Isométries

On suppose que E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. On suppose que $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par E et que $(O;\mathcal{B})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.

1 Angles

Rappel : étant donnés deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}\in E$, on a :

$$\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}|\vec{v}) = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\theta.$$

Exercice 1. On suppose que E est de dimension 2. pour $i\in\{1,2,3\}$, on considère les vecteurs $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_j$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont les suivantes :

$$\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{v}_1\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\quad \vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{v}_3\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}.$$

1. Pour $i\in\{1,2,3\}$, déterminer $\|u_i\|$, $\|v_i\|$, $\langle\vec{u}_i|\vec{v}_i\rangle$ et $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_i,\vec{v}_i)$.
2. Pour $i\in\{1,2,3\}$, on note θ_i le représentant dans $]-\pi,\pi]$ de l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}_i$ et $\vec{v}_i$. Déterminer $\cos(\theta_i)$ et $\sin(\theta_i)$. En déduire θ_i.

Exercice 2. On suppose que E est de dimension 3 et que $A,B,C\in\mathcal{E}$ sont trois points donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O;\mathcal{B})$:

$$A\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}6\\6\\-6\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad C\begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\3\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\left\langle\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}\right\rangle$, $\left\langle\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BA}\right\rangle$ et $\left\langle\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}\right\rangle$.
2. Déterminer les mesures en degrés des angles non orientés $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAB}$.
3. Vérifier que la somme vaut 180°.

Exercice 3. Considérons un triangle ABC contenu dans l'espace affine $\mathcal{E}$ et les angles non orientés

$$\alpha=\widehat{CAB},\quad \beta=\widehat{ABC}\in\,]0,\pi[\quad \text{et}\quad \gamma=\widehat{BCA}\in\,]0,\pi[\,.$$

On souhaite démontrer que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

1. On commence par montrer que ABC a au plus un angle obtus.
   (a) Supposons que $\left\langle\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}\right\rangle<0$. En utilisant la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{BC}$, montrer que $\left\langle\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC}\right\rangle>0$ et que $\left\langle\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}\right\rangle>0$.
   (b) Conclure.

On suppose désormais que $\beta\leqslant\pi/2$ et que $\gamma\leqslant\pi/2$.

2. Dans cette question, on établit l'égalité : $BC^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cos(\beta+\gamma)$.
   (a) En considérant $\left\langle\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\right\rangle$, établir que $BC=AB\cos\beta+AC\cos\gamma$.
   (b) En considérant $\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\right)$, établir que $0=AB\sin\beta-AC\sin\gamma$.
   (c) En utilisant la formule de trigonométrie $\cos(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$, montrer l'égalité requise.
3. Démontrer la formule d'Al Kashi : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha$.
4. En déduire que $\cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha$ puis conclure que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

2 Isométries vectorielles

Exercice 4. Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel. On considère les endomorphismes de E définis par :

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y/2 \\ x/2 + y \end{pmatrix}, \quad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y \\ -\sqrt{3}x + y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

1. Dans chaque cas, déterminer la matrice de l'application dans la base canonique.
2. Lorsque la matrice est orthogonale,
   (a) Calculer son déterminant.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
   (c) Caractériser les endomorphismes correspondants.

Exercice 5. On suppose maintenant que E est un plan euclidien (de dimension 2), orienté par la base orthonormée $\mathcal{B}$, et que $f : E \to E$ est une isométrie.

1. Si $\det(f) = +1$, f est une rotation ; on rappelle qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

   Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que $\langle \vec{u} | f(\vec{u}) \rangle = (x^2 + y^2)\cos\theta$.
   (b) Montrer que $\det_{\mathcal{B}}\big(\vec{u} | f(\vec{u})\big) = (x^2 + y^2)\sin\theta$.
   (c) En déduire que l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ ne dépend pas de $\vec{u} \neq \vec{0}$ et déterminer cet angle.
2. Si $\det(f) = -1$, f est une symétrie orthogonale ; on rappelle qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

   Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ les vecteurs de coordonnées respectives $\big(\cos(\theta/2); \sin(\theta/2)\big)$ et $\big(-\sin(\theta/2); \cos(\theta/2)\big)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire l'axe de symétrie de f.

3 Isométries affines

Dans toute cette partie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ est le plan affine euclidien muni du produit scalaire usuel.

Exercice 6. Déterminer l'expression des isométries de $\mathcal{E}$ suivantes :

1. la translation de vecteur $\vec{u} = (3; -2)$;
2. la rotation de centre $(2; 1)$ et d'angle $\pi/4$;
3. la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $2x - 5y = 6$;
4. la symétrie orthogonale glissée d'axe la droite d'équation $x - 2y = 3$ et de vecteur $\vec{u} = (2; 1)$.

Exercice 7. On considère les applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ suivantes :

$$F_1(x, y) = \left(-\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 4, \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - 2\right) \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = \left(-\frac{5x}{13} + \frac{12y}{13}, \frac{12x}{13} + \frac{5y}{13} + 13\right).$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont des isométries affines.
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de F_1 et de F_2.
3. Caractériser ces isométries.