Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse Fonctionnelle
TD 2 : Espaces de dimension finie. Espaces l^p.

Avec corrigés

Les numéros de Théorèmes, Propositions, etc ... font référence aux notes de cours.

Exercice 1

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'exposant conjugué de p par $1/p + 1/p' = 1$, avec $1/\infty = 0$.

1. *On suppose que $1 < p < +\infty$. Démontrer que pour tous $a, b \in [0, +\infty[$, on a* **l'inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

2. *En déduire que, pour $1 < p < +\infty$, nous avons l'inégalité de Hölder*

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $(p, p') = (1, +\infty)$ et $(p, p') = (+\infty, 1)$.

3. *Montrer finalement que $\|.\|_p$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.*
4. *Montrer que pour $0 < p < 1$, $\|.\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^d$.*
5. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty,$$

ce qui justifie la notation $\|.\|_\infty$.

6. *Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\theta \in [0, 1]$. On définit $r \in [p, q]$ par la formule*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Montrer l'inégalité dite **d'interpolation** *suivante*

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p^\theta \|x\|_q^{1-\theta}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Corrigé :

1. Il y a plusieurs façons de démontrer cette inégalité. La plus simple consiste à utiliser la concavité et la croissance du logarithme. Ainsi, par choix de l'exposant conjugué, on voit que le membre de droite de l'inégalité attendue est une combinaison convexe entre a^p et $b^{p'}$. On a donc

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(b^{p'}) = \log(a) + \log(b) = \log(ab),$$

ce qui fournit l'inégalité attendue en passant à l'exponentielle (qui est une fonction croissante).

2. Par homogénéité de l'inégalité attendue, on peut toujours supposer que $\|x\|_p = \|y\|_{p'} = 1$. On applique ensuite l'inégalité de Young pour tout i

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p'},$$

et on somme sur $i = 1, ..., d$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right) + \frac{1}{p'}\left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^{p'}\right) = \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{p'}\|y\|_{p'}^{p'} = 1,$$

ce qui donne le résultat attendu.

Les cas limites sont clairs.

3. La seule propriété délicate à montrer est l'inégalité triangulaire. On suppose que $x + y \neq 0$ (sinon il n'y a rien à montrer) puis on écrit
$$|x_i + y_i|^p \leq |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1},$$
puis on somme sur i
$$\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} |y_i||x_i + y_i|^{p-1},$$
et on applique l'inégalité de Hölder dans chacun des deux termes du membre de droite
$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^{p'(p-1)} \right)^{\frac{1}{p'}},$$
et on observe que $p'(p-1) = p$ ce qui donne
$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p-1}.$$
On termine en simplifiant par $\|x + y\|_p^{p-1}$, qui est bien non nul par hypothèse, pour obtenir l'inégalité souhaitée.
4. Soit $0 < p < 1$. On pose $x = (1, 0, ..., 0)$ et $y = (0, 1, 0, ..., 0)$ et on calcule
$$\|x\|_p = \|y\|_p = 1,$$
$$\|x + y\|_p = 2^{1/p},$$
et comme $p < 1$, on a
$$\|x + y\|_p > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p,$$
ce qui montre que l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.
5. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ non identiquement nul. On fixe un indice i tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$ puis on écrit d'une part
$$\|x\|_\infty = |x_i| = \left(|x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p,$$
et d'autre part
$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \leq \sum_{j=1}^{d} \|x\|_\infty^p \leq d\|x\|_\infty^p.$$
On a donc montré
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{1/p}\|x\|_\infty.$$
On conclut en faisant tendre p vers l'infini et en utilisant le théorème des gendarmes.
6. La définition de r s'écrit aussi sous la forme
$$1 = \frac{r\theta}{p} + \frac{r(1-\theta)}{q},$$
puis on écrit
$$\sum_{i=1}^{d} |x_i|^r = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{r\theta}|x_i|^{r(1-\theta)},$$
et on utilise l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $p/r\theta$ et $q/r(1-\theta)$ d'où l'on tire
$$\|x\|^r = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^r \leq \|x\|_p^{r\theta}\|x\|_q^{r(1-\theta)},$$
ce qui donne le résultat attendu.

■

Exercice 2

Soit A une matrice carrée de taille d symétrique définie positive.

1. *Montrer que l'application suivante est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$*

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto \|x\|_A = \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}x_ix_j\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. *Montrer que l'on a*

$$\sqrt{\lambda_1}\|x\|_2 \leq \|x\|_A \leq \sqrt{\lambda_d}\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

où λ_1 et λ_d sont respectivement la plus petite et plus grande valeur propre de A.
Montrer que cette inégalité est optimale : il existe des x (non nuls !) pour lesquels ce sont des égalités.

Corrigé :

1. On introduit l'application bilinéaire suivante

$$(x,y)_A = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}x_jy_i = (Ax,y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d,$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbb{R}^d$.
Il s'agit de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.
   - Comme A est une matrice symétrique, on a que $(.,.)_A$ est une application symétrique. En effet, on rappelle que pour toute matrice M, nous avons par définition de la transposée $(Mx,y) = (x,{}^tMy)$.
   - De plus, $(x,x)_A = (Ax,x)$ est bien une quantité strictement positive dès que $x \neq 0$, car A est supposée définie positive.

   On a donc bien un produit scalaire dont la norme proposée est déduite.

2. On sait que A est diagonalisable en base orthonormée et que ses valeurs propres sont strictement positives. Il existe donc des e_i et $\lambda_i > 0$ tels que

$$0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_d,$$
$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad \forall i,$$
$$(e_i,e_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i,j.$$

Tout élément x de $\mathbb{R}^d$ s'écrit donc $x = \sum_{i=1}^{d}(x,e_i)e_i$ et on a

$$(Ax,x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i (x,e_i)^2,$$

de sorte que

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{d}(x,e_i)^2 \leq (Ax,x) \leq \lambda_d \sum_{i=1}^{d}(x,e_i)^2,$$

ce qui s'écrit encore

$$\lambda_1\|x\|^2 \leq (x,x)_A \leq \lambda_d\|x\|^2.$$

On voit que la première inégalité est une égalité quand $x = e_1$ et la deuxième quand $x = e_d$.

■

Exercice 3 (Lemme de Von Neumann)

Soit $|||.|||$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ vérifiant $|||A||| < 1$, on a

$$\mathrm{Id} - A \in GL_d(\mathbb{R}), \quad \textit{et} \quad (\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n,$$

cette série étant convergente dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Corrigé :

Comme $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est complet, il suffit de montrer que la série apparaissant dans le terme de droite est absolument convergente. Ceci est vrai car, par définition d'une norme d'algèbre, on a

$$|||A^n||| \leq |||A|||^n, \ \ \forall n \geq 1,$$

et comme on a supposé que $|||A||| < 1$, on a affaire à une série géométrie convergente. Appelons S la somme de la série $\sum_{n\geq 0} A^n$. Pour N fixé, on constate que

$$(\mathrm{Id} - A)\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right) = \mathrm{Id} - A^{N+1}.$$

Par passage à la limite quand N tend vers l'infini, on déduit

$$(\mathrm{Id} - A)S = \mathrm{Id},$$

ce qui montre le résultat attendu. ■

On voit bien que l'hypothèse dans le résultat précédent dépend de la norme d'algèbre choisie sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas nécessairement satisfaisant vu que la conclusion de l'exercice ne dépend pas de cette norme. L'exercice suivant montre que, le choix d'une bonne norme (en fonction de la matrice A étudiée) est toujours possible en fonction des propriétés algébriques de la matrice.

Exercice 4 (Rayon spectral et normes)

1. *Si $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des normes subordonnées sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, i.e. toutes celles obtenues à partir d'une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^d$ par la formule*

$$|||M||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|M.x\|}{\|x\|}, \quad \forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),$$

alors on a

$$\rho(A) = \inf_{N\in\mathcal{N}} N(A).$$

2. *Montrer que pour toute norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on a*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

3. *On a l'équivalence*

$$\rho(A) < 1 \iff (A^n)_n \text{ tend vers } 0.$$

De plus, si $\rho(A) < 1$, alors la série de terme général A^n est convergente dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et on a

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} A^n.$$

Corrigé :

1. Soit $N \in \mathcal{N}$ est une norme matricielle subordonnée (ou induite) associée à une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^d$. Soit x est un vecteur propre pour une valeur propre λ de module maximal, on a

$$\lambda x = Ax,$$

et en prenant la norme, on trouve

$$\rho(A)\|x\| \leq N(A)\|x\|,$$

et donc

$$\rho(A) \leq N(A). \tag{1}$$

Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathcal{N}$, on a montré

$$\rho(A) \leq \inf_{N\in\mathcal{N}} N(A).$$

En conséquence, pour montrer le résultat demandé dans l'exercice, il nous suffit donc de trouver une "bonne" norme subordonnée sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $N(A)$ soit aussi proche de $\rho(A)$ que l'on veut. (Noter qu'il n'est pas possible en général de trouver une norme telle que $\rho(A) = N(A)$ ... voyez-vous pourquoi ?).

On utilise le fait que toute matrice A est triagonalisable dans $\mathbb{C}$ (mais pas dans $\mathbb{R}$!), ce qui signifie qu'il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure (et avec les valeurs propres de A sur la diagonale, que l'on suppose classées dans l'ordre décroissant). On introduit alors la matrice diagonale $D_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, ..., \varepsilon^{d-1})$ et on définit la norme suivante

$$N_\varepsilon(M) = |||D_\varepsilon^{-1}P^{-1}MPD_\varepsilon|||_\infty, \;\; \forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}).$$

Noter (et vérifier !) que cette norme est bien subordonée à la norme sur $\mathcal{C}^n$ définie par

$$\|x\|_\varepsilon = \|D_\varepsilon^{-1}P^{-1}x\|_\infty, \;\; \forall x \in \mathcal{C}^n.$$

On a donc bien $N_\varepsilon \in \mathcal{N}$ et de plus, un simple calcul montre que la matrice $D_\varepsilon^{-1}P^{-1}APD_\varepsilon$ est une matrice triangulaire ayant la même diagonale que $P^{-1}AP$ et dont tous les coefficients sur-diagonaux sont obtenus à partir de ceux de $P^{-1}AP$ par multiplication avec une certaine puissance (positive) de ε. Ainsi $D_\varepsilon^{-1}P^{-1}APD_\varepsilon$ converge vers une matrice diagonale (contenant les valeurs propres de A) quand $\varepsilon \to 0$ et donc, nous avons

$$N_\varepsilon(A) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \rho(A),$$

ce qui conclut la preuve.

2. On commence par montrer que la limite dans le membre de droite, si elle existe, ne dépend pas de la norme choisie. Soit N_1 une norme pour laquelle la limite existe et N_2 n'importe quelle autre norme. D'après le théorème I.54, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes et donc on a

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1,$$

d'où, pour tout $k \geq 1$, l'inégalité suivante

$$\alpha^{\frac{1}{k}} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}} \leq N_2(A^k)^{\frac{1}{k}} \leq \beta^{\frac{1}{k}} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}}.$$

Comme on a $\lim_{k\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \beta^{\frac{1}{k}} = 1$, on voit bien par le théorème des gendarmes que la limite de $N_2(A^k)^{\frac{1}{k}}$ existe et coincide avec la limite de la même quantité calculée avec la norme N_1. En réalité, on a même le résultat plus fort suivant

$$\liminf_{k\to\infty} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}} = \liminf_{k\to\infty} N_2(A^k)^{\frac{1}{k}},$$
$$\limsup_{k\to\infty} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k\to\infty} N_2(A^k)^{\frac{1}{k}},$$

pour toutes normes N_1 et N_2 sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On note L_- et L_+ la valeur commune de ces deux limites et on va montrer que $L_- = L_+ = \rho(A)$.
Pour toute norme subordonnée $N \in \mathcal{N}$, on applique (1) à la matrice A^k pour obtenir

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq N(A^k),$$

et donc

$$\rho(A) \leq N(A^k)^{1/k}.$$

Par ailleurs, nous avons (propriété de norme d'algèbre)

$$N(A^k) \leq (N(A))^k,$$

et donc, pour toute norme subordonnée $N \in \mathcal{N}$, on a

$$\rho(A) \leq N(A^k)^{1/k} \leq N(A),$$

et ainsi

$$\rho(A) \leq \liminf_{k\to\infty} N(A^k)^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} N(A^k)^{1/k} \leq N(A),$$

En prenant les limites inférieures et supérieures dans cette inégalité, on arrive à

$$\rho(A) \leq L_- \leq L_+ \leq N(A).$$

Comme cette inégalité est vraie pour toute norme subordonnée N, on peut prendre l'infimum par rapport à N

$$\rho(A) \leq L_- \leq L_+ \leq \inf_{N\in\mathcal{N}} N(A).$$

D'après la question précédente, l'infimum de droite n'est autre que le rayon spectral $\rho(A)$ et on a donc bien montré l'égalité $L_- = L_+ = \rho(A)$.

3. Supposons que $\rho(A) < 1$. D'après la question précédente, il existe une norme $N \in \mathcal{N}$ telle que $N(A) < 1$. Pour une telle norme, nous avons
$$N(A^k) \leq N(A)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$
et donc $(A^k)_k$ tend bien vers 0 et on peut appliquer le lemme de Von Neumann (Exercice 3).
Réciproquement, supposons que $(A^k)_k$ tende vers 0 et soit λ une valeur propre (éventuellement complexe) de A de module maximal et x un vecteur propre associé.
Nous écrivons
$$\lambda^k x = A^k x,$$
d'où
$$|\lambda|^k \leq \|A^k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$
ce qui prouve bien que $\rho(A) = |\lambda| < 1$.

■

Exercice 5 (Continuité du rayon spectral)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on note
$$\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\},$$
le rayon spectral de A.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'application $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \mapsto \rho(A)$ est continue.

1. *Montrer que si $(T_k)_k$ est une suite de matrices triangulaires supérieures qui converge vers une matrice T, alors on a*
$$\rho(T_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(T).$$
2. *Soit A une matrice quelconque et $(A_k)_k$ une suite de matrices qui converge vers A. On rappelle que, pour tout k, on peut utiliser* la décomposition de Schur *de la matrice A_k, qui s'écrit*
$$A_k = Q_k^{-1} T_k Q_k,$$
où T_k est triangulaire supérieure et Q_k est unitaire.
   (a) *Montrer que la suite de nombres réels $(\rho(A_k))_k$ est bornée.*
   (b) *Montrer que $\rho(A_k) = \rho(T_k)$ pour tout k.*
   (c) *Soit $(A_{\varphi(k)})_k$ une sous-suite telle que la suite $(\rho(A_{\varphi(k)}))_k$ soit convergente. Montrer que la limite de cette suite est nécessairement égale à $\rho(A)$. Indication : on pourra utiliser la compacité de $U_d(\mathbb{C})$.*
   (d) *Conclure.*

Corrigé :

1. Pour les matrices triangulaires, le rayon spectral n'est rien d'autre que le plus grand module des éléments diagonaux. Comme on a convergence des éléments diagonaux de T_k vers les éléments diagonaux de la limite T (qui est nécessairement triangulaire ...) on a bien convergence du rayon spectral.
2. (a) On a déjà vu que, pour tout norme d'algèbre on a $\rho(A_k) \leq \|A_k\|$ et comme la suite $(A_k)_k$ converge elle est bornée, ce qui montre le résultat.
   (b) La décomposition de Schur montre que A_k et T_k sont semblables et donc ont les mêmes valeurs propres et en particulier le même rayon spectral.
   (c) Par compacité de $U_d(\mathbb{C})$, on peut extraire une nouvelle sous-suite telle que $(Q_{\varphi(\psi(k))})_k$ converge vers une certaine matrice $Q \in U_d(\mathbb{C})$. On déduit de cela que
$$T_{\varphi(\psi(k))} = Q_{\varphi(\psi(k))} A_{\varphi(\psi(k))} Q^{-1}_{\varphi(\psi(k))} \xrightarrow[k\to\infty]{} QAQ^{-1},$$
ce qui montre que la suite de matrices triangulaires $(T_{\varphi(\psi(k))})_k$ est convergente et donc d'après la première question, on a
$$\rho(A_{\varphi(\psi(k))}) = \rho(T_{\varphi(\psi(k))}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(QAQ^{-1}) = \rho(A).$$
D'où le résultat.

(d) La suite $(\rho(A_k))_k$ est contenue dans un compact (car bornée dans $\mathbb{R}$) et possède une unique valeur d'adhérence qui est $\rho(A)$. D'après la Proposition I.22, on a bien établi la convergence de toute la suite $(\rho(A_k))_k$ vers $\rho(A)$ et de ce fait la continuité de ρ.

■

Exercice 6 (Dualité pour $(\mathbb{R}^d, \|.\|_p)$)

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note $p' \in [1, +\infty]$ l'exposant conjugué de p défini par la relation

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'},$$

(avec la convention $1/\infty = 0$).
On considère l'espace $E = \mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|.\|_E = \|.\|_p$ et on note E' son espace dual muni de la norme duale définie comme on l'a vu par

$$\|L\|_{E'} = \sup_{x\neq 0} \frac{|L(x)|}{\|x\|_p}, \quad \forall L \in E'.$$

On note $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ la base canonique de E. On définit $F = \mathbb{R}^d$ puis l'application $\Phi : E' \to F$ par

$$\Phi(L) = \big(L(e_i)\big)_{1\leq i\leq d},$$

qui à toute forme linéaire sur E associe l'ensemble de ses valeurs sur la base canonique.

1. *Montrer que Φ est linéaire bijective et que son inverse est l'application*

$$\Psi : y \in F \mapsto \Psi(y) = \left(x \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right) \in E'.$$

On notera que ceci montre en particulier E et E' sont de même dimension. Bien que la structure euclidienne de $\mathbb{R}^d$ ne soit pas utilisée explicitement dans cet exercice, on notera que $(\Psi(y))(x)$ n'est autre que le produit scalaire de x et de y

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

2. *Montrer que, si on munit l'espace F de la norme $\|.\|_{p'}$ alors Φ est une isométrie de $(E', \|.\|_{E'})$ sur $(F, \|.\|_{p'})$.*

Cet exercice montre donc que le dual topologique de $(\mathbb{R}^d, \|.\|_p)$ n'est autre que $(\mathbb{R}^d, \|.\|_{p'})$.

Corrigé :

1. La linéarité de Φ ne fait aucun doute de même que son injectivité (une application linéaire qui s'annule sur tous les éléments d'une base est identiquement nulle).
Par définition, nous avons

$$\Phi(\Psi(y)) = \Big([\Psi(y)](e_i) \Big)_{1\leq i\leq d} = ((y, e_i))_{1\leq i\leq d} = (y_i)_{1\leq i\leq d} = y.$$

De même, pour tout $x \in E$, on a

$$[\Psi(\Phi(L))].(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i L(e_i) = L\left(\sum_{i=1}^{d} x_i e_i\right) = L(x),$$

et donc

$$\Psi(\Phi(L)) = L.$$

Φ et Ψ sont donc bien réciproques l'une de l'autre, ce qui conclut la preuve.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a par définition

$$L(x) = (\Phi(L), x) = \sum_{i=1}^{d} (\Phi(L))_i x_i,$$

et donc par l'inégalité de Hölder on a
$$|L(x)| \leq \|\Phi(L)\|_{p'}\|x\|_p,$$
et ainsi on a prouvé que
$$\|L\|_{E'} \leq \|\Phi(L)\|_{p'}.$$
Montrons l'inégalité inverse, pour tout $L \in E'$. On pose
$$x_i = |(\Phi(L))_i|^{p'-2}(\Phi(L))_i,$$
ce qui donne
$$\sum_{i=1}^{d} |(\Phi(L))_i|^{p'} = L(x) \leq \|L\|_{E'}\|x\|_p,$$
Par définition de x, et comme $p(p'-1) = p'$, nous avons
$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{d} |(\Phi(L))_i|^{(p'-1)p} = \|\Phi(L)\|_{p'}^{p'}.$$
On a donc montré
$$\|\Phi(L)\|_{p'}^{p'} \leq \|L\|_{E'}\|\varphi(L)\|_{p'}^{p'/p},$$
ou encore
$$\|\Phi(L)\|_{p'}^{p'(p-1)/p} \leq \|L\|_{E'},$$
ce qui donne le résultat attendu car $p'(p-1) = p$.

■

Exercice 7 (Cube de Hilbert)

Soit $c = (c_n)_n$ un élément de l^2. On définit l'ensemble
$$C = \{x \in l^2,\ \forall n, |x_n| \leq |c_n|\}.$$

1. *Montrer que C est fermé dans l^2.*
2. *Montrer que, sur l'ensemble C, la topologie de l^2 est exactement la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire que si $(x^k)_k$ est une suite d'éléments de C alors on a*
$$(x^k)_k \text{ converge dans } l^2 \iff \text{Pour tout } n \geq 0, \text{ la suite } (x_n^k)_k \text{ converge dans } \mathbb{R}.$$
3. *Montrer que la propriété précédente est fausse si la suite $c \notin l^2$, par exemple en prenant pour c, la suite constante égale à 1.*
4. *Montrer que l'ensemble C est un compact de l^2.*

Corrigé :

1. Il suffit de remarquer que la convergence dans l^2 implique la convergence simple (i.e. terme à terme). Autrement dit, on a l'implication
$$x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x, \text{ dans } l^2 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_n,$$
qui provient juste de l'inégalité
$$|x_n^k - x_n| \leq \|x^k - x\|_2,\ \ \forall n \geq 0, \forall k \geq 0.$$
Ainsi si la suite $(x^k)_k$ est contenue dans C et converge dans l^2 vers un certain x, on peut passer à la limite (par rapport à k) dans l'inégalité $|x_n^k| \leq c_n$ et ainsi obtenir que $|x_n| \leq c_n$, i.e. $x \in C$.
2. On a déjà vu dans la question précédente que la convergence dans l^2 implique la convergence simple. Il s'agit de voir que la récirpoque est vraie dans C.
Soit donc $(x^k)_k$ une suite d'éléments de C qui converge simplement vers une suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il est clair tout d'abord que $x \in C$, il s'agit de voir que la convergence a lieu au sens de la norme l^2. On se donne un $\varepsilon > 0$ et on utilise le fait que la suite $(c_n)_n$ est dans l^2 (cette hypothèse n'avait pas servi jusqu'à présent !) de sorte qu'on peut trouver un N tel que
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \varepsilon.$$

On considère maintenant la quantité

$$I_{N,k} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} |x_n^k - x_n|^2.$$

Il s'agit, N étant fixé, d'une somme finie de termes qui tendent vers 0 quand $k \to \infty$ par hypothèse. On peut donc trouver un k_0 (dépendant de ε et N) tel que

$$I_{N,k} \leq \varepsilon, \ \ \forall k \geq k_0.$$

Pour $k \geq k_0$, on peut donc découper la somme qui définit la norme l^2 et obtenir

$$\|x^k - x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n|^2 = I_{N,k} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n^k - x_n|^2.$$

Puis on utilise le fait que tous les x^k et x sont des éléments de C pour majorer le second terme ci-dessus

$$\|x^k - x\|_2^2 \leq I_{N,k} + 4 \sum_{n=N+1}^{+\infty} |c_n|^2,$$

et donc par choix de N, puis de k_0, on a finalement

$$\|x^k - x\|_2^2 \leq 5\varepsilon, \ \ \forall k \geq k_0.$$

Le résultat est démontré.

3. Comme suggéré dans l'énoncé on prend pour c la suite constante égale à 1. Pour tout k, on considère x^k la suite constituée de zéros à l'exception du terme de rang k qui vaut 1. Ce sont bien des éléments de C. De plus, on voit clairement que cette suite converge simplement vers la suite nulle qui est bien aussi dans C. Par contre nous avons

$$\|x^k - 0\|_2 = \|x^k\|_2 = 1,$$

et donc nous n'avons pas la convergence en norme l^2 vers 0.

4. Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité. On considère une suite $(x^k)_k$ d'éléments de C et on veut trouver une sous-suite qui converge dans l^2. D'après la question 2 il suffit de trouver une sous-suite qui converge simplement. On va utiliser ici le procédé diagonal de Cantor.

   — On commence par s'intéresser à la suite de nombres réels $(x_0^k)_k$. Par hypothèse c'est une suite bornée (par $|c_0|$) et on peut donc trouver une sous-suite $(x_0^{\varphi_0(k)})_k$ qui converge.

   — On regarde maintenant la suite $(x_1^{\varphi_0(k)})_k$. Il s'agit également d'une suite bornée (par $|c_1|$ cette fois) et on peut donc en trouver une sous-suite $(x_1^{\varphi_0\circ\varphi_1(k)})_k$ qui converge.

   — On continue se procédé par récurrence en construisant une famille de fonctions strictement croissantes $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour n fixé on ait

   $$(x_n^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n(k)})_k \ \text{ est convergente.}$$

   — On considère alors la suite définie par

   $$(x^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(k)})_k.$$

   On vérifie d'abord qu'il s'agit bien d'une suite extraite en montrant que l'application

   $$\psi : k \in \mathbb{N} \mapsto \psi(k) = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(k) \in \mathbb{N}$$

   est strictement croissante. En effet, comme φ_{k+1} est strictement croissante on a

   $$\varphi_{k+1}(k+1) \geq k+1 > k,$$

   et de plus la composée de fonctions strictement croissantes $\varphi_0 \circ \psi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k$ est elle-même strictement croissante ce qui donne

   $$\psi(k+1) = \varphi_0 \circ \psi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(\varphi_{k+1}(k+1)) > \varphi_0 \circ \psi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(k) = \psi(k).$$

   Ensuite, on vérifie que cette suite $(x^{\psi(k)})_k$ est bien simplement convergente. Pour cela, on fixe un n et on observe que

   $$(x_n^{\psi(k)})_k, \ \text{ est une suite extraite de la suite } (x^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(k)})_k,$$

   cette dernière suite étant convergente par construction, on a bien le résultat attendu.

■

Exercice 8 (Premier contact avec la convergence faible)

Soit $1 \leq p < +\infty$. Montrer que si $(x^k)_k \subset l^p$ est une suite bornée dans l^p est telle qu'il existe un élément $x \in l^\infty$ vérifiant

$$x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x, \text{ dans } l^\infty,$$

alors on a

1. $x \in l^p$.
2. $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$, *dans* l^q, $\forall q > p$,
3. *Si $p > 1$, montrer que l'on a*

$$(x^k, y) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x, y), \text{ pour tout } y \in l^{p'}. \tag{2}$$

Indication : On pourra utiliser la densité de c_f dans $l^{p'}$ (car $p' < +\infty$ ici !).

4. *Trouver un exemple de la situation précédente montrant qu'en général la convergence forte de $(x^k)_k$ vers x dans l^p n'est pas vraie.*
5. *Si $p = 1$ montrer que*

$$(x^k, y) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x, y), \text{ pour tout } y \in c_0.$$

Trouver un exemple montrant que cette convergence peut tomber en défaut si on suppose seulement $y \in l^\infty$.

Ces dernières propriétés sont appelées convergences faibles *dans l^p. Nous les retrouverons plus tard dans le cours.*

Corrigé :

Soit M une borne de $(\|x^k\|_p)_k$.

1. On prend N fixé et on écrit

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n^k|^p \leq \|x^k\|_p^p \leq M^p.$$

Comme $(x^k)_k$ converge vers x dans l^∞, on a en particulier la convergence simple et on peut donc passer à la limite quand $k \to \infty$ dans cette inégalité. Il vient

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \leq M^p.$$

Ceci étant valable pour tout N, on a bien établi que $x \in l^p$ et même que $\|x\|_p \leq M$.

2. On utilise l'inégalité d'interpolation donnée dans la Proposition I.60 et qui donne

$$\|x^k - x\|_q \leq \|x^k - x\|_p^\theta \|x^k - x\|_\infty^{1-\theta} \leq (2M)^\theta \|x^k - x\|_\infty^{1-\theta},$$

où θ est tel que

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{\infty} = \frac{\theta}{p}.$$

En particulier, comme $q > p$, on a $0 \leq \theta < 1$ et donc le terme de droite de l'inégalité ci-dessus converge bien vers 0, ce qui montre le résultat attendu.

3. On pose $T_k(y) = (x^k, y)$ pour tout k et $T(y) = (x, y)$, il s'agit de montrer que $T_k(y)$ converge vers $T(y)$ pour tout $y \in l^{p'}$. On va procéder de façon très classique et qu'il faut bien connaître et maîtriser : d'abord on va montrer des estimations uniformes sur $T_k - T$ dans des bonnes normes, puis on va trouver un ensemble dense de valeurs de y pour lesquels la convergence est facile à démontrer, puis on concluera en utilisant la densité.

   - Etape 1 : D'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$|T_k(y)| \leq \|x^k\|_p \|y\|_{p'} \leq M\|y\|_{p'},$$

$$|T(y)| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} \leq M\|y\|_{p'}.$$

   et on voit que ces bornes ne dépendent pas de k.

- Etape 2 : Soit $y \in c_f$. On suppose que y est nul à partir du rang $N+1$, on a alors

$$T_k(y) = \sum_{n=0}^{N} x_n^k y_n \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=0}^{N} x_n y_n = T(y),$$

  la convergence étant immédiate à justifier puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de termes dans la somme et que chacun converge.

- Etape 3 : On peut maintenant conclure par densité de c_f dans $l^{p'}$ (on rappele que ceci est faux dans l^∞). Soit donc $y \in l^{p'}$ quelconque et $\varepsilon > 0$. La densité de c_f nous dit qu'on peut trouver un $z \in c_f$ tel que $\|y-z\|_{p'} \leq \varepsilon$. On écrit alors

$$\begin{aligned}|T_k(y) - T(y)| &\leq |T_k(y) - T_k(z)| + |T_k(z) - T(z)| + |T(z) - T(y)| \\ &\leq 2M\|y-z\|_{p'} + |T_k(z) - T(z)| \\ &\leq 2M\varepsilon + |T_k(z) - T(z)|.\end{aligned}$$

  Le premier terme ne dépend plus ni de z, ni de k, et le second terme tend vers 0 d'après le résultat de l'étape 2. En conséquence, on peut trouver k_0 assez grand tel que $|T_k(z) - T(z)| \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_0$, ce qui donne au final

$$|T_k(y) - T(y)| \leq (2M+1)\varepsilon,$$

  et le tour est joué.

4. Pour tout $k \geq 1$, on prend pour x^k la suite nulle sauf les k premiers termes égaux à $k^{-1/p}$:

$$x^k = (\underbrace{k^{-1/p}, ..., k^{-1/p}}_{k \text{ termes}}, 0, ...,).$$

   On constate tout d'abord que

$$\|x^k\|_\infty = k^{-1/p} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

   puis que

$$\|x^k\|_p = \sum_{n=0}^{k-1} |x_n|^p = \sum_{n=0}^{k-1} k^{-1} = 1.$$

   Ainsi,on est bien dans les conditions d'application des premières questions (avec $x = 0$ dans ce cas) et il est bien clair que $(x^k)_k$ ne converge pas vers 0 dans l^p.

5. La preuve est exactement la même ici que dans le point 3., sauf que c_f est seulement dense dans c_0 pour la norme infinie mais pas dans l^∞.
   On reprend les suites x^k construites précédemment (pour $p = 1$). On a

$$\|x^k\|_1 = 1, \;\; \forall k \geq 1,$$

$$\|x^k\|_\infty = \frac{1}{k}, \;\; \forall k \geq 1.$$

   Ainsi $(x^k)_k$ est bornée dans l^1 et tend vers 0 dans l^∞. On veut montrer que si $y \in l^\infty$, on a pas nécessairement

$$(x^k, y) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x, y).$$

   Pour cela, on prend simplement la suite y constante égale à 1, de sorte que

$$(x^k, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^k = 1, \;\; \forall k,$$

   alors que, comme $x = 0$, on a

$$(x, y) = 0.$$

■

Exercice 9 (Multiplicateurs dans l^p. Premier contact avec les opérateurs compacts)

Soit $(\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres réels. A toute suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on associe la suite

$$T_\alpha x = (\alpha_n x_n)_n.$$

1. *Montrer que $T_\alpha(l^p) \subset l^p$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et que T_α est une application linéaire continue de l^p dans lui-même dont on calculera la norme.*
2. *On fixe $1 \leq p \leq +\infty$ et on suppose que la suite $(\alpha_n)_n$ tend vers 0.*
   Montrer que si $(x^k)_k$ est une suite bornée de l^p qui converge faiblement vers un certain x dans l^p (voir la définition (2) dans l'exercice 8) alors $T_\alpha(x^k)$ converge **fortement** *vers $T_\alpha(x)$ dans l^p.*
   Dans ces conditions, on dit que l'opérateur T_α est **compact**. *Nous étudierons cette notion de façon plus détaillée dans la suite.*

Corrigé :

1. Pour tout n, on a l'inégalité
$$|\alpha_n x_n| \leq \|\alpha\|_\infty |x_n|,$$
et donc, si $x \in l^p$, on a bien $T_\alpha x \in l^p$ et
$$\|T_\alpha x\|_p \leq \|\alpha\|_\infty \|x\|_p.$$
Comme T_α est clairement linéaire, ceci montre la continuité de T_α et le fait que $\|T_\alpha\| \leq \|\alpha\|_\infty$. On va montrer que l'on a en fait l'égalité de ces deux quantités.
Soit $\varepsilon > 0$ et k_0 un indice tel que $\|\alpha\|_\infty - \varepsilon \leq |\alpha_{k_0}| \leq \|\alpha\|_\infty$. On prend alors pour x la suite nulle sauf au range k_0 où elle vaut 1. Pour ce choix de x, on a
$$T_\alpha x = \alpha_{k_0} x,$$
et donc
$$\|\alpha\|_\infty - \varepsilon \leq |\alpha_{k_0}| = \frac{\|T_\alpha x\|_p}{\|x\|_p} \leq \|T_\alpha\|.$$
Ceci étant valable pour tout choix de $\varepsilon > 0$, on en déduit
$$\|T_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty.$$

2. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. On note M une borne de $(x^k)_k$ et on écrit, pour un N donné
$$\begin{aligned}\|T_\alpha x^k - T_\alpha x\|_p^p &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^p |x_n^k - x_n|^p = \sum_{n=0}^{N} |\alpha_n|^p |x_n^k - x_n|^p + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\alpha_n|^p |x_n^k - x_n|^p \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} |\alpha_n|^p |x_n^k - x_n|^p + \|x^k - x\|_p^p \left(\sup_{n \geq N+1} |\alpha_n|^p \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} |\alpha_n|^p |x_n^k - x_n|^p + (2M)^p \left(\sup_{n \geq N+1} |\alpha_n|^p \right).\end{aligned}$$
Si maintenant on se donne un $\varepsilon > 0$, en utilisant l'hypothèse sur la suite α, on voit qu'on peut choisir un N assez grand pour rendre le second terme de l'inégalité plus petit que ε.
Ce choix étant fait, le premier terme devient une somme finie de termes qui tendent tous vers 0 quand $k \to \infty$ et on peut donc la rendre plus petite que ε pour tout $k \geq k_0$, avec k_0 assez grand.
Il s'en suit que pour tout $k \geq k_0$, on a
$$\|T_\alpha x - x\|_p^p \leq (1 + (2M)^p)\varepsilon,$$
ce qui prouve bien la convergence forte attendue.

■

Exercice 10 (Dual de l^p)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et p' l'exposant conjugué de p.

1. *Pour $y \in l^{p'}$ fixé, montrer que l'application*
$$\psi_y : x \in l^p \mapsto (x, y),$$
est linéaire et continue sur l^p et que sa norme (duale) vérifie
$$\|\psi_y\|_{(l^p)'} = \|y\|_{l^{p'}}.$$
2. *Vérifier que l'application*
$$\Psi : y \in l^{p'} \mapsto \psi_y \in (l^p)',$$
est linéaire et continue.
3. *Montrer que Ψ est une bijection isométrique entre $l^{p'}$ et $(l^p)'$ dont on déterminera l'application réciproque.*
Indication : *On pourra utiliser les opérateurs de troncature $T_N : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à une suite x associe la suite obtenue en ne conservant que les N premiers éléments que l'on complète par des 0 et se référer à l'exercice 6.*

Corrigé :

1. A y fixé, la linéarité de ψ_y est claire et d'après l'inégalité de Hölder (Proposition I.58) on a la continuité de ψ_y et le fait que
$$\|\psi_y\|_{(l^p)'} \leq \|y\|_{l^{p'}}.$$
Pour montrer l'égalité, on pose $\alpha = \frac{2-p}{p-1}$ de sorte que $1 + \alpha = \frac{1}{p-1} > 0$, et on a aussi
$$p(1 + \alpha) = \alpha + 2 = p'.$$
Enfin, on pose
$$x_n = |y_n|^\alpha y_n, \ \forall n \geq 0,$$
ce qui est bien défini même si $\alpha < 0$ car $1 + \alpha > 0$.
On a alors
$$\sum_{n=0} |x_n|^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^{p(\alpha+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^{p'} = \|y\|_{p'}^{p'} < +\infty,$$
ce qui montre que $x \in l^p$ et
$$\|x\|_p^p = \|y\|_{p'}^{p'}.$$
De plus, nous avons
$$\psi_y(x) = (x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^{\alpha+2} = \|y\|_{p'}^{p'},$$
et donc
$$\frac{\psi_y(x)}{\|x\|_p} = \frac{\|y\|_{p'}^{p'}}{\|x\|_p} = \|y\|_{p'}^{p'-p'/p} = \|y\|_{p'},$$
ce qui prouve l'égalité annoncée.
2. La linéarité de Φ vient de la bilinéarité de $(.,.)$ et l'égalité obtenue à la question précédente prouve la continuité de Φ et le fait que sa norme vaut 1.
3. Ce qu'il reste à démontrer c'est la surjectivité de Φ. Soit donc une forme linéaire continue $L \in (l^p)'$, il s'agit de trouver $y \in l^{p'}$ tel que $L = \Phi(y) = \varphi_y$. On voit aisément (en calculant L sur les éléments $(e_n)_n$ de la base canonique de l^p) que ce y, s'il existe, ne peut être que celui donné par
$$y_n = L(e_n), \ \forall n.$$
Il faut alors montrer que ce y est bien dans $l^{p'}$ et vérifie $L = \varphi_y$.
On fixe $N \geq 1$, et on introduit l'opérateur $P_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui, à un élément de $\mathbb{R}^N$, associe la suite obtenue en complétant le vecteur par des 0. Il est clair que c'est un opérateur linéaire continu de $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$ dans $(l^p, \|.\|_p)$. De plus, on a $\|P_N\| = 1$.

Ainsi, $L \circ P_N$ est une forme linéaire continue sur $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$ et on a par construction

$$L \circ P_N(z) = (T_N(y), P_N(z)), \ \ \forall z \in \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

D'après l'exercice 6, on a donc

$$\|T_N(y)\|_{p'} = \|L \circ P_N\|_{(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)'} \leq \|L\|_{(l^p)'} \|P_N\| = \|L\|_{(l^p)'},$$

ce qui signifie que

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^{p'} \leq \|L\|_{(l^p)'}^{p'}, \ \ \forall N \geq 1.$$

Par passage à la limite quand $N \to \infty$, cela montre bien que $y \in l^{p'}$ et que $\|y\|_{p'} \leq \|L\|$. Maintenant qu'on sait que $y \in l^{p'}$, on sait également que $T_N y$ converge vers y dans $l^{p'}$. De plus, pour toute suite $x \in l^p$, la formule (3) donne

$$L \circ T_N(x) = (T_N(y), T_N(x)) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n x_n,$$

et en passant à la limite $N \to \infty$, on trouve

$$L(x) = (y, x),$$

comme attendu.

Les calculs précédents montrent que l'application réciproque de Ψ est donnée par

$$\Phi : L \in (l^p)' \mapsto \Big(L(e_n)\Big)_{n \geq 0} \in l^{p'}.$$

■

Exercice 11 (Espaces de Sobolev vus en variable de Fourier)

On étudie ici un exemple d'espaces qui interviennent beaucoup dans les applications (pas exactement sous cette forme mais l'essentiel est là).
On se donne une suite $\Lambda = (\lambda_n)_n$ vérifiant

$$0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq ... \to +\infty.$$

Pour tout nombre réel $s \geq 0$, on définit le sous-espace vectoriel $h^s(\Lambda)$ de l^2 par

$$h^s(\Lambda) = \left\{ x \in l^2, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Dès lors que la famille Λ est fixée et qu'aucune confusion n'est possible, on notera simplement h^s.
On vérifie sans peine que la quantité

$$\|x\|_{h^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall x \in h^s,$$

définit une norme sur cet espace.

1. *Vérifier que $h^0 = l^2$ et que $h^s \subset h^{s'}$ avec injection continue pour tout couple (s, s') vérifiant $s > s' \geq 0$.*
2. *Montrer que $(h^s, \|.\|_{h^s})$ est un Hilbert.*
3. *Montrer que h^s est dense dans l^2.*
4. *Montrer que, pour tout $s > 0$, la boule unité de h^s définie par*

$$B_s = \{x \in h^s, \ \|x\|_{h^s} \leq 1\},$$

   est compacte dans $(l^2, \|.\|_{l^2})$.

5. *Pour $s > 0$, on introduit l'ensemble de suites défini par*

$$h^{-s}(\Lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-s} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$

   que l'on munit de sa norme naturelle

$$\|x\|_{h^{-s}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-s} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall x \in h^{-s}.$$

   Montrer que l^2 est dense dans h^{-s} et que $(h^{-s}, \|.\|_{h^{-s}})$ est le dual topologique de $(h^s, \|.\|_{h^s})$.

Corrigé :

1. L'identité $h^0 = l^2$ est claire. Soit $s > s' \geq 0$, comme λ_n tend vers l'infini, la suite $(\lambda_n^{s'-s})_n$ tend vers 0, et en particulier elle est bornée. On note M sa borne supérieure, de sorte qu'on a pour tout suite x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{s'} |x_n|^2 \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^s |x_n|^2,$$

   ce qui montre en effet l'injection continue de h^s dans $h^{s'}$ (avec pour norme $M^{1/2}$).

2. Il suffit d'abord de vérifier que la quantité

$$(x, y)_s = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s x_n y_n,$$

   est bien définie et constitue un produit scalaire sur h^s dont découle la norme proposée. Pour cela, il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux séries de termes général $(\lambda_n^{s/2} x_n)_n$ et $(\lambda_n^{s/2} y_n)$ qui sont bien des éléments de l^2.

Ensuite, il faut établir la complétude de cet espace. On peut faire la preuve directement ou alors constater qu'on peut établir une bijection linéaire isométrique entre l^2 et h^s, de sorte que la complétude de h^s découle de celle de l^2. Cette bijection s'écrit

$$T : x = (x_n)_n \in l^2 \mapsto (\lambda_n^{-s/2} x_n)_n \in h^s.$$

3. Il est clair que l'ensemble c_f des suites finies est contenu dans h^s. Comme c_f est dense dans l^2, on en déduit la densité de h^s dans l^2. On a utilisé la propriété (immédiate) suivante : Si $A \subset B \subset X$ et si A est dense dans X, alors B est dense dans X.
4. La technique est la même que précédemment. On prend une suite $(x^k)_k$ dans B_s et on veut trouver une sous-suite convergente. On observe tout d'abord que chaque suite $(x_n^k)_k$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et donc par le processus diagonal déjà rencontré on peut trouver une sous-suite $(x^{\varphi(k)})_k$ qui converge simplement vers une suite $x \in B_s$.
Montrons que la convergence est forte dans l^2. Il s'agit toujours de découper la somme intervenant dans la définition de la norme, en utilisant le fait que $(\lambda_n)_n$ est une suite croissante

$$\|x^{\varphi(k)} - x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{\varphi(k)} - x_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n^{\varphi(k)} - x_n|^2 + \lambda_{N+1}^{-s} \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^s |x_n^{\varphi(k)} - x_n|^2}_{\leq \|x^{\varphi(k)} - x\|_{h^s}^2 \leq 4}.$$

Il vient ainsi

$$\|x^{\varphi(k)} - x\|_2^2 \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n^{\varphi(k)} - x_n|^2 + 4\lambda_{N+1}^{-s}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut choisir N pour que le second terme soit plus petit que ε puis, ce N étant fixé, faire tendre k vers l'infini dans la première somme (qui est finie) pour aboutir au résultat.
5. On va montrer que, là aussi, l'ensemble des suites finies c_f (qui est contenu dans l^2) est dense dans $(h^{-s}, \|.\|_{h^{-s}})$. Pour cela, on choisit un $x \in h^{-s}$ quelconque et on introduit la suite tronquée $x^N \in c_f$ obtenue en ne conservant que les N premiers termes que l'on complète par des zéros. Un calcul immédiat montre que

$$\|x^N - x\|_{h^{-s}}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^{-s} |x_n|^2,$$

ce qui constitue le reste d'une série convergente. On a donc bien

$$x^N \xrightarrow[N\to\infty]{} x, \ \text{ dans } h^{-s},$$

ce qui montre bien la densité de c_f et donc de l^2 dans h^{-s}.
Montrons que pour tout $x \in h^s$ et $y \in h^{-s}$, la série de terme général $(x_n y_n)_n$ est absolument convergente. Pour cela, on écrit

$$|x_n y_n| = \big(\lambda_n^{s/2}|x_n|\big)\big(\lambda_n^{-s/2}|y_n|\big),$$

de sorte qu'on a affaire au produit terme à terme de deux séries dans l^2. Ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous montre bien le résultat souhaité ainsi que l'inégalité

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_{h^s} \|y\|_{h^{-s}}. \tag{4}$$

Ainsi, on peut définir une application bilinéaire continue qui à $x \in h^s$ et $y \in h^{-s}$ associe le "produit scalaire l^2" défini par

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n.$$

Ainsi, pour tout $y \in h^{-s}$, l'application $\varphi_y : x \in h^s \mapsto (x, y)$ est une forme linéaire continue sur h^s, et donc un élément du dual $(h^s)'$ qui par ailleurs, d'après (4), vérifie

$$\|\varphi_y\|_{(h^s)'} \leq \|y\|_{h^{-s}}.$$

Il est par ailleurs aisé de montrer (comme dans l'exercice 10) qu'on a en fait l'égalité.
On a ainsi construit une application linéaire isométrique (injective donc)

$$\Phi : y \in h^{-s} \mapsto \varphi_y \in (h^s)',$$

et il s'agit maintenant de montrer qu'elle est surjective.

Soit donc $L \in (h^s)'$ quelconque. On utilise la bijection isométrique T introduite à la question 2 de telle sorte que $L \circ T$ est maintenant une forme linéaire continue sur l^2.

Le dual de l^2 étant identifiable à l^2 lui-même par le produit scalaire de l^2 (d'après l'exercice 10, ou plus simplement d'après le Théorème de représentation de Riesz dans les Hilbert que nous reverrons plus loin dans le cours), il existe donc un unique $z \in l^2$ tel que

$$L \circ T(u) = (u, z), \ \ \forall u \in l^2.$$

Ceci s'écrit encore

$$L(x) = (T^{-1}(x), z), \ \ \forall x \in h^s,$$

or nous avons

$$(T^{-1}(x), z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{s/2} x_n z_n,$$

et donc, en posant $y_n = \lambda_n^{s/2} z_n$, on a bien $y \in h^{-s}$ et

$$L(x) = (x, y), \ \ \forall x \in h^s,$$

ce qui montre que $L = \varphi_y$ et le résultat est démontré.

■