Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse Fonctionnelle
TD 6 : Analyse Hilbertienne

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_1, ..., e_n\}$ une famille orthonormée dans H. Calculer la projection orthogonale sur $K = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$.
Même question si $\{e_1, ..., e_n\}$ est simplement une famille libre de H.

Exercice 2

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et $H = L^2(\Omega)$ muni de son produit scalaire usuel. On se donne une fonction mesurable $h : \Omega \to \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$K = \{u \in L^2(\Omega),\ \ u \leq h,\ \textit{p.p.}\},$$

est un ensemble convexe fermé de H. Calculer la projection orthogonale P_K.

Exercice 3 (Séries de Fourier)

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(]0, 1[)$.

1. *On définit les fonctions suivantes*
$$c_0(x) = 1,$$
$$c_n(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi n x),\ \ \forall n \geq 1,$$
$$s_n(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi n x),\ \ \forall n \geq 1.$$
Montrer que la famille $F = \{c_n, n \geq 0\} \cup \{s_n, n \geq 1\}$ est une base hilbertienne de H.
Tout élément $u \in H$ s'écrit donc sous la forme
$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, c_n\rangle c_n + \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, s_n\rangle s_n,$$
cette série étant convergente dans L^2.
Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ et $u(0) = u(1)$, alors la série ci-dessus est normalement convergente dans $\mathcal{C}^0([0, 1])$.
2. *On définit maintenant les fonctions*
$$S_N(x) = \sqrt{2}\sin(\pi N x),\ \ \forall N \geq 1.$$
Montrer que la famille $\{S_N, N \geq 1\}$ est également une base Hilbertienne de H.

Exercice 4 (Résolution de l'équation de la chaleur)

On reprend les notations de l'exercice précédent. Soit $u_0 \in L^2(]0,1[)$ que l'on écrit de manière unique sous la forme

$$u_0 = \sum_{n\geq 1} u_{0,n} S_n.$$

1. *Pour tout $t > 0$, montrer que la formule*

$$u_t = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi^2 t} u_{0,n} S_n,$$

   définit bien un unique élément de $L^2(]0,1[)$.

2. *Montrer que pour tout $t > 0$, la série qui définit u_t est normalement convergente dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. En déduire que $u_t \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et qu'elle vérifie*

$$u_t(0) = u_t(1) = 0.$$

   On peut donc désormais définir une fonction $u :]0,+\infty[\times[0,1] \to \mathbb{R}$ par la formule

$$u(t,x) = u_t(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi^2 t} u_{0,n} S_n(x).$$

3. *Montrer la fonction u ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[\times[0,1]$ et qu'elle vérifie l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \;\; \forall t > 0, \; \forall x \in [0,1].$$

4. *Montrer que*

$$\lim_{t\to 0} u_t = u_0, \;\; \textit{au sens de la convergence dans } L^2(\Omega).$$

   Montrer que si u_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $u_0(0) = u_0(1) = 0$ alors la convergence ci-dessus a lieu au sens de la norme uniforme.

On a donc établi l'existence d'une solution $u : [0,+\infty[\times[0,1]$ au problème de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; \forall t > 0, \forall x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \;\; \forall t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \;\; \textit{pour presque tout } x \in]0,1[. \end{cases}$$

Il est assez facile de voir qu'une telle solution est nécessairement unique.

Exercice 5 (Convergence fort-faible revisitée)

Soient H_1, H_2, H_3 trois espaces de Hilbert et $B : H_1 \times H_2 \to H_3$ une application bilinéaire continue. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de H_1 qui converge faiblement vers u et $(v_n)_n$ une suite d'éléments de H_2 qui converge fortement vers v.
Alors, la suite $(B(u_n, v_n))_n$ converge faiblement vers $B(u,v)$ dans H_3.

Exercice 6 (Caractérisation des opérateurs compacts dans les Hilbert)

Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire entre deux Hilbert H_1 et H_2. On suppose que

$$\textit{pour tout suite } (u_n)_n \textit{ telle que } u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \textit{ on a } \|Tu_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Montrer que T est compact.

Exercice 7 (Convexes fermés faibles = Convexes fermés forts)

Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'un ensemble $A \subset H$ est faiblement fermé si, pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge faiblement vers un $u \in H$, on a $u \in A$.

1. *Vérifier que tout ensemble faiblement fermé est fortement fermé (i.e. fermé au sens usuel).*
2. *La réciproque de la propriété précédente est fausse en général. Montrer ainsi que la sphère unité de l'espace de Hilbert l^2 est fortement fermée mais pas faiblement fermée.*
3. *En revanche, montrer que si A est un* **convexe** *fermé fort, alors A est faiblement fermé.*

Exercice 8 (Théorème de Hahn-Banach. Cas Hilbertien)

Soit H un espace de Hilbert et A, B deux convexes fermés non vides de H tels que $A \cap B = \emptyset$. On suppose qu'au moins l'un de ces deux ensembles est borné. Le but de l'exercice est de montrer un résultat de **séparation** *qui dit qu'il existe un hyperplan fermé dans H tel que A et B soient situés strictement de part et d'autre de cet hyperplan.*

1. *On note $C = A - B$. Montrer que C est un convexe fermé fort.*
2. *On pose $u = P_C 0$. On écrit $u = a - b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Montrer que*
$$a = P_A(b)$$
$$b = P_B(a).$$
3. *Montrer qu'il existe $\xi \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ tel que*
$$A \subset \{u \in H, \ \langle u, \xi \rangle \leq \alpha\},$$
$$B \subset \{u \in H, \ \langle u, \xi \rangle \geq \beta\}.$$

Exercice 9 (Fonctions convexes et convergence faible)

Soit H un espace de Hilbert et $F : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

1. *Montrer que pour toute suite $(u_n)_n$ qui converge faiblement vers une limite u, nous avons*
$$F(u) \leq \liminf_{n \to \infty} F(u_n).$$
2. *Soit K un convexe fermé borné de H. Montrer que F est minorée et atteint sa borne inférieure sur K.*

Exercice 10 (Prolongement d'opérateurs)

Soit H un espace de Hilbert et E un espace de Banach. Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel de H (muni de la norme induite).
Pour tout opérateur linéaire continu $\tilde{T} : F \to E$, montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu $T : H \to E$ tel que
$$T = \tilde{T} \text{ sur } F,$$
$$\|T\|_{L(H,E)} = \|\tilde{T}\|_{L(F,E)}.$$

Exercice 11

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu. Montrer que l'image d'un convexe fermé borné de H_1 par T est un convexe fermé borné de H_2.

Exercice 12

Soient H_1, H_2, H_3 trois espaces de Hilbert dont on note B_1, B_2 et B_3 les boules unités fermées respectives.
Soient $T : H_1 \to H_3$, $S : H_2 \to H_3$ deux opérateurs linéaires continus.
Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes.

1. *On a l'inclusion*
$$Im\, T \subset Im\, S.$$
2. *Il existe un nombre $c \geq 0$ tel que*
$$\|T^* u\|_1 \leq c\|S^* u\|_2, \ \ \forall u \in H_3.$$
3. *Il existe un opérateur linéaire continu $C : H_1 \to H_2$ tel que*
$$T = S \circ C.$$

Il est remarquable que l'inclusion entre images d'opérateurs soit équivalent à l'existence d'une constante $c > 0$ vérifiant une certaine inégalité fonctionnelle entre les opérateurs adjoints.
A titre d'exemple, si on veut montrer qu'un opérateur S est surjectif, on applique le résultat avec $H_1 = H_3$ et $T = \mathrm{Id}$ et on arrive à l'équivalence
$$S \text{ est surjectif} \Longleftrightarrow \exists c > 0, \ \ \|u\|_1 \leq c\|S^* u\|_2, \ \ \forall u \in H_1.$$
Cela ramène un problème de surjectivité à un problème d'estimation a priori de la solution u de l'équation $T^* u = f$ en fonction de f (sans avoir à se poser la question de l'existence d'une telle solution !). De plus, dans le cas où S est surjectif, il existe un inverse à droite continu.