Espaces affines. Applications affines

Exercice 1. Montrer à l'aide de la définition d'un espace affine $\mathcal{E}$ que pour tout $A \in E$ et tout $u, v \in \overrightarrow{E}$,

$$(A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$$

Exercice 2. Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 2-a-b & a-b \end{pmatrix} ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère cartésien $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Soit les points

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

les droites

$$d_1 \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 - \lambda \\ y & = & 1 + 2\lambda \\ z & = & -1 + \lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}, \quad d_2 \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 3\mu \\ y & = & -2\mu \\ z & = & 3 + 5\mu \end{array} \right. , \mu \in \mathbb{R},$$

les plans

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y & = & -2 + \lambda + \mu \\ z & = & 4 - \lambda - 2\mu \end{array} \right. , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (P_2)\ 2x - y + 3z - 1 = 0, \quad (P_3)\ x + 2z - 4 = 0.$$

1. Donner une équation cartésienne de P_1.
2. Déterminer une représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant A, B et C.
4. Déterminer l'intersection de d_1 et de P_2.
5. Donner une équation cartésienne du plan Q contenant d_1 et parallèle à d_2.
6. Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
7. Déterminer l'intersection de P_2 avec la droite (AB).
8. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à P_2 et coupant d_1.
9. Donner une équation cartésienne du plan passant par C et contenant d_1.

Exercice 4. Montrer que dans $\mathbb{R}^2$, deux droites affines sont soit parallèles, soit elles se coupent en un unique point. Que se passe-t-il dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. Soit $A = (2, 1)$ et $B = (-1, 1)$ deux points de l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Déterminer les caractéristiques de la composée des deux homothéties $h_{A,1/2} \circ h_{B,3}$.

Exercice 6. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère cartésien (O, e_1, e_2), on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + y - 2 = 0$. Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ de direction $e_1 + e_2$.

Exercice 7. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien $(O; e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application affine définie analytiquement par :

$$f(x, y, z) = (1/2(y + z + 3), 1/2(y + z + 5), 1/2(y + z + 7)).$$

1. Montrer que la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une projection dont on déterminera les caractéristiques. L'application f est-elle une projection ?
2. Soit τ la translation de vecteur $(3, 3, 3)$. Identifier l'application $f \circ \tau$.

Exercice 8. Soit f l'application affine du plan qui envoie respectivement les points $A = (1,0)$, $B = (2,-1)$, $C = (1,1)$ sur les points $A' = (1,-1)$, $B' = (-1,-3)$ et $C' = (3,-1)$. Identifier f.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. Montrer que $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En déterminer un point et la direction.

Exercice 10. *Identité du parallélogramme.* Les points (A, B, C, D) forment un parallélogramme si, par définition, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Montrer qu'$(A, B, C, D)$ est un parallélogramme ssi

1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
   ou
2. les diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 11.
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E}$, on considère le plan H d'équation $x+y+z = 0$ et la droite D engendrée par $e_1 + e_2$. Posons $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 - e_2$ et $v_3 = e_1 - e_3$

1. Montrer que H et D sont deux sous-espaces supplémentaires.
2. En déduire que $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse P^{-1}.
4. Considérer la projection π sur le plan H de direction D. Donner la matrice de π dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{E}$.
   Soit H' le plan engendré par e_2 et v_3 et D' la droite vectorielle engendrée par v_2. Soit π' la projection sur H' de direction D'.
5. Calculer $\pi'(e_1)$ et $\pi'(v_1)$.
6. Donner la matrice de π' et de $f = \pi' \circ \pi$ dans la base $\mathcal{B}$.
7. Donner le rang de f et déterminer $Kerf$ et Imf.
8. Trouver deux sous-espaces vectoriels K et L de $\mathbb{R}^3$ tels que f soit la projection sur K de direction L.

Exercice 12. On considère une translation τ et une homothétie h d'un espace affine $\mathcal{E}$. En étudiant la partie linéaire et l'ensemble des points fixes, identifier les applications $f_1 = \tau \circ h \circ \tau^{-1}$, $f_2 = h^{-1} \circ \tau \circ h$ et $f_3 = \tau \circ h \circ \tau$.

Exercice 13. Soit $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par la formule

$$s(x, y, z) = (-2y + z - 2, -x - y + z - 2, -x - 2y + 2z - 2).$$

Déterminer la nature de cette application affine ainsi que ses caractéristiques.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. Supposons que $E = F \oplus G$, On note p la projection sur F parallèlement à G l'application définie par $p(u) = u_F$ pour tout $u = u_F + u_G \in E$.
1) Vérifier que p est une application linéaire.
2) Montrer que $p \circ p = p$.
3) Quel est le noyau de p ? Son image ? La projection p est-elle injective ? surjective ?
4) Vérifiez que l'application q telle que $p + q = \mathrm{Id}_E$, est aussi une projection. Quels sont ses éléments caractéristiques (image, noyau) ?
5) Soit p un endomorphisme tel que $p \circ p = p$. Montrer que p est un projecteur. (Il n'est pas nécessaire de supposer E de dimension finie).
6) Soit s un endomorphisme tel que $s \circ s = Id$. Montrer que s est une symétrie vectorielle. (On pourra introduire l'endomorphisme $p := 1/2(s + Id)$). Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 15. Soit $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application affine définie par la formule

$$p(x, y) = (2/3x + 1/3y + 2, 2/3x + 1/3y - 4).$$

1. Montrer que $p^2 = p$
2. Déterminer p géométriquement (points fixes, etc...).