Colles de Topologie

Mercredi 11 décembre 2019

Exercice

Question 1. Donner la définition de partie dense d'un espace topologique.

Question 2. Soient X un espace métrique, D une partie dense de X et $\delta\colon D \to]0,+\infty[$ une application continue.

A-t-on $X = \bigcup\limits_{x\in D} B\left(x, \delta(x)\right)$?

Question 3. Soient X un espace métrique, D une partie dense de X et $\delta\colon D \to]0,+\infty[$ une application telle que $\inf\limits_{D} \delta > 0$.

A-t-on $X = \bigcup\limits_{x\in D} B\left(x, \delta(x)\right)$?

Exercice

Question 1. Donner la définition d'espace topologique séparable.

Question 2. Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

Question 3. Montrer que tout ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie est séparable.

Question 4. Montrer que, si X est un espace topologique séparable et $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X par des ouverts non vides tel que $U_i \cap U_j = \varnothing$ pour tous $i \neq j \in I$, alors I est dénombrable.

Question 5. Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées de nombres réels que l'on munit de la norme $\|.\|\colon (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty \mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Déduire de la question 4 que $(\ell^\infty, \|.\|)$ n'est pas séparable.

Exercice

Question 1. Soient X un espace métrique, A une partie de X, $a \in A$ et $\delta = d\left(a, \partial A\right)$.

A-t-on $B(a,\delta) \subset A$? Montrer que, pour tout $r > \delta$, on a $B(a,r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

Remarque : Par convention, $B(x,0) = \{x\}$ et $B(x,+\infty) = X$ pour tout $x \in X$.

Question 2. Montrer que, si E un espace vectoriel normé, A une partie de E, $x \in A$ et $y \in X \setminus A$, alors $[x,y] \cap \partial A \neq \varnothing$.

Question 3. Déduire de la question 2 que, si E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $a \in A$, alors $B(a,\delta) \subset A$, où $\delta = d\left(a, \partial A\right)$.

Exercice

Question 1. Donner la définition d'espace topologique compact. Énoncer la propriété de Bolzano-Weierstrass qui caractérise les espaces métriques compacts. Donner la caractérisation des parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie.

Question 2. Montrer qu'un ensemble muni de la topologie grossière est compact si et seulement si il est vide.

Question 3. Montrer qu'un ensemble muni de la topologie discrète est compact si et seulement si il est fini.

Exercice

Question 1. Montrer que, si X est un espace topologique séparé et F est une partie compacte de X, alors F est un fermé de X.

Question 2. Déduire de la question 1 que, si X est un espace topologique compact, alors les parties compactes de X sont les fermés de X.

Question 3. Montrer que, si X est un espace topologique compact, Y est un espace topologique séparé et $f\colon X \to Y$ est une application continue, alors $f(X)$ est une partie compacte de Y.

Question 4. Déduire des questions 1 et 3 que, si X est un espace topologique compact, Y est un espace topologique séparé et $f\colon X \to Y$ est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme.

Exercice

Définition. On dit qu'un espace topologique X est *localement compact* s'il est séparé et tous ses points admettent un voisinage compact.

Question 1. Montrer que tous les points d'un espace topologique localement compact admettent un système fondamental de voisinages compacts.

Soient $(X, \mathscr{O})$ un espace topologique localement compact et ∞ un ensemble n'appartenant pas à X.

Définition. On appelle *compactifié d'Alexandrov* de X l'ensemble $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ muni de la topologie $\widehat{\mathscr{O}} = \mathscr{O} \cup \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} \mid K \text{ partie compacte de } X\}$.

Question 2. Vérifier que $\left(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{O}}\right)$ est un espace topologique.

Question 3. Montrer que la topologie induite par $\widehat{\mathscr{O}}$ sur X est $\mathscr{O}$.

Question 4. Montrer que X est dense dans $\left(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{O}}\right)$ si et seulement si $(X, \mathscr{O})$ n'est pas compact.

Question 5. Montrer que $\left(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{O}}\right)$ est compact.

Question 6. Montrer que, si Y est un espace topologique compact et $f\colon X \to Y \setminus \{y\}$ est un homéomorphisme avec $y \in Y$, alors l'application $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to Y$ qui prolonge f et telle que $\widehat{f}(\infty) = y$ est un homéomorphisme.

Question 7. Déduire de la question 6 que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$.

EXERCICE

Question 1. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
Que vaut $\sup_{x\in\overline{B}(0,1)} d(x,F)$?

Question 2. Montrer que, si E est un espace vectoriel normé et F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors il existe $\tilde{x}\in\overline{B}(0,1)$ tel que $d(\tilde{x},F)=\sup_{x\in\overline{B}(0,1)} d(x,F)$.

Question 3. Déduire de la question 1 l'énoncé suivant :

Théorème (Théorème de compacité de Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Alors $\overline{B}(0,1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

EXERCICE

Définition. On dit qu'un espace métrique X est *précompact* si, pour tout $r>0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules ouvertes de rayon r.

Question 1. Montrer qu'un espace métrique X est précompact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite de Cauchy.

Question 2. Déduire de la question 1 qu'un espace métrique est compact si et seulement si il est complet et précompact.

EXERCICE

Question 1. Montrer que, si X est un espace topologique compact et $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Question 2. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème (Théorème des fermés emboîtés)**.** *Soit X un espace métrique. Alors X est complet si et seulement si, pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de fermés non vides de X telle que $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{diam}(F_n)=0$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\varnothing$.*

Question 3. Donner un exemple d'un espace métrique X et d'une suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de fermés non vides de X telle que $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{diam}(F_n)=0$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n=\varnothing$.

Question 4. Donner un exemple d'un espace métrique complet X et d'une suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de fermés non vides de X telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n=\varnothing$.

EXERCICE

Soient X et Y deux espaces topologiques, $A \subset B$ deux parties de X, $f\colon B \to Y$ une application et $a \in \overline{A}$.

Définition. On dit qu'un point $\ell \in Y$ est une *valeur d'adhérence* de $f(x)$ quand x tend vers a dans A si, pour tout voisinage U de a dans X et pour tout voisinage V de ℓ dans Y, on a $f(U \cap A) \cap V \neq \varnothing$.

Notons $\Lambda_{f,a,A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers a dans A.

Question 1. Montrer que, si $\mathscr{U}$ est un système fondamental de voisinages de a dans X, alors $\Lambda_{f,a,A} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} \overline{f(U \cap A)}$. En déduire que $\Lambda_{f,a,A}$ est un fermé de Y.

Question 2. Montrer que, si $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \in Y$ existe, alors $\ell \in \Lambda_{f,a,A}$.

Question 3. Montrer que, si Y est séparé et $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \in Y$ existe, alors $\Lambda_{f,a,A} = \{\ell\}$.

Supposons maintenant que Y est compact.

Question 4. Montrer que $\Lambda_{f,a,A}$ est une partie compacte non vide de Y.

Question 5. Montrer que, si V est un ouvert de Y contenant $\Lambda_{f,a,A}$, alors il existe un voisinage U de a dans X tel que $f(U \cap A) \subset V$.

Question 6. Déduire de la question 5 que, si $\Lambda_{f,a,A} = \{\ell\}$ avec $\ell \in Y$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$.