 sur cet intervalle, F y est de classe C^2. On effectue un développement de Taylor-Lagrange en 0 de F : pour tout $h \in [0,1]$, il existe $c_h \in]0,h[$ tel que

$$\begin{aligned} F(0+h) &= F(0) + F'(0) \cdot h + \frac{F''(c_h)}{2} \cdot h^2 \\ &= 0 + f(0) \cdot h + \frac{f'(c_h)}{2} \cdot h^2. \end{aligned}$$

   Ceci étant vrai en particulier pour $h = 1$, on note $c = c_1$ et c'est précisément l'énoncé : on a trouvé un $c \in]0,1[$ tel que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(0) + \frac{f'(c)}{2}.$$

2. (a) On a que

$$J(1) = 1 + \frac{0}{2} = 1 = \int_0^1 1\,dt,$$

   et

$$J(t) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \int_0^1 t\,dt,$$

   donc la méthode est au moins d'ordre 1.

   (b) Si l'on veut que le méthode soit au moins d'ordre 2, on doit avoir que $J(t^2) = \frac{1}{3}$, ce qui se reformule en $0 + \frac{2\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, et ainsi on doit avoir $\alpha = \frac{1}{3}$.

(c) On essaye de voir si l'on peut pousser jusqu'à l'ordre 3 : cela revient à demander l'égalité $J(t^3) = \frac{1}{4}$, qui se reformule en $0 + \frac{3(\frac{1}{3})^2}{2} = \frac{1}{4}$, elle-même équivalente à $\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$. Donc la méthode est finalement d'ordre 2.

3. On refait exactement comme lors de la première question, mais en poussant deux crans plus loin. On écrit ensuite, en faisant un développement de Taylor-Lagrange de f' en 0 : il existe un $d' \in]0, \frac{1}{3}[$ tel que

$$f'(0+\frac{1}{3}) = f'(0) + f''(0) \cdot \frac{1}{3} + \frac{f^{(3)}(d')}{2} \cdot \Big(\frac{1}{3}\Big)^2.$$

En injectant ceci dans l'égalité obtenue au début de cette question, on obtient que $|I(f) - J(f)|$ est égal à, puis majoré par :

$$\begin{aligned}
&= \Big| f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{f''(0)}{6} + \frac{f^{(3)}(d)}{24} - \Big[f(0) + \frac{1}{2}\Big(f'(0) + f''(0) \cdot \frac{1}{3} + \frac{f^{(3)}(d')}{2} \cdot \Big(\frac{1}{3}\Big)^2 \Big) \Big] \Big| \\
&= \Big| \frac{f^{(3)}(d)}{24} - \frac{f^{(3)}(d')}{36} \Big| \\
&\leq 3 \cdot \Big| \frac{f^{(3)}(d)}{72} \Big| + 2 \cdot \Big| \frac{f^{(3)}(d')}{72} \Big| \\
&\leq \frac{5}{72} \cdot \sup_{x \in [0,1]} |f^{(3)}(x)|.
\end{aligned}$$

4. C'est la formule du changement de variable avec $\varphi(t) = a + th$: on a

$$\int_a^{a+h} f(t)\,dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t)\,dt = \int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = h \int_0^1 f_h(t)\,dt,$$

avec $f_h(t) = f(\varphi(t)) = f(a + ht)$.

5. À f, a et h fixés, il nous faut approcher d'après la question précédente h fois l'intégrale de f_h (fonction qui dépend de a et de h) sur $[0,1]$. La méthode J faisant ça très bien, on propose $J_{a,h}(f) = h \cdot J(f_h)$. Elle est exacte pour les polynômes de degré au plus 2, car si f est une telle fonction, f_h l'est aussi, et car J est déjà d'ordre 2.

6. On a que, pour tout $f \in C^3([0,1])$,

$$|I_{a,h}(f) - J_{a,h}(f)| = |h \cdot I(f_h) - h \cdot J(f_h)| \leq \frac{5h^4}{72} \cdot \sup_{x \in [0,1]} |f^{(3)}(x)|$$

d'après l'avant-dernière question, et par le fait que

$$f_h^{(3)}(x) = h^3 f^{(3)}(a + xh).$$