Méthodes numériques

TD n° 1 - Interpolation polynomiale

Exercice 1

1) On considère les abscisses $x = [-2, 0, 1, 2]$ et $y = [4, 0, 0, 4]$. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation aux points x, y (justifiez votre réponse) ?

- $p_1(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{8}{3}x$
- $p_2(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}$
- $p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}x$

2) Représentez sur une même figure les points d'interpolation, ainsi que les polynômes p_1, p_2 et p_3 respectivement en noir, vert et rouge, sur l'intervalle $[-2.5, 2.5]$.

Exercice 2

1) Montrez qu'il existe une infinité de polynômes de degré 2 dont le graphe passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

2) Montrez qu'il n'existe pas de polynôme de degré 2 passant par les points $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 15)$ et $(3, 40)$.

Exercice 3

1) Calculez les polynômes d'interpolation aux points suivants :

a) $x = [-1, 2, 3]$ et $y = [4, 4, 8]$

b) $x = [-2, -1, 0, 1]$ et $y = [0, -2, -4, 0]$

c) $x = [-1, 0, 1, 2]$ et $y = [6, 2, 0, 0]$

d) $x = [-1, 0, 1]$ et $y = [1, 0, 1]$

e) $x = [-3, -1, 2, 10]$ et $y = [-3, -1, 2, 10]$

2) Représentez graphiquement les polynômes des points a) et b), accompagnés des points d'interpolation correspondants.

Exercice 4

Soit p un polynôme. Montrez que son polynôme d'interpolation aux nœuds $x_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, est égal au reste de la division euclidienne de p par le polynôme $\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Exercice 5

Pour $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on considère la matrice

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

1) Montrez que $\det(V(x_0, \ldots, x_n)) = \prod_{(i,j),\, 0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

2) Soit $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe un unique polynôme $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $p(x_i) = y_i$ si et seulement si $x_i \neq x_j$ pour tout $(i, j), i \neq j$.

3) Écrire un programme `PolIntLag(Xint,Yint)` qui calcule les coefficients dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ du polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $X_{int} = (x_0, \ldots, x_n)$ et $Y_{int} = (y_0, \ldots, y_n)$, en utilisant la matrice V.

4) Écrire une fonction `EvalPol(Xpol,Coef)` qui retourne l'ensemble des valeurs prises par le polynôme $p(x) = Coef[0] + Coef[1]\,x + Coef[2]\,x^2 + \ldots + Coef[n]\,x^n$ aux points de $X_{pol} = (X_0, \ldots, X_M)$.

Exercice 6

Trouvez et représentez graphiquement le polynôme p de degré inférieur ou égal à 4 tel que

a) $p(-2) = 11, p(-1) = 1, p(0) = 1, p(1) = 5, p(2) = 31$

b) $p(-1) = 1, p'(-1) = -1, p(0) = 0, p(1) = 1, p'(1) = 1.$

Exercice 7

Soit $x_0, \ldots, x_n$ (n+1) réels distincts deux à deux. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note

$$L_k(x) = \prod_{j \in \{0,\ldots,n\}, j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

le k-ième polynôme de Lagrange.

1) Montrez que L_k est un polynôme de degré n vérifiant $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ pour tout $k,\ i \in \{0, \ldots, n\}$.

2) En déduire que la famille de polynôme $\{L_k\}_{k \in \{0,\ldots,n\}}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Écrire une fonction `PolLagrange(Xpol,Xint,k)` qui calcule les valeurs prises par le k-ième polynôme de la base de Lagrange associé aux abscisses $X_{int} = (x_0, \ldots, x_n)$, en les points $X_{pol} = (X_0, \ldots, X_M)$.

4) Écrire une fonction `PolIntLag2(Xpol,Xint,Yint)` qui calcule les valeurs prises aux points $X_{pol} = (X_0, \ldots, X_M)$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange aux abscisses $X_{int} = (x_0, \ldots, x_n)$ et $Y_{int} = (y_0, \ldots, y_n)$.

Exercice 8 (examen 2016)

Soient $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n$ et des réels donnés $y_i, 0 \leq i \leq n$. On considère le polynôme d'interpolation satisfaisant

$$P(x_0) = y_0, \quad P(-x_i) = P(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq n.$$

1) Montrez que le polynôme P est pair. *Indication : on pourra écrire P dans la base de Lagrange*

2) En déduire en un minimum de calculs le polynôme d'interpolation vérifiant $P(-1) = 2, P(0) = 4, P(1) = 2.$

Exercice 9 (examen 1999)

1) Calculez le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = x\,(x^2 - 1)$ relativement aux points $x_0 = -1, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

2) Même question en rajoutant le point $x_3 = -2$.

Exercice 10 (partiel 2003)

1) Rappelez l'expression de la base de Newton de $\mathbb{R}_5[X]$ associée aux noeuds 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Montrez qu'il s'agit bien d'une base.

3) Donnez, dans cette base, l'expression du polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $P(1) = P(6) = 1$ et $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 0$.

4) Calculez $P(0)$.

5) Représentez graphiquement ce polynôme sur le segment $[0, 7]$, ainsi que les points d'interpolation.

Exercice 11 (Base de Newton)

1) Ecrire une fonction evalpolyNew(X,DD,x) qui évalue en x un polynôme écrit dans la base de Newton. X est la liste des abcisses et DD la liste des différences divisées correspondantes.

2) Ecrire une fonction diffdiv(X,DD,nx,nv) de mise à jour des différences divisées (DD) par ajout d'une nouvelle abscisse nx et d'une nouvelle valeur d'interpolation nv. La fonction donnera la nouvelle liste des abscisses nX avec nx en première position suivi de la liste X (utiliser pour cela la commande somme de listes) et la nouvelle liste des différences divisées nDD relatives à nX.

3) Ecrire une fonction vtodiffdiv(X,Y) qui calcule les différences divisées DD relatives aux abscisses X et aux valeurs Y associées. On utilisera pour ça la fonction précédente diffdiv.

4) Ecrire une fonction diffdivg(X,DD,nx,nv) qui réalise la mise à jour d'un polynôme d'interpolation écrit dans la base de Newton lorsqu'un nouveau point d'interpolation (nx, nv) est ajouté et un ancien point d'interpolation est supprimé (interpolation glissante). Le polynôme est donné par la liste X des abscisses et la liste DD des différences divisées correspondantes. On supprime les derniers éléments des listes X et DD. La fonction diffdivg(X,DD,nx,nv) donne la nouvelle liste nX des abscisses constituée de nx complété par la liste X privée de sa dernière valeur ainsi que la nouvelle liste nDD des différences divisées relatives à nX. La fonction diffdivg s'obtient facilement à partir de la fonction diffdiv en modifiant quelques instructions.

Exercice 12 (partiel 2014)

Étant donnés six réels x_1, a, b, c, d et e, on considère le tableau de différences divisées suivant :

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_0 = 0$	1			
		1		
x_1	-1		d	
		b		$\frac{2}{3}$
$x_2 = -1$	0		e	
		c		
$x_3 = 2$	a			

1) Calculez x_1, a, b, c, d et e.

2) Donnez, dans la base de Newton, le polynôme P_3 qui interpole $(0, 1)$, $(x_1, -1)$, $(-1, 0)$ et $(2, a)$.

3) On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} 2 + 9x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad f_2 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq -1 \\ -3x^2 - x^3 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour α et β deux réels, on définit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$. Montrez que P_3 est le polynôme d'interpolation de f en x_0, x_1, x_2 et x_3 si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

À partir de maintenant, on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

4) Calculez dans la base de Newton le polynôme P_4 qui interpole les points $(0, 1)$, $(x_1, -1)$, $(-1, 0)$, $(2, a)$ et $(1, 6)$. P_4 est-il le polynôme d'interpolation à f en 0, x_1, -1, 2 et 1 ?

Exercice 13

Soit p_n le polynôme d'interpolation de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ relativement aux noeuds $x1, \ldots, x_n$ pris deux à deux distincts dans un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$.

1. Montrez que pour tout $x \in [a, b]$,
$$|p_n(x) - \sin(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!}.$$
2. En déduire que la suite (p_n) converge vers la fonction $\sin(x)$ uniformément sur $[a, b]$.
3. Application numérique : on prend $a = 0$ et $b = 2\pi$. Représentez sur un même graphique la fonction $\sin(x)$ et le polynôme d'interpolation à cette fonction en n points choisis aléatoirement entre 0 et 2π, pour $n = 3, 6, 9$ et 12.

Exercice 14

On considère $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et le polynôme d'interpolation tel que $P_n(x_i) = e^{x_i}$, $0 \leq i \leq n$. Montrer que la suite de polynômes d'interpolation P_n converge uniformément vers la fonction exponentielle lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 15

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1 + 25\, x^2}$.

1) On choisit, pour interpoler la fonction f, n abscisses equidistribuées sur $[-1, 1]$. Tracez sur un même graphique, sur $[-1, 1]$, la fonction f, les points d'interpolation et le polynôme d'interpolation correspondant, pour $n = 5$, 10, 15 et 20. Que remarquez-vous ?

2) Même question, mais cette fois en choisissant $X_{int} = (x_0, \dots, x_n)$ avec $x_i = \cos\left(\pi \dfrac{i}{n}\right)$, $i = 0, \dots, n$.

Que remarquez-vous ?

Exercice 16

On reprend la fonction f de l'exercice précédent. On voit que si on ne choisit pas correctement les abscisses d'interpolation sur $[-1, 1]$, des oscillations apparaissent (phénomène de Runge), et le polynôme d'interpolation ne converge pas vers la fonction f.

Pour contrer cela, on se propose non plus de faire de l'interpolation polynomiale, mais de l'interpolation polynomiale par morceau, c'est-à-dire :

- on découpe l'intervalle $[-1, 1]$ en N sous-intervalles de même longueur
- sur chaque sous-intervalle, on interpole la fonction f en utilisant n abscisses équidistribuées

Écrire un programme dessinant la fonction f et son interpolé par morceaux. Le tester pour différentes valeurs de N et n.