2018-2019, L2 Géométrie, Feuille 2

Barycentres .

Exercice 1. Soit (A, B, C) un triangle du plan affine. Montrer que l'isobarycentre G du triangle (A, B, C) est le point de concours des trois médianes.

Exercice 2. (*Théorème de Thalès).*
Soient E un espace affine, H, H', H'' trois hyperplans de E, parallèles et distincts et D_1 et D_2 deux droites non faiblement parallèles à H. Soient A, A' et A'' les points d'intersection de D_1 avec H, H' et H'' respectivement, et B, B' et B'' les points d'intersection de D_2 avec H, H' et H'' respectivement. Montrer que

$$\frac{\overline{AA''}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BB''}}{\overline{BB'}}$$

Exercice 3. Soit P un plan affine muni d'un repère affine (A, B, C). Soit (α, β, γ) les coordonnées barycentriques d'un point M dans ce repère. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que :

a) le point M appartienne à la droite (AB)

b) le point M appartienne à la médiane issue de B du triangle ABC.

c) le point M soit sur la parallèle à (BC) passant par le milieu du segment $[A, B]$ (indication : théorème de Thalès).

Exercice 4. (*Théorème de Ménélaus.*) Soit dans un plan affine un triangle (A, B, C), et M, N, P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets A, B, C.

On considère la relation

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1 \tag{1}$$

4.1 On suppose M, N, P alignés.

Soient h_1 (resp. h_2) l'homothétie de centre M telle que $h_1(B) = C$ (resp. de centre N telle que $h_2(C) = A$). On désigne par α_1 (resp. α_2) le rapport de h_1 (resp. h_2).

a) Montrer que $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$ (raisonner par réduction à l'absurde) et en déduire que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie.

b) Montrer que le centre de $h_2 \circ h_1$ est le point P.

c) En explicitant α_1 et α_2, en déduire la relation (1).

4.2 Réciproquement, on suppose (1) vérifiée.

a) Montrer que (MN) et (AB) sont sécantes (en supposant (MN) et (AB) parallèles, considérer la projection de la droite (BC) sur la droite (AC) parallèlement à la droite (MN) et montrer que $A = B$).

b) En considérant le point Q d'intersection de (MN) et (AB) et les résultats du **4.1** montrer que $P = Q$ et en déduire que les ponts M, N, P sont alignés.

4.3 Enoncer le théorème ainsi démontré.

Exercice 5. (*Théorème de Céva.*) Soit dans un plan affine, A', B', C' trois points deux à deux distincts appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets A, B, C du triangle (ABC).

On considère la relation

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \tag{2}$$

5.1 On suppose que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles et soit p la projection de la droite (BC) sur la droite (AC) parallèlement à la droite (AA').

Montrer que

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}$$

De même en considérant une autre projection convenable montrer que

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}$$

et en déduire la relation (2).

5.2 On suppose que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point K.

a) En appliquant le théorème de Ménélaus au triangle (ACA') et la droite (BB') montrer que :

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{KA}}{\overline{KA'}} = +1$$

b) De même on a :

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{KA'}}{\overline{KA}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$$

c) En déduire la relation (2).

5.3 On suppose la relation (2) vérifiée.

a) On suppose (AA') et (BB') parallèles. Par le point C mener la parallèle à (AA') qui coupe (AB) en C''. Montrer alors en utilisant ce qui précède la relation

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1$$

En déduire que

$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \neq 1$$

En déduire que $C'' = C'$ et que finalement (CC') et (AA') sont parallèles.

b) On suppose (AA') et (BB') concourantes en un point K' et on désigne par C'' le point de concours de (CK') et (AB). En appliquant la première partie montrer que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1$$

et en déduire que

$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

En déduire que $C'' = C'$ et finalement que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ concourent au point K'.

5.4 Enoncer le théorème ainsi démontré.

Exercice 6. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points $A = (3, 1)$, $B = (-1, 2)$ et $C = (0, 1)$.

— Montrez que (A, B, C) est un repère affine du plan.

— Déterminez les points P et Q dont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) sont respectivement $(1/6, 1/3, 1/2)$ et $(1/2, 1/4, 1/4)$.

— Quelles sont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du point R dont les coordonnées cartésiennes dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $(2, 1)$?

— Donnez les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du barycentre $G = \mathrm{Bar}((P, 1), (Q, 2), (R, 5))$.

Exercice 7. On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Considérons les points suivants :

$$A = (0, 0),\ B = (2, 0),\ C = (2, 1)\ D = (0, 1).$$

1. Discuter l'existence d'une application affine $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(A) = A,\ f(B) = D,\ f(C) = C,\ f(D) = B.$$

2. Si une telle application existe, calculer $f(1/4A+1/4B+1/4C+1/4D)$.
3. Discuter l'existence d'une application affine f telle que

$$f(A) = A,\ f(B) = D,\ f(C) = C,\ f(D) = 1/2A + 1/2B.$$

Exercice 8. Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points : $A = (3, \sqrt{6}, 3)$, $B = (3, -\sqrt{6}, 3)$ et $C = (4, 0, 0)$.

1. (a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan P contenant O, A et B.
   (b) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.
   (c) Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires ?
2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C, c'est à dire, par définition l'unique point G de l'espace tel que : $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
   (b) En déduire les coordonnées de G.
3. (a) Montrer que la droite (GC) est perpendiculaire au plan P.
   (b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite (GC) avec le plan P.
4. Montrer que la transformation de l'espace définie par les formules : $(x' = x, y' = -y, z' = z)$ est une isométrie. Quels sont ses points fixes ? Déterminer les images des points O, A, B, C par cette isométrie. Que remarque-t-on ?

Exercices supplémentaires .

Exercice 9. On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Considérons les points suivants :

$$A = (2, 1),\ B = (4, 2),\ C = (3, 5)\ .$$

Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application qui à un point

$$M = Bar((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$$

où $\alpha+\beta+\gamma = 1$ associe

$$p(M) = ((A,\alpha+\gamma),(B,\beta))$$

Est-ce que p est une application affine ? Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ et l'image de l'origine par p. Montrer que $p \circ p = p$. Donner la matrice de p dans une base adaptée. Justifier.

Exercice 10. Considérons les points suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$A = (1,0,0),\ B = (0,1,0),\ C = (0,0,1),\ D = (0,0,0).$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application telle que pour chaque $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ on a $f(\alpha.A + \beta.B + \gamma.C + \delta.D) = \alpha.f(A) + \beta.f(B) + \gamma.f(C) + \delta.f(D)$ où $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$. On suppose que pour chaque couple de points différentes P et Q on a $P + f(Q) \neq Q + f(P)$ (ici, le signe + désigne la somme dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que f possède toujours un point fixe. Est-ce que ce point fixe est unique ?

Exercice 11. Dans un plan affine on considère les points A, B, C, D. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$,

ii) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$,

iii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

iv) $Bar((A,\frac{1}{2}),(D,\frac{1}{2})) = Bar((B,\frac{1}{2}),(C,\frac{1}{2}))$,

v) $D = Bar((A,-1),(B,1),(C,1))$,

Comment appelle-t-on le quadrilatère (A,B,C,D) ?

Exercice 12. Soit E un plan affine euclidien et A et B deux points distincts. L'ensemble $\{N \in E | \parallel \overrightarrow{NA} \parallel = \parallel \overrightarrow{NB} \parallel\}$ est appelé la médiatrice du segment $[A,B] = \{Bar((A,\alpha),(B,\beta)) | \alpha+\beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$.

1. Montrer que la médiatrice D de $[A,B]$ est une droite orthogonale à la droite (AB).

2. Montrer que le point de concours M de D et (AB) vérifie $M = Bar((A,\frac{1}{2}),(B,\frac{1}{2}))$. (*Autrement dit le milieux au sens affine du segment* $[A,B]$ *coïncide avec le milieux du même segment au sens métrique*).

Exercice 13. Soit E un plan affine euclidien et (A,B,C) un triangle. Soit $M = Bar((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$ où $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$.

1. Interpréter géométriquement ces conditions.

On désigne par a (resp. b, resp. c) l'aire du triangle (MBC) (resp. (MCA), resp. (MAB)).

2. Montrer que :

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

(*On pourra par exemple utiliser le produit vectoriel).*

Exercice 14. Soit E un plan affine euclidien et (A, B, C) un triangle. Montrer que les hauteurs du triangle sont concourantes.