Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse Fonctionnelle
TD 5 : Densité et compacité dans $\mathcal{C}^0$

Exercice 1 (A propos des méthodes de quadratures)

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence des méthodes d'approximation des intégrales.
Pour tout $n \geq 1$, on se donne une famille de n points distincts de $[a, b]$ notés

$$a \leq x_1^n < ... < x_n^n \leq b.$$

1. *Montrer que l'application linéaire*

$$\Phi_n : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \begin{pmatrix} P(x_1^n) \\ \vdots \\ P(x_n^n) \end{pmatrix},$$

   est bijective.

2. *Montrer qu'il existe un unique choix de coefficients réels $(\omega_i^n)_{1\leq i\leq n}$ tels que*

$$\int_a^b P(x)\, dx = \sum_{i=1}^n \omega_i^n P(x_i^n), \ \ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

   Vérifier que

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^n = b - a.$$

3. *On définit maintenant l'application linéaire (appelée* méthode de quadrature*) par*

$$I_n : f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mapsto I_n(f) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n f(x_i^n).$$

   D'après la question précédente, on a $I_n(f) = \int_a^b f$ dès que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
   On veut maintenant déterminer si on peut approcher l'intégrale de n'importe quelle fonction continue par la formule $I_n(f)$.

   (a) *On suppose que*

$$M = \sup_{n\geq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\omega_i^n| \right) < +\infty.$$

   Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ on a

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

   (b) *On suppose maintenant que $(I_n(f))_n$ converge vers $\int_a^b f$ pour toute fonction continue f. Montrer que l'on a*

$$\sup_{n\geq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\omega_i^n| \right) < +\infty.$$

   (c) *Montrer que si les coefficients ω_i^n sont tous positifs, alors on a bien convergence de la méthode.*

Il se trouve qu'il est toujours possible de choisir les points x_i^n de sorte que les poids ω_i^n soient effectivement positifs. De plus ces méthodes peuvent être choisies pour être exactes sur les polynômes de degré au plus $2n$ (Méthodes de Gauss).

Exercice 2 (Espaces de Sobolev)

Soit $K = [0,1]$ et $1 < p \leq \infty$, on note $W^{1,p}(]0,1[)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ définies par

$$W^{1,p}(]0,1[) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]), \;\; \textit{t.q. } \exists a \in \mathbb{R}, \exists g \in L^p(]0,1[) \textit{ vérifiant } f(x) = a + \int_0^x g(t)\,dt \textit{ pour tout } x \right\}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1])$ est un sous-ensemble de $W^{1,p}(]0,1[)$. Que représente alors la fonction g dans la définition de cet espace ?*
2. *Montrer que si $f \in W^{1,p}(]0,1[)$ est fixée, alors la fonction $g \in L^p(]0,1[)$ apparaissant dans la définition de l'espace est unique (presque partout bien sûr ...). On notera $g = f'$.*
3. *Pour tout $f \in W^{1,p}(]0,1[)$, on note*
$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}.$$
Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $W^{1,p}$ et que $W^{1,p}$ est complet.
4. *Montrer que si $f \in W^{1,p}(]0,1[)$, alors on a $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ avec $\alpha = 1 - 1/p$ et que l'on a*
$$\|f\|_\infty + |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \leq C\|f\|_{W^{1,p}}, \;\; \forall f \in W^{1,p}(]0,1[),$$
pour un $C > 0$ indépendant de f.
5. *Montrer que, si une suite $(f_n)_n \subset W^{1,p}$ est bornée en norme $W^{1,p}$, alors on peut en trouver une sous-suite qui converge uniformément sur $[0,1]$.*

Exercice 3 (Un peu d'analyse fonctionnelle discrète)

Pour tout $n \geq 1$, on note
$$x_i^n = \frac{i}{n}, \; 0 \leq i \leq n,$$
une subdivision de $[0,1]$ par des points équidistants de pas $h_n = 1/n$. On définit ensuite une fonction constante par morceaux
$$f_n = \sum_{i=1}^n f_i^n 1_{[x_{i-1}^n, x_i^n[},$$
puis la quantité suivante
$$|f_n|_{1,\infty,n} = \max_{1\leq i \leq n-1} \frac{|f_{i+1}^n - f_i^n|}{h_n},$$

1. *Faire un dessin pour comprendre la situation et une interprétation intuitive de la quantité $|f_n|_{1,\infty,n}$.*
2. *On suppose maintenant que la suite $(f_n)_n$ vérifie, pour un certain $C > 0$, la propriété*
$$\sup_{n\geq 1} \left(\|f_n\|_\infty + |f_n|_{1,\infty,n} \right) \leq C.$$
   (a) *Pour tout $n \geq 1$, construire une fonction continue g_n, affine par morceaux, telle que*
   $$g_n\left(\frac{x_{i-1}^n + x_i^n}{2}\right) = f_i^n, \;\; \forall 1 \leq i \leq n.$$
   et
   $$\mathrm{Lip}(g_n) \leq C, \;\; \textit{et } \; \|g_n - f_n\|_\infty \leq C/n.$$
   (b) *Montrer qu'il existe une sous-suite $(g_{\varphi(n)})_n$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Montrer enfin que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge uniformément vers f.*
   (c) *Montrer un résultat similaire si on remplace la borne sur la quantité $|f_n|_{1,\infty,n}$ par une borne sur $|f_n|_{1,p,n}$ où $1 < p < +\infty$ et*
   $$\|f_n\|_{1,p,n} = \left(\sum_{i=1}^n h_n \left| \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h_n} \right|^p \right)^{1/p}.$$