Corrigé du TD3

Florian Bertuol

24 avril 2019

1 Angles

Exercice 1.

1.

On trouve par le calcul que :

— $||\vec{u}_1|| = ||\vec{u}_2|| = \sqrt{5}$, $||\vec{u}_3|| = \sqrt{17}$,

— $||\vec{v}_1|| = 3$, $||\vec{v}_2|| = 3\sqrt{2}$, $||\vec{v}_3|| = 2\sqrt{17}$,

— $\langle \vec{u}_1, \vec{v}_1 \rangle = 6$, $\langle \vec{u}_1, \vec{v}_2 \rangle = -9$, $\langle \vec{u}_1, \vec{v}_3 \rangle = 14$, $\langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle = -3$, $\langle \vec{u}_2, \vec{v}_2 \rangle = -3$, $\langle \vec{u}_2, \vec{v}_3 \rangle = -12$, $\langle \vec{u}_3, \vec{v}_1 \rangle = -12$, $\langle \vec{u}_3, \vec{v}_2 \rangle = 9$, $\langle \vec{u}_3, \vec{v}_3 \rangle = -34$,

— $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = -2$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}_2) = 3$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}_3) = 12$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v}_1) = 6$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v}_2) = -9$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v}_3) = 14$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_3, \vec{v}_1) = 3$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_3, \vec{v}_2) = -15$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_3, \vec{v}_3) = 0$.

2.

— Comme $\cos(\theta_1) = \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_1 \rangle}{||\vec{u}_1|| \cdot ||\vec{v}_1||} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et que $\sin(\theta_1) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}_1)}{||\vec{u}_1|| \cdot ||\vec{v}_1||} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot 3} < 0$, on en déduit que $\theta_1 = -\arccos(\cos(\theta_1)) = -\arccos(\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

— Comme $\cos(\theta_2) = \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_2 \rangle}{||\vec{u}_2|| \cdot ||\vec{v}_2||} = \frac{-3}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ et que $\sin(\theta_2) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v}_2)}{||\vec{u}_2|| \cdot ||\vec{v}_2||} = \frac{-9}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} < 0$, on en déduit que $\theta_2 = -\arccos(\cos(\theta_2)) = -\arccos(-\frac{\sqrt{10}}{10})$.

— Comme $\cos(\theta_3) = \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{v}_3 \rangle}{||\vec{u}_3|| \cdot ||\vec{v}_3||} = \frac{-34}{\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17}} = -1$, on en déduit que $\theta_3 = \pi$.

Exercice 2.

1.

On voit que $\overrightarrow{AB} = (4,4,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-3\sqrt{2}-2, 3\sqrt{2}-2, 2)$ et $\overrightarrow{BC} = (-3\sqrt{2}-6, 3\sqrt{2}-6, 6)$, d'où par le calcul :

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -24, \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \rangle = 72, \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 72.$$

2.

Comme $||\overrightarrow{AB}|| = 4\sqrt{3}$, $||\overrightarrow{AC}|| = 4\sqrt{3}$ et $||\overrightarrow{BC}|| = 12$, on en déduit que

$$\widehat{ABC} = \arccos\Big(\frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{||\overrightarrow{BA}|| \cdot ||\overrightarrow{BC}||}\Big) = \arccos\Big(\frac{72}{4\sqrt{3} \cdot 12}\Big) = \arccos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{\pi}{6},$$

$$\widehat{BCA} = \arccos\Big(\frac{\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \rangle}{||\overrightarrow{CB}|| \cdot ||\overrightarrow{CA}||}\Big) = \arccos\Big(\frac{72}{12 \cdot 4\sqrt{3}}\Big) = \arccos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{\pi}{6},$$

$$\widehat{CAB} = \arccos\Big(\frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle}{||\overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{AB}||}\Big) = \arccos\Big(\frac{-24}{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}\Big) = \arccos\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{2\pi}{3}.$$

3.

On vérifie bien que $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

Exercice 3.

1.

1. On a que $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \rangle = ||\overrightarrow{BA}||^2 - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle > 0$ par hypothèse. Le même raisonnement montre que $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle > 0$.
2. On vient de montrer que si ABC était obtus en A, alors il était aigu en B et en C. En faisant le même raisonnement en B et en C, on montre qu'un triangle possède au plus un angle obtus.

2.

1. On a que $BC^2 = \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} \rangle = BC \cdot BA \cdot \cos(\beta) + CB \cdot CA \cdot \cos(\gamma)$. En divisant par BC de part et d'autre, on a l'égalité recherchée.

2. On a que $0 = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -BA \cdot BC \cdot \sin(\beta) + CB \cdot CA \cdot \sin(\gamma)$. En divisant par $-BC$ de part et d'autre, on obtient l'égalité recherchée.
3. On a alors :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (AB\cos(\beta) + AC\cos(\gamma))^2 \\ &= AB^2\cos^2(\beta) + AC^2\cos^2(\gamma) + 2AB \cdot AC\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ &= AB^2\cos^2(\beta) + AC^2\cos^2(\gamma) + 2AB \cdot AC[\cos(\beta+\gamma) + \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)] \\ &= AB^2\cos^2(\beta) + AC^2\cos^2(\gamma) + 2AB \cdot AC \cdot \cos(\beta+\gamma) + AB^2\sin^2(\beta) + AC^2\sin^2(\gamma) \\ &= AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos(\beta+\gamma), \end{aligned}$$

ce qui était demandé.

3.

Il suffit de développer

$$\begin{aligned} BC^2 &= \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \rangle \\ &= AB^2 + AC^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

4.

Des deux égalités établies, on obtient $\cos(\beta+\gamma) = -\cos(\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$. Par hypothèse, $0 < \beta + \gamma \leq \pi$ et $0 < \pi - \alpha \leq \pi$, donc appliquer la fonction arccos de chaque côté de l'égalité donne

$$\beta + \gamma = \pi - \alpha \iff \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Isométries vectorielles

Exercice 4.

1. On obtient dans l'ordre les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Les matrices orthogonales sont la seconde et la troisème.
   (a) $\det M_2 = 1, \det M_3 = -1$,
   (b) Pour M_2, on reconnaît dès à présent une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$: elle n'accepte donc ni valeur propre ni vecteur propre. Pour M_3, on sait qu'il s'agit d'une reflexion orthogonale, il nous faut donc déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et un vecteur propre associé à la valeur propre -1. Un calcul donne $E_1 = \text{vect}((1, \sqrt{2}-1))$. Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme orthogonal sont orthogonaux, on sait sans calcul que $E_{-1} = \text{vect}((1-\sqrt{2}, 1))$.
   (c) On a donc que f_2 est la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{3}$, et que f_3 est la symétrie orthogonale vectorielle d'axe E_1.

Exercice 5.

1. (a) Calcul direct.
   (b) Idem.
   (c) On remarque que $x^2 + y^2 = ||\vec{u}||^2 = ||\vec{u}|| \cdot ||f(\vec{u})||$, et on voit donc que

$$\cos(\overline{\vec{u}f(\vec{u})}) = \frac{\langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle}{||\vec{u}|| \cdot ||f(\vec{u})||} = \cos(\theta), \sin(\overline{\vec{u}f(\vec{u})}) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}))}{||\vec{u}|| \cdot ||f(\vec{u})||} = \sin(\theta),$$

   d'où l'on déduit que $\overline{\vec{u}f(\vec{u})} = \theta$.
2. Ici il faut manipuler ses formules de trigonométrie, mais ce ne sont que des calculs.

3 Isométries affines

Exercice 6

1. Par définition, $t_{\vec{u}}(x, y) = (x, y) + (3, -2) = (x+3, y-2)$,
2. Par définition, $\rho_{(2,1),\frac{\pi}{4}}(x, y) = (2, 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}((x, y) - (2, 1))$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{2-3\sqrt{2}}{2}).$$

3. On commence par déterminer la matrice de la symétrie orthogonale vectorielle s d'axe $2x - 5y = 0$, soit $\mathrm{vect}((5,2))$: dans la base $\mathcal{B} = ((5,2),(-2,5))$, la matrice de la symétrie est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de $\vec{s}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ est donnée par la relation
$$[\vec{s}]_{\mathcal{C}} = \mathrm{Pass}(\mathcal{C},\mathcal{B})[\vec{s}]_{\mathcal{B}}\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{C}).$$
Comme $\mathrm{Pass}(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et que $\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathrm{Pass}^{-1}(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, on n'a plus qu'à trouver un point C de la droite affine $2x - 5y = 6$ (ce que l'on fait de suite : $C = (3,0)$ convient) et à expliciter
$$s(x,y) = C + \vec{s}(\overrightarrow{CM}) = (3,0) + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}((x,y)-(3,0)).$$
4. C'est pareil que ce qu'on vient de faire, à ceci près qu'il faut composer avec la translation de vecteur $(2,1)$ à la fin (pour les calculs, cela revient juste à ajouter 2 à la première composante et 1 à la seconde).

Exercice 7.

1. La matrice de F_1 dans la base canonique étant $M_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et celle de F_2 étant $M_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$, dont on vérifie qu'elles sont orthogonales, nous permettent de dire que F_1 et F_2 sont des isométries (car leurs applications linéaires associées sont des isométries vectorielles, ceci car leur matrice dans la base canonique - qui est orthonormée - est orthogonale...).
2. On vérifie que ni F_1 ni F_2 n'ont de points fixes.
3. On vérifie que les parties linéaires sont des symétries orthogonales (on a $M_1^2 = M_2^2 = I_2$ donc ce sont des symétries, et comme ce sont des isométries elles sont orthogonales). Mais comme les applications affines n'admettent pas de points fixes, ce sont des symétries glissées, c'est-à-dire des symétries orthogonales affines composées de translations suivant un vecteur directeur de leur axe affine. Pour déterminer ce vecteur (et par la même occasion le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de la symétrie orthogonale vectorielle), on commence par déterminer un point de l'axe affine de la symétrie orthogonale affine en prenant le milieu entre un point quelconque et l'image de ce point par l'application (faites un dessin). Par exemple, on a $F_1(0,0) = (-4,-2)$, donc $M = (-2,-1)$ est sur l'axe.

Puis, on regarde l'image de ce point par l'application : $M' = F_1(-2,-1) = (-\frac{18}{5}, -\frac{21}{5})$, et le vecteur $\overrightarrow{MM'} = (-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5})$ est le vecteur que l'on recherche (on vérifie par exemple que ce vecteur est un vecteur propre pour M_1 associé à la valeur propre 1). En étudiant ensuite la symétrie vectorielle comme précédemment, on a tous les éléments caractéristiques souhaités. Je vous laisse faire l'étude pour F_2.

Un contre-exemple que je devais à Tom :

On cherche une application vectorielle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans une certaine base est orthogonale, mais telle que l'application ne soit pas une isométrie (remarque : donc la base n'est pas orthonormée !). Il suffit de prendre pour f une symétrie non-orthogonale, par exemple la symétrie d'axe vect$((1,0))$ parallèlement à vect$((1,1))$. Dans la base $((1,0),(1,1))$, la matrice de cette application est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(qui est bien orthogonale), mais l'application n'est pas une isométrie (par exemple, $f(2,1) = (0,-1)$, et $\sqrt{5} = ||(2,1)|| \neq ||(0,-1)|| = 1$).