Corrigé du TD 2

Florian Bertuol

10 avril 2019

Exercice 6

On ne lira pas « orthonormé » dans l'énoncé (c'est dans la feuille de TD 3 qu'on commence à considérer ces repères).

— (A, B, C) est un repère du plan si et seulement si $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de sa direction (ou encore si $(\vec{BA}, \vec{BC})$ ou $(\vec{CA}, \vec{CB})$ en sont : choisissez toujours l'origine qui donne les calculs les plus simples possibles, par exemple si $A = (0, 0)$, on choisira A). Ici, $\vec{AB} = (-4, 1)$ et $\vec{AC} = (-3, 0)$ forment bien une base du plan vectoriel, donc (A, B, C) est un repère affine.

— Pour calculer P, on peut utiliser deux méthodes : se ramener à un repère affine à l'aide d'une formule équivalente du barycentre, ou en regardant directement ce qu'être un barycentre impose sur les coordonnées. On va faire les deux :

Méthode 1 : Par définition du barycentre, on a

$$\vec{AP} = \frac{1}{6}\vec{AA} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

(on part de la définition « classique » qui assure que P vérifie que $\frac{1}{6}\vec{PA} + \frac{1}{3}\vec{PB} + \frac{1}{2}\vec{PC} = \vec{0}$, et l'on fait apparaître des A au milieu de chacuns de ces vecteurs par la relation de Chasles : notez qu'il est possible de faire ça avec n'importe quel point M, et verifiez que les deux formules sont en fait équivalentes à être barycentre pondéré des points). Donc P est le point de coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ dans le repère affine (A, B, C). On le calcule pour terminer :

$$P = A + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = (3, 1) + \frac{1}{3}(-4, 1) + \frac{1}{2}(-3, 0) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}).$$

Méthode 2 : Comme P vérifie l'égalité

$$\frac{1}{6}\vec{PA}+\frac{1}{3}\vec{PB}+\frac{1}{2}\vec{PC}=\vec{0},$$

alors les coordonnées de P dans un repère affine $\mathcal{R}$ de base associée $\mathcal{B}$ (ex : $\mathcal{R}=(A,B,C)\leftrightarrow\mathcal{B}=(\vec{AB},\vec{AC})$), que je note $[P]_{\mathcal{R}}$ ($[\vec{AP}]_{\mathcal{B}}$), vérifient

$$\frac{1}{6}[\vec{PA}]_{\mathcal{B}}+\frac{1}{3}[\vec{PB}]_{\mathcal{B}}+\frac{1}{2}[\vec{PC}]_{\mathcal{B}}=[\vec{0}]_{\mathcal{B}}=0,$$

ou encore

$$[P]_{\mathcal{R}}=\frac{1}{6}[A]_{\mathcal{R}}+\frac{1}{3}[B]_{\mathcal{R}}+\frac{1}{2}[C]_{\mathcal{R}}.$$

Ce n'est rien d'autre que la formule classique que vous connaissez déjà pour les milieux : le milieu de deux points de coordonnées (a,b) et (c,d) est de coordonnées $(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2})$ *(Vous venez de voir comment on l'établit : on fixe un repère affine pour avoir un isomorphisme affine avec un espace $\mathbb{R}^n$, sur lequel on a par définition de la structure affine canonique $\vec{xy}:=y-x$, pour isoler le vecteur de coordonnées de P dans ce repère)*. Ici, si l'on prend comme repère $\mathcal{R}$ le repère standard de l'énoncé, on a que les coordonnées de P dans ce repère sont

$$\frac{1}{6}(3,1)+\frac{1}{3}(-1,2)+\frac{1}{2}(0,1)=(\frac{1}{3},\frac{4}{3}).$$

On fait pareil pour Q.

— Ici, utilisez la formule équivalente du barycentre que l'on vient de voir ci-dessus.

— On veut calculer un barycentre de barycentres : on utilise l'associativité, en étant précautionneux avec les poids.

Exercice 7

1.

De même qu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base (n vecteurs en dimension n), une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine ($n+1$ points en dimension n). Commençons par vérifier que l'unique application affine qui envoie A sur A, B sur D et C sur C envoie bien D sur B. On commence par déterminer les coordonnées de D dans le repère affine (A,B,C) :

$$\vec{AD} = (0,1) = -(2,0) + (2,1) = -\vec{AB} + \vec{AC}.$$

Puis, comme

$$f(D) = f(A+\vec{AD}) = f(A-\vec{AB}+\vec{AC}) = f(A) - \vec{f}(\vec{AB}) + \vec{f}(\vec{AC}) = A - \vec{AD} + \vec{AC}$$

par construction de f (c'est-à-dire qu'on a utilisé que $\vec{f}(\vec{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{AD}$, par exemple), et que

$$A - \vec{AD} + \vec{AC} = (0,0) - (0,1) + (2,1) = (2,0) = D,$$

il existe bien une application affine f vérifiant ce qui est demandé.

2.

Juste une remarque pour cette question : on note par $\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$ l'isobarycentre de A, B, C et D (à nouveau, on n'est pas en train d'ajouter des points, c'est une notation !). On ne l'emploie que lorsque la somme des coefficients vaut 1, et c'est justifié par le travail qu'on a effectué lors de la méthode 2 ci-dessus).

3.

Comme $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \neq B$, et qu'on a vu en 1. qu'une application qui vérifie ce qui est demandé pour les trois premiers points envoie nécessairement D sur B, une telle application ne saurait exister.