Corrigé du TD 1

Florian Bertuol

10 avril 2019

Exercice 3

1.

On cherche une équation cartésienne du plan

$$(P_1)\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2\lambda+3\mu \\ y & = & -2+\lambda+\mu \\ z & = & 4-\lambda-2\mu \end{array}\right., (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Une telle équation est de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec a,b,c et d non-tous nuls. On dispose de plusieurs méthodes pour déterminer des a,b,c et d convenables :

1. On choisit trois points non-alignés de P_1 et on résout le système obtenu en substituant à x,y et z leurs coordonnées. On peut par exemple prendre $(1,-2,4)$, $(-1,-1,3)$ et $(4,-1,2)$ qui correspondent respectivement aux choix de paramètres $\lambda=\mu=0$, $\lambda=1,\mu=0$ et $\lambda=0,\mu=1$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-2b+4c+d & = & 0 \\ -a-b+3c+d & = & 0 \\ 4a-b+2c+d & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-2b+4c+d & = & 0 \\ -3b+7c+2d & = & 0 \\ 7b-14c-3d & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-2b+4c+d & = & 0 \\ -3b+7c+2d & = & 0 \\ 7c+5d & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{d}{7} \\ b & = & -d \\ c & = & -\frac{5d}{7} \end{array}\right. .$$

Pour $d=7$, on obtient $(P_1) - x - 7y - 5z + 7 = 0$.

2. On choisit un point O de P_1, une base $(\vec{u},\vec{v})$ de $\vec{P_1}$ et on utilise le fait que

$$M \in P_1 \iff \overrightarrow{OM} \in P_1 \iff \det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{OM}) = 0.$$

On peut par exemple prendre $O(1,-2,4)$ qui correspond au choix de paramètres $\lambda = \mu = 0$, et $\vec{u} = (-2,1,-1)$, $\vec{v} = (3,1,-2)$ que l'on lit directement dans le système. Alors :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{OM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} -2 & 3 & x-1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ -1 & -2 & z-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -2((z-4)+2(y+2)) - (3(z-4)+2(x-1)) - (3(y+2)-(x-1)) = 0$$
$$\iff -x-7y-5z+7 = 0.$$

On obtient à nouveau $(P_1)\ -x-7y-5z+7=0$.

2.

On cherche une représentation parémétrique de $P_2 \cap P_3$, avec

$$(P_2)\ 2x-y+3z-1=0,\ (P_3)\ x+2z-4=0.$$

On a les équivalences suivantes :

$$(x,y,z) \in P_2 \cap P_3 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x-y+3z-1 & = & 0 \\ x+2z-4 & = & 0 \\ z & = & \lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4-2\lambda \\ y & = & 7-\lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R},$$

ce dernier système étant une représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$. On aurait aussi pu déterminer deux points A et B de $P_2 \cap P_3$, puis écrire une paramétrisation de la droite $(AB) = A + \mathrm{vect}(\overrightarrow{AB})$.

3.

C'est la même méthode que employée pour la question 1) : on détermine des a,b,c et d convenables en substituant à x,y et z les coordonnées des points A,B et C, et en résolvant le système obtenu. On obtient commes équations cartésiennes celles de la forme $7\alpha x + 3\alpha y - 2\alpha z - 7\alpha = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

4.

On cherchel à déterminer $d_1 \cap P_2$, avec

$$d_1 \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3-\lambda \\ y & = & 1+2\lambda \\ z & = & -1+\lambda \end{array} \right. ,\lambda \in \mathbb{R}, \quad (P_2)\ 2x-y+3z-1=0.$$

On résout ainsi le système

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 3-\lambda \\ y & = & 1+2\lambda \\ z & = & -1+\lambda \\ 2x-y+3z-1 & = & 0 \end{array} \right. ,\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 3-\lambda \\ y & = & 1+2\lambda \\ z & = & -1+\lambda \\ 2(3-\lambda)-(1+2\lambda)+3(-1+\lambda)-1 & = & 0 \end{array} \right. ,\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 3-\lambda \\ y & = & 1+2\lambda \\ z & = & -1+\lambda \\ 2(3-\lambda)-(1+2\lambda)+3(-1+\lambda)-1 & = & 0 \end{array} \right. ,\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 0 \\ \lambda & = & 1 \end{array} \right. .$$

On trouve donc que $d_1 \cap P_2 = \{(2,3,0)\}$.

5.

On utilise la deuxième méthode de la question 1) : il nous faut déterminer un point du plan du plan affine ainsi que deux vecteurs donnant une base de sa direction. Or l'énoncé nous dit que ce plan :

— contient d_1, donc il contient le point $(3,1,-1)$ et sa direction contient le vecteur $(-1,2,1)$,

— est "parallèle" à d_2 (la notion de parallélisme vue en cours dit que deux sous-espaces affines sont parallèles s'ils ont la même direction : ici la direction du plan qui est un s.e.v. de dimension 2 ne peut pas être égale à la direction de la droite que est un s.e.v. de dimension 1, et il faut plutôt lire "faiblement parallèles", c'est-à-dire que la direction du plan contient la direction de la droite), donc sa direction contient $(3,-2,5)$.

Comme $(-1,2,1)$ et $(3,-2,5)$ sont libres, ils forment bien une base de la direction du plan cherché. Une de ses équations cartésiennes sera donc :

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & x-3 \\ 2 & -2 & y-1 \\ 1 & 5 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \iff 12x + 8y - 4z - 48 = 0 \iff 3x + 2y - z - 12 = 0.$$

6.

Pour déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$, on utilise les questions 1) et 2) : comme une équation cartésienne de P_1 est donnée par $(P_1) - x - 7y - 5z + 7 = 0$ et qu'une représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$ est donnée par

$$P_2 \cap P_3 \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4-2\lambda \\ y & = & 7-\lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R},$$

l'intersection est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 4-2\lambda \\ y & = & 7-\lambda \\ z & = & \lambda \\ -x-7y-5z+7 & = & 0 \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -19 \\ y & = & -\frac{9}{2} \\ z & = & \frac{23}{2} \\ \lambda & = & \frac{23}{2} \end{array} \right. .$$

On trouve donc que $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{(-19, -\frac{9}{2}, \frac{23}{2})\}$.

7.

Il suffit d'écrire (AB) sous forme paramétrée, et on est ramenés à la méthode de l'exercice 4). Comme $(AB) = A + \overrightarrow{AB}$, une paramétrisation est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+\lambda \\ y & = & 2-3\lambda \\ z & = & 3-\lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}.$$

On trouve $P_2 \cap (AB) = \{(-3,14,7)\}$.

8.

On cherche la droite passant par A, parallèle à P_2 et coupant d_1. Cette droite est donc contenue dans le plan passant par A et de direction $\vec{P_2}$: si l'on détermine l'intersection I de ce plan avec d_1, on aura deux points de notre droite (A et I) et on pourra expliciter la paramétrisation $(AI) = A + \mathrm{vect}(\overrightarrow{AI})$.

Le plan passant par A et de direction $\vec{P_2}$ a une équation cartésienne de la forme $2x - y + 3z + d = 0$ (car $\vec{P_2} = \{2x - y + 3z = 0\}$). Pour déterminer d, on utilise le fait que A appartient à ce plan : on a donc

$$2 \times 1 - 2 + 3 \times 3 + d = 0 \iff d = -9.$$

L'intersection de ce plan avec d_1 est donc donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 3 - \lambda \\ y & = & 1 + 2\lambda \\ z & = & -1 + \lambda \\ 2x - y + 3z + 9 & = & 0 \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -8 \\ y & = & 23 \\ z & = & 10 \\ \lambda & = & 11 \end{array} \right. .$$

Donc on trouve $I(-8, 23, 10)$. Ainsi $\overrightarrow{AI}(-9, 21, 7)$, et une paramétrisation de (AI) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 - 9\lambda \\ y & = & 2 + 21\lambda \\ z & = & 3 + 7\lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}.$$

9.

On cherche une équation cartésienne du plan passant par C et contenant d_1. On utilise encore la deuxième méthode de la question 1) : il nous faut déterminer un point du plan affine ainsi que deux vecteurs donnant une base de sa direction. L'énoncé nous dit que ce plan contient C, et qu'il contient d_1, donc sa direction contient la direction de d_1, $\text{vect}(-1, 2, 1)$. Il nous faut compléter la base de la direction : pour cela, on trouve un point P de d_1, et on considère le vecteur $\overrightarrow{CP}$. On peut par exemple choisir $P(3, 1, -1)$, qui correspond au choix de paramètres $\lambda = \mu = 0$. Ainsi $\overrightarrow{CP}(3, 0, 1)$, et une équation cartésienne du plan est donnée par

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & x \\ 2 & 0 & y - 1 \\ 1 & 1 & z + 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x + 4y - 6z - 16 = 0.$$

Exercice 7

1.

La partie linéaire $\vec{f}$ est donnée par la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme on vérifie que $A^2 = A$, $\vec{f}$ est bien une projection. Déterminons ses éléments caractéristiques, c'est-à-dire son noyeau et son image. Ici, comme $\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{2}(y+z, y+z, y+z)$, on voit que $\ker \vec{f}$ est le plan P d'équation cartésienne $y+z = 0$, et que $\operatorname{im}\vec{f}$ est la droite d donnée par $\operatorname{vect}((1,1,1))$. Donc $\vec{f}$ est la projection sur d parallèlement à P (si on n'est pas dans une situation où l'on peut repérer « à vue » le noyau et l'image de $\vec{f}$, on les cherche comme les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 1 avec la méthode habituelle). Si f était une projection *affine*, elle fixerait par construction tous les points d'une droite affine de direction d. Cherchons alors un point fixe :

$$f(x,y,z) = (x,y,z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(y+z+3) & = & x \\ \frac{1}{2}(y+z+5) & = & y \\ \frac{1}{2}(y+z+7) & = & z \end{array} \right. ,$$

et les deux dernières équations donnant $y = z+5$ et $z = y+7$, on voit que le système n'admet aucune solution. Donc f n'est pas une projection affine.

2.

On prendra ici τ comme étant la translation de vecteur $(-3,-3,-3)$ (c'est le seul choix qui fait de $f \circ \tau$ une projection affine, comme vous pouvez le vérifier).

L'application $f \circ \tau$ est d'application linéaire associée $\vec{f} \circ \vec{\tau}$, c'est à dire la projection déterminée précédemment composée avec l'identité. Cherchons si cette fois-ci elle admet un point fixe, auquel cas on aura identifié la projection sur la droite affine passant par ce point fixe de direction d, parallèlement à P :

$$f \circ \tau(x,y,z) = (x,y,z) \Longleftrightarrow f(x-3, y-3, z-3) = (x,y,z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(y+z-3) & = & x \\ \frac{1}{2}(y+z-1) & = & y \\ \frac{1}{2}(y+z+1) & = & z \end{array} \right. .$$

Les deux dernières équations étant équivalentes à $y - z + 1 = 0$, on trouve qu'un point (x, y, z) est fixe si et seulement si il vérifie

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda - 2 \\ y & = & \lambda - 1 \\ z & = & \lambda \end{array}\right. , \lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (x, y, z) \in (2, 1, 0) + d.$$

Ceci nous indique donc que $p = f \circ \tau$ est la projection sur cette droite que l'on vient de déterminer, parallèlement à la direction P. On en déduit au passage que $f = p \circ \tau^{-1}$ est une projection glissée.