Corrigé du devoir maison : convexité

Exercice 1. 1. (a) Si C est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaisons linéaires et en particulier, nous avons bien

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1], \ (1-t)x + ty \in C.$$

(b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x, y \in I$. Quitte à échanger x et y, on peut toujours supposer $x \leq y$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$x \leq (1-t)x + ty \leq y,$$

et donc $(1-t)x + ty \in [x, y]$. Mais comme I est un intervalle, il contient le segment $[x, y]$, ce qui prouve bien *in fine* que

$$(1-t)x + ty \in I.$$

2. (a) On suppose x, y, r et t fixés comme dans l'énoncé. On prend alors un élément quelconque de la boule ouverte $B((1-t)x + ty, r)$ que l'on écrit $(1-t)x + ty + z$ avec $\|z\| < r$. On écrit ce point sous la forme

$$(1-t)x + ty + z = (1-t)\big[x + z\big] + t\big[y + z\big],$$

et comme $x + z \in B(x, r) \subset C$ et $y + z \in B(y, r) \subset C$ et que C est convexe, on en déduit bien que $(1-t)x + ty + z \in C$. On a bien montré

$$B((1-t)x + ty, r) \subset C.$$

(b) Soient $x, y \in \overset{\circ}{C}$ et $t \in [0,1]$. Par définition de l'intérieur, il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que

$$B(x, r_1) \subset C, \text{ et } B(y, r_2) \subset C.$$

Si on pose maintenant $r = \min(r_1, r_2) > 0$, on a bien

$$B(x, r) \subset C, \quad \text{et} \quad B(y, r) \subset C.$$

D'après la question précédente, on a

$$B((1-t)x + ty, r) \subset C,$$

ce qui montre que $(1-t)x + ty \in \overset{\circ}{C}$.
On a donc bien montré la convexité de l'intérieur de C.

3. Soient $x, y \in \overline{C}$ et $t \in [0,1]$. Il s'agit de montrer que $(1-t)x + ty \in \overline{C}$.
Par définition de l'adhérence, il existe deux suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ d'éléments de C qui convergent respectivement vers x et y. Par convexité de l'ensemble C, on a

$$\forall n \geq 1, \quad (1-t)x_n + ty_n \in C.$$

Les opérations élémentaires sur les suites montrent que la suite $((1-t)x_n + ty_n)_n$ converge vers $(1-t)x + ty$. On a donc bien montré que ce dernier point est la limite d'une suite d'éléments de C, et donc qu'il appartient à $\overline{C}$.

Exercice 2. 1. (a) Soit $a \in I$. On va montrer que f est continue à droite en a. On montrerait de la même façon qu'elle est continue à gauche ce qui donne la continuité complète de f en a. Comme I est ouvert, on peut trouver deux points $\alpha, \beta \in I$ tels que

$$\alpha < a < \beta.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite de points de I qui converge vers a par valeurs supérieures (c'est-à-dire que $a \leq x_n$ pour tout n). Quitte à supprimer les premiers termes de la suite, on peut toujours supposer que $x_n \leq \beta$ pour tout n.

– On utilise le fait que $a \leq x_n \leq \beta$ pour écrire

$$x_n = \frac{\beta - x_n}{\beta - a} a + \frac{x_n - a}{\beta - a} \beta,$$

qui est bien de la forme $x_n = (1-t)a + t\beta$ avec $t = (x_n - a)/(\beta - a) \in [0, 1]$. L'inégalité de convexité donne alors

$$f(x_n) \leq \frac{\beta - x_n}{\beta - a} f(a) + \frac{x_n - a}{\beta - a} f(\beta). \tag{1}$$

– On utilise maintenant le fait que $\alpha \leq a \leq x_n$ pour écrire

$$a = \frac{x_n - a}{x_n - \alpha} \alpha + \frac{a - \alpha}{x_n - \alpha} x_n,$$

et donc

$$f(a) \leq \frac{x_n - a}{x_n - \alpha} f(\alpha) + \frac{a - \alpha}{x_n - \alpha} f(x_n).$$

On en déduit

$$f(x_n) \geq \frac{x_n - \alpha}{a - \alpha} f(a) - \frac{x_n - a}{a - \alpha} f(\alpha). \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on a finalement obtenu

$$\frac{x_n - \alpha}{a - \alpha} f(a) - \frac{x_n - a}{a - \alpha} f(\alpha) \leq f(x_n) \leq \frac{\beta - x_n}{\beta - a} f(a) + \frac{x_n - a}{\beta - a} f(\beta).$$

Comme le membre de gauche et celui de droite tendent vers $f(a)$ quand $n \to \infty$, le théorème des gendarmes nous montre que $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) On écrit

$$y = \frac{z - y}{z - x} x + \frac{y - x}{z - x} z,$$

et on utilise l'inégalité de convexité pour obtenir

$$f(y) \leq \frac{z - y}{z - x} f(x) + \frac{y - x}{z - x} f(z).$$

On obtient

$$(z - x) f(y) \leq (z - y) f(x) + (y - x) f(z),$$

ou encore

$$0 \leq (z - y)(f(x) - f(y)) + (y - x)(f(z) - f(y)),$$
$$(z - y)(f(y) - f(x)) \leq (y - x)(f(z) - f(y)).$$

Comme $z - y$ et $y - x$ sont positifs, on peut diviser sans changer le sens des inégalités et ainsi obtenir

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

(c) Suivons l'indication de l'énoncé et posons $y = (1-t)x + tz$ ce qui donne

$$\frac{f((1-t)x + tz) - f(x)}{t(z-x)} \leq \frac{f(z) - f((1-t)x + tz)}{(1-t)(z-x)}.$$

Comme f est supposée dérivable, le membre de gauche tend vers $f'(x)$ quand $t \to 0$ et, par continuité de f, le membre de droite vers $(f(z) - f(x))/(z-x)$, on en déduit

$$f'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z-x}.$$

De la même façon, en faisant tendre t vers 1, on trouve

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq f'(z).$$

In fine, on a montré que $f'(x) \leq f'(z)$ pour tous $x < z$, ce qui montre bien que f' est croissante.

2. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0,1]$, on utilise successivement l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme pour obtenir l'inégalité de convexité

$$N((1-t)x + ty) \leq N((1-t)x) + N(ty) = (1-t)N(x) + tN(y).$$

On a bien sûr utilisé aussi que t et $1-t$ sont positifs ou nuls.

(b) Montrons que la boule ouverte $B(a,r)$ est convexe. On se donne deux points $x, y \in B(a,r)$ et $t \in [0,1]$, nous avons alors

$$N\big((1-t)x + ty - a\big) = N((1-t)(x-a) + t(y-a)) \leq (1-t)N(x-a) + tN(y-a) < (1-t)r + tr = r,$$

ce qui montre bien que $(1-t)x + ty \in B(a,r)$.
Pour la boule ouverte, la même preuve fonctionne en mettant des inégalités larges.

Exercice 3. 1. – On observe d'abord que si $x = 0$, alors $x/\lambda \in C$ pour tout $\lambda > 0$ et donc

$$\Lambda(0) =]0, +\infty[, \quad N(0) = 0.$$

– Comme $0 \in C$ et que C est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{B}(0,\delta) \subset C$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ non nul, on a clairement

$$\left\| \frac{\delta}{\|x\|} x \right\| \leq \delta,$$

et donc

$$\frac{\delta}{\|x\|} x \in \overline{B}(0,\delta) \subset C.$$

Ceci montre que $\|x\|/\delta \in \Lambda(x)$ qui est donc bien non vide.
Comme $\Lambda(x)$ est un ensemble non vide minoré (par 0), il admet une borne inférieure (notée $N(x)$) qui est elle-même positive ou nulle.

– Si M est une borne de C, pour tout $\lambda \in \Lambda(x)$, on a $\|x/\lambda\| \leq M$, ce qui montre que $\lambda \geq \|x\|/M$. En particulier, on a l'inégalité

$$N(x) \geq \|x\|/M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

ce qui montre en particulier que si $N(x) = 0$, alors on a $x = 0$.

– Montrons que $]N(x), +\infty[\subset \Lambda(x)$. Soit donc $\lambda > N(x)$. Par définition de l'infimum, il existe $\lambda' \in \Lambda(x)$ tel que $\lambda' < \lambda$.
On a ainsi
$$\frac{x}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{x}{\lambda'} + \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda}0,$$
ce qui montre que x/λ est une combinaison convexe de 0 et de x/λ'. Par hypothèse, ces deux points sont dans C qui est un convexe et donc, on a bien que $x/\lambda \in C$ et donc que $\lambda \in \Lambda(x)$.

– On a donc maintenant deux possibilités : ou bien $\Lambda(x) = [N(x), +\infty[$ ou bien $\Lambda(x) =]N(x), +\infty[$.
Afin d'éliminer la première possibilité, il faut montrer que $N(x) \notin \Lambda(x)$.
Supposons par l'absurde que $N(x) \in \Lambda(x)$ (en particulier on a nécessairement $x \neq 0$). Ceci signifie que $x/N(x) \in C$ mais comme C est ouvert, nous avons pour un $\varepsilon > 0$ assez petit on a
$$x/N(x) + \varepsilon x \in C,$$
c'est-à-dire que
$$\frac{1}{1/N(x) + \varepsilon} \in \Lambda(x),$$
et comme
$$\frac{1}{1/N(x) + \varepsilon} < N(x),$$
cela contredit la définition de l'infimum. On a bien établi la propriété attendue.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, comme C est symétrique par rapport à l'origine, on a pour tout $\lambda > 0$
$$\frac{x}{\lambda} \in C \Longleftrightarrow \frac{-x}{\lambda} \in C,$$
ce qui montre que
$$\Lambda(x) = \Lambda(-x),$$
et donc que ces deux ensembles ont la même borne inférieure, c'est-à-dire
$$N(x) = N(-x).$$

3. Fixons $x \in \mathbb{R}^d, \mu > 0$. Pour tout $\lambda > 0$ on a
$$\lambda \in \Lambda(\mu x) \Leftrightarrow \frac{\mu x}{\lambda} \in C \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}x \in C \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} \in \Lambda(x).$$
Ceci prouve que
$$\Lambda(\mu x) = \mu\Lambda(x).$$
Comme $\mu > 0$, on peut passer à la borne inférieure et obtenir
$$N(\mu x) = \mu N(x).$$

4. Fixons x et y non nuls. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, d'après les questions précédentes on a $N(x) + \varepsilon \in \Lambda(x)$ et $N(y) + \varepsilon \in \Lambda(y)$ ce qui montre que
$$\frac{x}{N(x) + \varepsilon} \in C, \quad \text{et} \quad \frac{y}{N(y) + \varepsilon} \in C. \tag{3}$$
On cherche maintenant à obtenir une combinaison convexe de ces deux points qui soit proportionnelle à la somme $x + y$. Un petit calcul élémentaire montre que l'on peut écrire
$$\frac{1}{N(x) + N(y) + 2\varepsilon}(x + y) = \underbrace{\frac{N(x) + \varepsilon}{N(x) + N(y) + 2\varepsilon}}_{=t}\frac{x}{N(x) + \varepsilon} + \underbrace{\frac{N(y) + \varepsilon}{N(x) + N(y) + 2\varepsilon}}_{=1-t}\frac{y}{N(y) + \varepsilon}.$$

Comme C est convexe et grâce à (3), on en déduit que

$$\frac{1}{N(x)+N(y)+2\varepsilon}(x+y) \in C,$$

ce qui signifie que

$$N(x)+N(y)+2\varepsilon \in \Lambda(x+y),$$

et par définition de la borne inférieure, on trouve

$$N(x+y) \leq N(x)+N(y)+2\varepsilon.$$

Cette inégalité étant valable pour tout choix de $\varepsilon > 0$, on peut passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et obtenir

$$N(x+y) \leq N(x)+N(y).$$

Ceci montre l'inégalité triangulaire pour N. Les autres propriétés d'une norme se déduisent des questions précédentes. En particulier si $\mu < 0$, on écrit $N(\mu x) = N(-|\mu| x) = N(|\mu| x) = |\mu| N(x)$, ce qui donne bien l'homogénéité de N.

5. On veut montrer que $C = B_N(0,1)$.
   - Si $x \in C$, on a en particulier $1 \in \Lambda(x)$ et donc, comme $\Lambda(x) =]N(x), +\infty[$, on déduit $N(x) < 1$, c'est-à-dire que $x \in B_N(0,1)$.
   - Si maintenant $x \in B_N(0,1)$, on a $N(x) < 1$ et donc $1 \in \Lambda(x)$, c'est-à-dire que $x \in C$.