Colles L3 ESR

Sujets 1, 2, 3 et 4

7 novembre 2019

1. — Donner la définition d'un espace métrique et quelques exemples.
   — Soit $E = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \ ; \ n \geqslant 1\}$. On munit E de la distance d_1 définie par $d_1(x, y) = |y - x|$, ou bien d_2 la distance discrète. L'espace (E, d_1) est-il complet ? Et (E, d_2) ? Que peut-on dire des topologies induites par ces distances ? Que peut-on donc en conclure vis-à-vis de la notion de complétude ?
   — Montrer qu'un espace métrique connexe non réduit à un point est indénombrable.
2. — Donner la définition d'une norme et de la distance induite par une norme, ainsi que quelques exemples.
   — Montrer qu'un espace métrique compact est complet.
   — Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques complets. Soit $i : X \to Y$ une isométrie. Montrer que i est une application fermée. Est-elle nécessairement ouverte ?
3. — Donner la définition d'une suite de Cauchy et quelques exemples.
   — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que chaque irrationnel est envoyé sur un rationnel. Montrer que f est constante.
   — Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\cap_{k=0}^{\infty}\overline{\{u_l \ ; \ l \geqslant k\}}$. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des valeurs d'adhérence ?
4. — Donner la définition d'un espace métrique complet, ainsi que quelques exemples.
   — (Point fixe de Picard-Banach) Soit (E, d) un espace métrique complet, et $f : E \to E$ une application contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Étudier

$$F : C^0([0,r]) \to C^0([0,r])$$

définie par $F(\varphi)(t) = \int_0^t f(\varphi(s))\,ds$. En déduire un énoncé d'Équations différentielles.