Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse Fonctionnelle
TD 3 : Espaces de fonctions

Avec corrigés

Les numéros de Théorèmes, Propositions, etc ... font référence aux notes de cours.

Exercice 1

1. *Montrer que l'ensemble des fonctions constantes de X dans E, noté* $\mathrm{Const}(X, E)$ *est un sous-espace fermé de* $(B(X, E), \|.\|_\infty)$ *qui est isométrique à* E.
2. *Montrer que l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans E, noté* $\mathcal{C}_b^0(X, E)$ *est un sous-espace fermé de* $(B(X, E), \|.\|_\infty)$.
3. *Etablir que*
$$E \text{ est complet} \iff (B(X, E), \|.\|_\infty) \text{ est complet.}$$

Noter que la complétude éventuelle de (X, d) *n'a pas d'importance dans cette histoire.*

Corrigé :

1. L'application
$$a \in E \mapsto \varphi_a = (x \in X \mapsto a) \in \mathrm{Const}(X, E),$$
est clairement une bijection linéaire isométrique.
2. Le fait que c'est un sous-espace vectoriel est clair. La fermeture de cet espace est due au théorème de continuité des limites uniformes de suites de fonctions continues. Plus précisément si $(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}_b^0(X, E)$ qui converge vers une fonction f dans $(B(X, E), \|.\|_\infty)$, alors cette convergence est uniforme.
En conséquence, la fonction limite f est elle-même continue et bornée et donc appartient à $\mathcal{C}_b^0(X, E)$.
3. $\Rightarrow$ Cette implication a déjà été vue en cours. Rappelons rapidement la démarche. Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(B(X, E), \|.\|_\infty)$, alors par définition de la norme infinie, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans E qui est complet. Elle admet donc une limite notée $f(x)$.
Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(B(X, E), \|.\|_\infty)$, c'est une suite bornée et il existe donc $M \geq 0$ tel que
$$|f_n(x)| \leq M, \; \forall x \in X, \forall n \geq 0.$$
Par passage à la limite simple on déduit que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$ et donc que $f \in B(X, E)$.
Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \geq 0$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \forall x \in X |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$
En passant à la limite simple quand $p \to \infty$, on obtient
$$\forall n \geq n_0, \forall x \in X |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$
autrement dit
$$\forall n \geq n_0, \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$
ce qui prouve bien la convergence de $(f_n)_n$ vers f dans $(B(X, E), \|.\|_\infty)$.
$\Leftarrow$ Supposons que $B(X, E)$ est complet. Alors $\mathrm{Const}(X, E)$ est complet car c'est un ensemble fermé dans un espace métrique complet. On a vu à la question 1 que cet espace est isométrique à E qui est donc à son tour complet.

■

Exercice 2 (Espaces à poids)

Soit $w : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *une fonction positive définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall R > 0, \qquad 0 < \inf_{[-R,R]} w \leq \sup_{[-R,R]} w < +\infty.$$

Soit maintenant $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé ; on définit l'espace à poids*

$$\mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, E),\ \ \|f\|_{\infty,w} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(w(t)\|f(t)\|_E \Big) < +\infty \right\}.$$

1. *Montrer que* $\mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, E)$ *et que* $\|.\|_{\infty,w}$ *est une norme sur cet espace.*
2. *Montrer que si* E *est complet, alors* $\mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E)$ *est complet.*

Corrigé :

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E)$ (qui est non vide) et $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lambda f + g$ est continue et par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$w(t)\|f(t) + g(t)\|_E \leq w(t)\|f(t)\|_E + w(t)\|g(t)\|_E \leq \|f\|_{\infty,w} + \|g\|_{\infty,w}.$$

   Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que $f + g$ est dans $\mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E)$ et que

$$\|f + g\|_{\infty,w} \leq \|f\|_{\infty,w} + \|g\|_{\infty,w}.$$

   De la même façon, on montre l'homogéniété de la norme.

2. On procède de façon usuelle. Si $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(f_n(t))_n$ est de Cauchy dans E qui est complet. Il existe donc une fonction $f : \mathbb{R} \to E$ qui est la limite simple des $(f_n)_n$. Il faut maintenant montrer que f est dans $\mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E)$ et que la convergence a lieu au sens de cet espace.
   On fixe un $R > 0$ et on utilise l'hypothèse pour écrire

$$\left(\inf_{[-R,R]} w \right) \sup_{t\in[-R,R]} \|f_n(t) - f_{n+p}(t)\|_E \leq \|f_n - f_{n+p}\|_{\infty,w},$$

   et donc

$$\sup_{t\in[-R,R]} \|f_n(t) - f_{n+p}(t)\|_E \leq \frac{1}{\inf_{[-R,R]} w} \|f_n - f_{n+p}\|_{\infty,w}.$$

   Ceci montre que les restrictions des f_n à l'intervalle $[-R, R]$ sont de Cauchy pour la norme infinie et donc en particulier, convergent uniformément vers f sur $[-R, R]$. Ainsi f est continue sur cet intervalle. Ceci étant vrai pour toute valeur de $R > 0$, on a bien montré que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0,\ \ \|f_{n+p} - f_n\|_{w,\infty} \leq \varepsilon.$$

   Ceci s'écrit encore de la façon suivante

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \forall t \in \mathbb{R},\ \ w(t)\|f_n(t) - f_{n+p}(t)\|_E \leq \varepsilon.$$

   Par passage à la limite simple quand $p \to \infty$ dans cette inégalité on trouve

$$\forall n \geq n_0, \forall t \in \mathbb{R},\ \ w(t)\|f_n(t) - f(t)\|_E \leq \varepsilon.$$

   Cela montre dans un premier temps que $f \in \mathcal{C}^0_w(\mathbb{R}, E)$ et que

$$\forall n \geq n_0,\ \ \|f_n - f\|_{w,\infty} \leq \varepsilon.$$

   On a donc prouvé la convergence de la suite $(f_n)_n$ dans l'espace considéré.

■

Exercice 3 (Fonctions $\mathcal{C}_b^k$ sur un fermé)

Montrer que l'espace $\mathcal{C}_b^k(F)$ n'est autre, à isomorphisme près, que l'espace quotient

$$\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d)/\mathcal{F},$$

où $\mathcal{F}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d), \text{ tel que } f = 0 \text{ sur } F\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d)$ et en déduire que $(\mathcal{C}^k(F), \|.\|_{\mathcal{C}^k(F)})$ est un espace de Banach.

Corrigé :

Il s'agit simplement d'appliquer les définitions des espaces quotients. La seule chose à montrer c'est le caractère fermé de $\mathcal{F}$. On peut simplement utiliser la caractérisation par les suites : si $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ converge dans $\mathcal{C}_n^k(\mathbb{R}^d)$ vers une fonction f, alors en particulier elle converge simplement vers f. Pour tout $x \in F$, et tout $n \geq 0$, on a $f_n(x) = 0$ et donc par limite simple on déduit que $f(x) = 0$. Ceci montre bien que $f \in \mathcal{F}$. ■

Exercice 4 (Théorème de prolongement de Tietze-Urysohn)

Soit (X, d) un espace métrique, Y un fermé de X et $f \in \mathcal{C}_b^0(Y, \mathbb{R})$.

1. *On note $M = \|f\|_\infty$ et on définit*
$$Y^+ = \{y \in Y, M/3 \leq f(y) \leq M\},$$
$$Y^- = \{y \in Y, -M \leq f(y) \leq -M/3\}.$$
Montrer que Y^+ et Y^- sont deux fermés disjoints de (X, d).
2. *On introduit la fonction g_1 définie par*
$$g_1(x) = \frac{M}{3}\frac{d(x, Y^-) - d(x, Y^+)}{d(x, Y^+) + d(x, Y^-)}, \quad \forall x \in X.$$
Montrer que g_1 est bien définie et continue sur X et qu'elle vérifie
$$\sup_X |g_1| \leq \frac{M}{3}, \quad \text{et} \quad \sup_Y |f - g_1| \leq \frac{2M}{3}.$$
3. *Montrer que l'on peut construire une suite $(g_k)_k$ de fonctions continues sur X telle que pour tout k on ait*
$$\sup_X |g_k| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{M}{2}, \quad \text{et} \quad \sup_Y \left| f - \sum_{i=1}^k g_i \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k M.$$
4. *Montrer que la série de fonctions $\sum_{i=1}^{+\infty} g_i$ converge uniformément sur X vers une fonction continue bornée g et que celle-ci vérifie*
$$\sup_X |g| = \sup_Y |f|, \quad \text{et} \quad f = g, \text{ sur } Y.$$
5. *Montrer que l'on peut adapter la construction précédente pour assurer que le prolongement g obtenu ci-dessus vérifie les estimations plus précises suivantes*
$$\inf_X g = \inf_Y f, \quad \text{et} \quad \sup_X g = \sup_Y f.$$
6. *Montrer enfin que si $f \in \mathcal{C}^0(Y, \mathbb{R})$ n'est pas nécessairement bornée alors il existe quand même un prolongement $g \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ qui coincide avec f sur Y.*
7. *Donner un exemple montrant que si Y n'est pas fermé, ce résultat de prolongement peut être mis en défaut (y compris pour une fonction continue bornée).*

Corrigé :

1. Comme f est continue et que $Y^+ = f^{-1}([M/3, M])$ et $Y^- = f^{-1}([-M, -M/3])$, il est clair que Y^+ et Y^- sont des fermés de Y. Comme Y est lui-même un fermé de X, les deux ensembles $Y^\pm$ sont des fermés de X(voir la Proposition I.10). Ils sont très clairement disjoints.
2. D'après l'exercice 7 du TD1, les fonctions $x \mapsto d(x, Y^\pm)$ sont continues et ne s'annulent que pour $x \in Y^\pm$. Ainsi la fonction g_1 donnée dans l'énoncé est continue et bien définie sur X (le dénominateur ne s'annule jamais).
   L'estimation de $\sup_X |g_1|$ est immédiate.
   Maintenant, estimons $f(y) - g_1(y)$ pour $y \in Y$. Trois cas se présentent :
   — Si $y \in Y^+$, alors $g_1(y) = M/3$ et $M/3 \leq f(y) \leq M$ et donc $|f(y) - g_1(y)| \leq 2M/3$.
   — Si $y \in Y^-$, alors $g_1(y) = -M/3$ et $-M \leq f(y) \leq -M/3$ et donc $|f(y) - g_1(y)| \leq 2M/3$.
   — Si $y \notin Y^+ \cup Y^-$, nous avons $g_1(y) \in [-M/3, M/3]$ et $f(y) \in [-M/3, M/3]$ et donc à nouveau $|f(y) - g_1(y)| \leq 2M/3$.
3. On raisonne par récurrence, le cas $k = 1$ ayant déjà été fait au cran précédent. Si on suppose les fonctions $g_1, ..., g_k$ construites, on pose $F = f - \sum_{i=1}^k g_i$ qui vérifie donc $\sup_Y |F| = (2/3)^k M$ et on applique la construction précédente à la fonction F (et en remplaçant M par $(2/3)^k M$). Cela nous fournit une fonction g_{k+1} vérifiant les estimations proposées.
4. Par construction, les $(g_i)_i$ sont continues, et nous avons $\sup X|g_i| = (2/3)^i M$, ce qui fait que la série

$$\sum_{i\geq 1} \sup_X |g_i|$$

   est convergente, ce qui veut dire que la série de fonctions de terme général $(g_i)_i$ est normalement convergente. Comme l'espace $\mathcal{C}_b^0(X)$ est complet, cela implique que la série de fonctions de terme général $(g_i)_i$ converge uniformément sur X vers une certaine fonction continue g. La deuxième propriété des fonctions g_k montre que $g = f$ sur Y.
   Par ailleurs, nous avons

$$\sup_X |g| \leq \sum_{i\geq 1} \sup_X |g_i| = \frac{M}{2} \sum_{i\geq 1} (2/3)^i = \frac{M}{3} \frac{1}{1 - 2/3} = M = \sup_y |f|.$$

5. Soit $\alpha = \inf_Y f$ et $\beta = \sup_Y f$. Il suffit de translater f en posant

$$\tilde{f}(y) = f(y) - \frac{\alpha + \beta}{2},$$

   de sorte que $\sup_Y |\tilde{f}| = \frac{\beta-\alpha}{2}$. On construit alors un prolongement $\tilde{g}$ de $\tilde{f}$ tel que $\sup_X |\tilde{g}| = \frac{\beta-\alpha}{2}$. On pose alors $g = \tilde{g} + \frac{\alpha+\beta}{2}$, qui est bien un prolongement de f qui vérifie les propriétés voulues.
6. Supposons maintenant que f est seulement continue. On pose $\tilde{f} = \arctan \circ f$ qui est une fonction continue bornée (par $\pi/2$) sur l'espace Y et telle que $\sup_Y |\tilde{f}| = \pi/2$. On applique alors la précédente construction pour obtenir une fonction continue et bornée (par $\pi/2$) notée $\tilde{g}$ qui prolonge $\tilde{f}$ sur X.
   L'idée serait maintenant de poser $g = \tan \circ \tilde{g}$ mais cela n'est pas possible car nous ne sommes pas certains que $\tilde{g}$ n'atteint pas les valeurs $\pm\pi/2$ quelque part dans X (auquel cas la fonction tan n'est pas bien définie). Le point clé est que si cela arrive c'est forcément en dehors de Y (car sur Y, $\tilde{f}$ n'atteint pas les valeurs $\pm\pi/2$).
   Pour formaliser cela on introduit l'ensemble $Z = \tilde{g}^{-1}(\{-\pi/2, \pi/2\})$ qui est un fermé de X disjoint de Y (d'après la remarque précédente). On pose alors $F = Y \cup Z$ qui est un fermé de X et on définit sur F la fonction suivante

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Z, \\ 1 & \text{si } x \in Y. \end{cases}$$

   On observe que $\varphi|Z$ est continue sur Z et $\varphi_{|Y}$ est continue sur Y. Comme Y et Z sont des fermés disjoints, on peut vérifier que φ est continue sur $F = Y \cup Z$.
   On applique alors le théorème de prolongement démontré plus haut à la fonction φ (question 5). Il existe donc une fonction Φ continue sur X qui coincide avec φ sur F et telle que $0 \leq \Phi \leq 1$.
   On remplace maintenant $\tilde{g}$ par $\bar{g} = \Phi\tilde{g}$. Par construction, $\bar{g}$ est continue sur X, coincide avec $\tilde{g}$ sur Y et vérifie $-\pi/2 < \bar{g} < \pi/2$ sur X. Cette fois, les valeurs $\pm\pi/2$ ne sont pas atteintes et on peut donc poser à bon droit

$$g = \tan \circ \bar{g},$$

   qui vérifie bien toutes les propriétés attendues.

7. On considère $X = \mathbb{R}$ et $Y =]0, +\infty[$. La fonction $y \in Y \mapsto f(y) = 1/y$ n'admet pas de prolongement continu à X. Si on veut un exemple avec une fonction bornée, on peut considérer $y \in Y \mapsto f(y) = \sin(1/y)$.

■

Exercice 5 (Transformée de Fourier et Lemme de Riemann-Lebesgue)

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par la formule

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\, dx.$$

Remarque : *Selon les auteurs, il y a (ou pas) une constante qui dépend de π devant l'intégrale dans la définition de la transformée de Fourier.*

1. *Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}f$ est une fonction continue bornée et que*
$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}, \ \ \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$
2. *On suppose que f est dans $\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}f$ en fonction de $\mathcal{F}(f')$.*
En déduire que
$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0, \ \ \forall f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}).$$
3. *Montrer que*
$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0, \ \ \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$
4. *Pour tout $a < b$, calculer $\mathcal{F}1_{[a,b]}$ et en déduire une autre démonstration du résultat précédent.*

N.B. : *On a un résultat similaire en dimension d quelconque et pour les séries de Fourier.*

Corrigé :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$ nous avons
$$\left|f(x)e^{-ix\xi}\right| = |f(x)|.$$
Ceci prouve que la transformée de Fourier est bien définie et que $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
La continuité de $\mathcal{F}f$ est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée.
2. Si f est dans $\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$, on peut calculer $\mathcal{F}f'$ en intégrant par parties
$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-i\xi x}\, dx = i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\, dx = i\xi\mathcal{F}f(\xi).$$
D'après l'inégalité obtenue dans la première question nous avons donc
$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|}\|\mathcal{F}(f')\|_\infty \leq \frac{\|f'\|_{L^1}}{|\xi|},$$
ce qui montre bien que $\mathcal{F}f(\xi)$ tend vers 0 quand $\xi \to \pm\infty$.
3. Il s'agit maintenant d'utiliser la densité de l'ensemble $\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ fixée et $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon$.
On écrit alors, par linéarité de la transformée de Fourier et l'inégalité de la question 1,
$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(\xi)| &\leq |\mathcal{F}(f - f_\varepsilon)(\xi)| + |\mathcal{F}(f_\varepsilon)(\xi)| \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^1} + |\mathcal{F}(f_\varepsilon)(\xi)| \\ &\leq \varepsilon + |\mathcal{F}(f_\varepsilon)(\xi)|. \end{aligned}$$
On remarque que, comme à l'accoutumée, on s'est débrouillé pour que le premier terme du membre de droite ne dépend plus que d'un seul paramètre ε. On prend maintenant la limite supérieure en ξ
$$\limsup_{\xi \to \pm\infty} |\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^1} + \limsup_{\xi \to \pm\infty} |\mathcal{F}(f_\varepsilon)(\xi)|.$$
Le second terme de l'égalité ci-dessus est nul d'après la question précédente. On a donc au final obtenu
$$\limsup_{\xi \to \pm\infty} |\mathcal{F}f(\xi)| \leq \varepsilon.$$
Comme ceci est valable pour tout choix de ε, nous avons bien $\limsup_{\xi \to \pm\infty} |\mathcal{F}f(\xi)| = 0$ et donc comme la quantité étudiée est positive, nous concluons que $\lim_{\xi \to \pm\infty} |\mathcal{F}f(\xi)| = 0$.

4. Il s'agit d'un calcul élémentaire
$$\mathcal{F}1_{[a,b]}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\,dx = \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-i\xi},$$
et donc
$$|\mathcal{F}1_{[a,b]}(\xi)| \leq \frac{2}{|\xi|},$$
ce qui prouve que
$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \mathcal{F}1_{[a,b]}(\xi) = 0.$$
Par linéarité de la transformée de Fourier, ceci est donc encore vrai pour toutes combinaisons linéaires d'indicatrices. On peut dès lors utiliser la densité de l'ensemble de ces fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ pour conclure de la même façon que dans la question précédente.

■

Exercice 6 (Opérateurs de composition)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $p, q \in [1, +\infty[$. On se donne une fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et qui vérifie, pour un certain $C \geq 0$,
$$|\theta(t)| \leq C(1 + |t|^{\frac{q}{p}}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1. *Montrer que pour toute fonction $f \in L^q(\Omega)$, on a $\theta \circ f \in L^p(\Omega)$.*
2. *Montrer que l'application (non-linéaire ! !)*
$$f \in L^q(\Omega) \mapsto \theta \circ f \in L^p(\Omega),$$
est continue.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in \Omega$, on a
$$|\theta \circ f(x)|^p \leq C^p(1 + |f(x)|^{\frac{q}{p}})^p \leq 2^{p-1}C^p(1 + |f(x)|^q).$$
Le membre de droite de cette inégalité est intégrable par hypothèse et donc on a bien $\theta \circ f \in L^p(\Omega)$.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge dans $L^q(\Omega)$ vers une fonction f. Il s'agit de montrer que
$$\|\theta \circ f_n - \theta \circ f\|_{L^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
On va raisonner par l'absurde en supposant que cette convergence n'est pas vraie. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que
$$\|\theta \circ f_{\varphi(n)} - \theta \circ f\|_{L^p} \geq \varepsilon, \quad \forall n. \tag{1}$$
En utilisant la Proposition I.76, on peut extraire une nouvelle sous-suite $(f_{\varphi(\psi(n))})_n$ qui vérifie toujours (1) mais qui en plus converge presque partout vers f et vérifie
$$|f_{\varphi(\psi(n))}| \leq g, \quad \text{p.p. et pour tout } n,$$
où g est une fonction de L^q.
On calcule maintenant, en utilisant l'hypothèse,
$$\begin{aligned}|\theta \circ f_{\varphi(\psi(n))}(x) - \theta \circ f(x)| &\leq C(1 + |f_{\varphi(\psi(n))}(x)|^{\frac{q}{p}}) + |\theta \circ f(x)|\\ &\leq C(1 + |g(x)|^{\frac{q}{p}}) + |\theta \circ f(x)|,\end{aligned}$$
et comme la fonction du membre de droite de cette inégalité est dans $L^p(\Omega)$, on dispose donc d'une domination uniforme de la suite de fonctions $\theta \circ f_{\varphi(\psi(n))}(x) - \theta \circ f(x)$. De plus, cette suite de fonctions tend vers 0 presque partout car θ est continue et $(f_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge presque partout vers f.
Le théorème de convergence dominée (dans l'espace $L^p(\Omega)$) nous donne donc
$$\int_\Omega |\theta \circ f_{\varphi(\psi(n))}(x) - \theta \circ f(x)|^p\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
ce qui contredit manifestement (1) et le résultat est démontré.

■

Exercice 7 (Opérateurs à noyau)

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ deux ouverts non vide et $K \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Pour toute fonction $u \in L^2(\Omega_2)$ et pour tout $x \in \Omega_1$, on définit (si cette intégrale converge)

$$(Tu)(x) = \int_{\Omega_2} K(x,y)u(y)\,dy.$$

Démontrer que Tu est bien définie presque partout et que T est un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega_2)$ dans $L^2(\Omega_1)$ dont la norme vérifie $|||T||| \leq \|K\|_{L^2(\Omega_1\times\Omega_2)}$.
Quel résultat similaire obtient-on si $K \in L^p(\Omega_1 \times \Omega_2)$ pour un certain $1 < p < +\infty$?

Corrigé :

Le premier problème que nous avons est de justifier, au moins pour presque tout x, la convergence de l'intégrale qui définit Tu. Pour cela, on commence par travailler sur les valeurs absolues des fonctions mises en jeu. Autrement dit, pour tout $x \in \Omega_1$, on pose

$$\bar{T}u(x) = \int_{\Omega_2} |K(x,y)||u(y)|\,dy \in [0,+\infty]. \tag{$\star$}$$

Ceci est bien défini car les fonctions que l'on intègre sont mesurables et positives. Il nous faut maintenant montrer que $\bar{T}u(x)$ est une quantité finie pour presque tout x.

On commence par appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\bar{T}u(x)|^2 \leq \left(\int_{\Omega_2} |K(x,y)|^2\,dy\right)\left(\int_{\Omega_2} |u(y)|^2\,dy\right).$$

On remarque que le second facteur du terme de droite est fini alors que le premier peut être infini. On peut maintenant intégrer par rapport à x cette inégalité

$$\int_{\Omega_1} |\bar{T}u(x)|^2\,dx \leq \left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |K(x,y)|^2\,dy\right)\,dx\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega_2)}.$$

Le théorème de Fubini-Tonelli (dont les seules hypothèses sont la positivité et la mesurabilité des fonctions) nous dit que le terme contenant K est fini et que l'on a

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |K(x,y)|^2\,dy\right)\,dx = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} |K(x,y)|^2\,dx\,dy = \|K\|^2_{L^2(\Omega_1\times\Omega_2)}.$$

Ainsi, la fonction mesurable $\bar{T}u$ est de carré intégrable sur Ω_1 et en particulier, elle est finie pour presque tout x. En revenant à la définition ($\star$) de $\bar{T}$, on en déduit que pour presque tout x, la fonction $y \mapsto K(x,y)u(y)$ est intégrable sur Ω_2, ce qui justifie la définition de $Tu(x)$ pour ces valeurs de x.

De plus, on a la majoration

$$|Tu(x)| \leq \bar{T}u(x), \text{ pour presque tout } x,$$

et donc par intégration

$$\int_{\Omega_1} |Tu(x)|^2\,dx \leq \int_{\Omega_1} |\bar{T}u(x)|^2\,dx \leq \|K\|^2_{L^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|u\|^2_{L^2(\Omega_2)}.$$

On a donc bien montré que $Tu \in L^2(\Omega_1)$ et que

$$\|Tu\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|K\|_{L^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|u\|_{L^2(\Omega_2)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega_2).$$

Comme T est clairement linéaire, on a bien montré qu'il s'agit d'un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega_2)$ dans $L^2(\Omega_1)$ avec l'estimation de la norme attendue.

En appliquant les mêmes techniques que dans la question précédente et en utilisant cette fois les inégalités de Hölder adéquates, on obtient que l'opérateur T est bien défini de $L^{p'}(\Omega_1)$ dans $L^p(\Omega_2)$ et que

$$|||T|||_{L(L^{p'}(\Omega_2),L^p(\Omega_1))} \leq \|K\|_{L^p(\Omega_1\times\Omega_2)}.$$

■

Exercice 8 (Opérateurs de translation)

On se place dans $\Omega = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^d$ conviendrait tout aussi bien) et pour tout $h \in \mathbb{R}$, on considère l'opérateur de translation dans L^p défini par

$$f \in L^p(\Omega) \mapsto \tau_h f = f(\cdot + h) \in L^p(\Omega).$$

1. *Montrer que si $1 \leq p < +\infty$, on a pour tout $f \in L^p(\Omega)$,*

$$\tau_h f \xrightarrow[h\to 0]{} f, \text{ dans } L^p(\Omega).$$

2. *Montrer que le résultat précédent est faux pour $p = +\infty$.*
3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ (voir l'exercice 5) vérifie*

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|\tau_{\pi/\xi} f - f\|_{L^1}.$$

En déduire une nouvelle preuve du Lemme de Riemann-Lebesgue.

4. *Soit $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, à support dans $]-1,1[$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \eta\, dx = 1$. Une telle fonction existe, même si ça n'est pas totalement trivial à montrer.*
Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\eta(x/\varepsilon)$ et pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (f \star \eta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

(a) *Vérifier que $f \star \eta_\varepsilon$ est une fonction bien définie pour tout ε et que l'on a*

$$(f \star \eta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - \varepsilon z)\eta(z)\, dz,$$

$$\|f \star \eta_\varepsilon\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}, \ \forall \varepsilon > 0.$$

(b) *Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $f \star \eta_\varepsilon$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

(c) *Démontrer que*

$$\|f - f \star \eta_\varepsilon\|_{L^1} \leq \sup_{|h|\leq\varepsilon} \|\tau_h f - f\|_{L^1}.$$

En déduire que

$$f \star \eta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f, \text{ dans } L^1(\mathbb{R}).$$

(d) *Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans L^1.*

Corrigé :

1. Par un simple changement de variable linéaire (une translation de pas h), nous avons pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|\tau_h f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}} |\tau_h f(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x+h)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx = \|f\|_{L^p}^p.$$

Ainsi les opérateurs τ_h sont des isométries.
Soit $f \in L^p(\Omega)$ quelconque. On sait que l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ et donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ telle que

$$\|g_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

En utilisant la propriété d'isométrie de τ_h nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p} &\leq \|\tau_h f - \tau_h g_\varepsilon\|_{L^p} + \|\tau_h g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - f\|_{L^p}\\ &\leq 2\|f - g_\varepsilon\|_{L^p} + \|\tau_h g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p}\\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Le résultat sera donc prouvé si on montre que, ε étant fixé, on a $\tau_h g_\varepsilon \xrightarrow[h\to 0]{} g_\varepsilon$ dans L^p.
Comme g_ε est à support compact, il existe $R > 0$ tel que

$$\operatorname{Supp} g_\varepsilon \subset B(0, R).$$

Ainsi, pour tout $|h| < 1$ nous avons
$$\operatorname{Supp} \tau_h g_\varepsilon \subset B(0, R+1),$$
de plus, la fonction $|g_\varepsilon|$ est bornée par une constante notée M.
On peut donc écrire
$$\begin{aligned}\|\tau_h g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}} |\tau_h g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p \, dx \\ &= \int_{B(0,R+1)} |\tau_h g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p \, dx,\end{aligned}$$
et appliquer le théorème de convergence dominée (dans $L^1(B(0, R+1))$) car nous avons
$$|\tau_h g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)| \leq 2M, \;\; \forall x \in B(0, R+1), \forall |h| < 1,$$
ce qui est bien une majoration par une fonction intégrable (sur le borne $B(0, R+1)$) et
$$\tau_h g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x) \xrightarrow[h \to 0]{} 0, \;\; \forall x \in B(0, R+1),$$
car g_ε est continue.
Le résultat est démontré.

2. Prenons $f = 1_{[0,1]}$ et $h > 0$ petit, de sorte que $\tau_h f = 1_{[-h,1-h]}$ et donc
$$\|f - \tau_h f\|_\infty = 1, \;\; \forall h > 0,$$
ce qui montre bien que $\tau_h f$ ne converge pas vers f quand $h \to 0$.

3. Il s'agit d'un simple changement de variable affine $y + \pi/\xi$
$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y + \pi/\xi)e^{-iy\xi - i\pi} \, dy = -\int_{\mathbb{R}} f(y + \pi/\xi)e^{-iy\xi} \, dy.$$
Autrement dit, nous avons obtenu
$$\mathcal{F}f(\xi) = -\mathcal{F}(\tau_{\pi/\xi} f)(\xi),$$
et donc par demi-somme
$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\Big(f - \tau_{\pi/\xi} f\Big)(\xi).$$
Ainsi, d'après l'inégalité de la première question de l'exercice 5, nous déduisons
$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \frac{1}{2}\|f - \tau_{\pi/\xi} f\|_{L^1}.$$
Le Lemme de Riemann-Lebesgue est donc une conséquence de la continuité dans L^1 des translations $h \mapsto \tau_h f$.

4. (a) La fonction η_ε est bornée (par $1/\varepsilon$!) et f est intégrable, donc la fonction sous l'intégrale définissant le produit de convolution est bien intégrable à son tour. La première formule proposée s'obtient juste par changement de variable $y = x - \varepsilon z$. Par ailleurs nous avons
$$|f \star \eta_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)||\eta_\varepsilon(x-y)| \, dy,$$
et par intégration (toutes les fonctions sont positives)
$$\int_{\mathbb{R}} |f \star \eta_\varepsilon(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||\eta_\varepsilon(x-y)| \, dy \right) \, dx.$$
Comme nous avons affaire à des fonctions positives, le théorème de Fubini-Tonelli s'applique et nous dit que nous pouvons intervertir les intégrales dans le second membre (en acceptant que ces intégrales soient éventuellement infinies). Nous obtenons
$$\begin{aligned}\|f \star \eta_\varepsilon\|_{L^1} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||\eta_\varepsilon(x-y)| \, dx \right) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(|f(y)| \int_{\mathbb{R}} |\eta_\varepsilon(x-y)| \, dx \right) \, dy \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\eta_\varepsilon\|_{L^1} \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\eta\|_{L^1} \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$
Les dernières égalités proviennent du changement de variable $x \to x/\varepsilon$ et des propriétés de η.

(b) Il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue de dérivation sous l'intégrale autant que nécessaire.

(c) Comme $\int_{\mathbb{R}^d} \eta = 1$, on peut écrire

$$f(x) - f \star \eta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x - \varepsilon z))\eta(z)\, dz,$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et le fait que η est à support dans $]-1,1[$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f \star \eta_\varepsilon(x)|\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x - \varepsilon z)|\eta(z)\, dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \eta(z) \|\tau_{-\varepsilon z} f - f\|_{L^1}\, dz \\
&\leq \sup_{z \in]-1,1[} \|\tau_{-\varepsilon z} f - f\|_{L^1} \\
&= \sup_{h \in]-\varepsilon,\varepsilon[} \|\tau_h f - f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

La convergence demandée est donc une conséquence de la continuité des translations établie plus haut.

(d) La question précédente répond presque à la question, à ceci près que sans autre hypothèse nous ne pouvons pas assurer que $f \star \eta_\varepsilon$ est à support compact. Par contre, ceci est vrai dès que f est elle-même à support compact. En effet, d'après la formule de la question (a) on peut vérifier que si f est à support dans $[-R, R]$ alors pour $\varepsilon < 1$, $f \star \eta_\varepsilon$ est à support dans $[-R-1, R+1]$.
Si $f \in L^1$ est quelconque on considère donc la fonction $f_R = f 1_{[-R,R]}$ puis $f_{R,\varepsilon} = f_R \star \eta_\varepsilon$ qui est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. On écrit ensuite

$$\|f - f_{R,\varepsilon}\|_{L^1} \leq \|f - f_R\|_{L^1} + \|f_R - f_R \star \eta_\varepsilon\|_{L^1}.$$

Pour $\delta > 0$ fixé, on peut d'abord choisir $R > 0$ pour que $\|f - f_R\|_{L^1} \leq \delta$ (convergence dominée !) puis, une fois cette valeur de R fixée, choisir ε pour que $\|f_R - f_R \star \eta_\varepsilon\| \leq \delta$ d'après la question précédente. On obtient

$$\|f - f_{R,\varepsilon}\|_{L^1} \leq 2\delta.$$

■