Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse fonctionnelle. Devoir à la maison

À rendre au plus tard le : 19 Octobre 2015

I Ensembles convexes

On se donne E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est **convexe** si, pour tout couple de points $x, y \in A$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$tx + (1-t)y \in A.$$

Géométriquement, cela signifie que le segment joignant deux points quelconques de l'ensemble A doit être entièrement contenu dans A.

1. (a) Montrer qu'une intersection quelconque de convexes de E est convexe.
   (b) Montrer sur un exemple simple qu'une réunion de deux convexes de E n'est pas nécessairement convexe.
2. On munit désormais E d'une norme $\|.\|$ et on considère une partie $A \subset E$.
   (a) Montrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
   (b) Montrer que si A est convexe, alors $\overset{\circ}{A}$ est convexe.
3. Soit A un ensemble convexe. Montrer que pour tout $n \geq 2$, toute famille $x_1, ..., x_n$ de points de A et toute famille $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans $[0,1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

II Enveloppe convexe

1. Soit A une partie quelconque de E.
   (a) Montrer que l'ensemble

   $$\mathcal{A} = \{B \subset E, \text{ t.q. } B \text{ est convexe et } A \subset B\},$$

   est non vide.
   (b) On note

   $$\mathrm{Conv}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{A}} B.$$

   Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est le plus petit convexe qui contient A ; on l'appelle **enveloppe convexe de** A.
   (c) Montrer que

   $$\mathrm{Conv}(A) = \Big\{ x \in E, \text{ t.q. il existe } k \geq 1, x_1, ..., x_k \in A \text{ et } \lambda_1, ..., \lambda_k \in [0,1] \\ \text{tels que } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \text{ et } x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \Big\}.$$

   Autrement dit : $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A, ou encore des barycentres à coefficients positifs d'éléments de A.
2. Montrer que si A est un ouvert de E, alors $\mathrm{Conv}(A)$ est également un ouvert de E.
3. On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ et on considère $A = \{(0,0)\} \cup \big(\{1\} \times \mathbb{R}\big)$. Montrer que A est fermé et calculer $\mathrm{Conv}(A)$. Qu'en déduisez-vous ?

III Convexes et normes

Dans cette partie on se place dans $E = \mathbb{R}^n$. On dit qu'une partie A de E est symétrique si $-A = A$ c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, \quad -x \in A.$$

1. Soit $\|.\|$ une norme sur E. Montrer que la boule unité ouverte $B_{\|.\|}(0,1)$ de E est un ensemble convexe, ouvert, borné, symétrique et qui contient 0.

   On va montrer dans la suite que ces propriétés caractérisent les boules ouvertes de E.

2. Soit $A \subset E$ un ensemble convexe, ouvert, symétrique, borné et qui contient l'origine 0.

   Pour tout $x \in E$, on considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ défini par

$$\Lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda > 0, \text{ t.q. } \frac{1}{\lambda} x \in A \right\},$$

   et on note sa borne inférieure

$$N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \big(\Lambda(x)\big).$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, $\Lambda(x)$ est non vide et qu'on a

$$N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

   (b) Montrer que $\Lambda(x) =]N(x), +\infty[$.

   (c) Montrer que $N(-x) = N(x)$ pour tout $x \in E$.

   (d) Montrer que pour tout $\mu > 0$ et tout $x \in E$, on a $N(\mu x) = \mu N(x)$.

   (e) Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Démontrer que

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

   Indication : On pourra, pour tout $\varepsilon > 0$, introduire les points $\frac{x}{N(x)+\varepsilon}$ et $\frac{y}{N(y)+\varepsilon}$ et en construire une combinaison convexe adéquate.

   (f) Montrer que N est une norme sur E et que A est la boule unité ouverte de E associée à cette norme.

IV Compacité (Facultatif)

1. On suppose que E est de dimension finie, notée n, et on se donne une partie A de E.

   Pour tout $k \geq 1$, on introduit les deux ensembles

$$C_k(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in E, \text{ t.q. il existe } x_1, ..., x_k \in A \text{ et } \lambda_1, ..., \lambda_k \in]0,1[\text{ tels que } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right\},$$

$$\widetilde{C}_k(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in E, \text{ t.q. il existe } x_1, ..., x_k \in A \text{ et } \lambda_1, ..., \lambda_k \in [0,1] \text{ tels que } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right\}.$$

   (a) Vérifier que

$$\forall m \geq 1, \quad \widetilde{C}_m(A) = \bigcup_{k=1}^m C_k(A),$$

   et que $\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{k \geq 1} C_k(A)$.

   (b) Soit $k \geq n+2$, on souhaite montrer que $C_k(A) \subset \widetilde{C}_{k-1}(A)$. On se donne donc $x \in C_k(A)$ que l'on écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \quad \text{avec } \lambda_i \in]0,1[, \, x_i \in A \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

   i. Montrer qu'il existe des réels $\mu_2, ..., \mu_k$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^k \mu_i (x_i - x_1) = 0.$$

ii. En déduire qu'il existe $\mu_1, ..., \mu_n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0, \text{ et } \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0.$$

iii. On pose

$$\delta = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \text{ pour } i \text{ tel que } \mu_i > 0 \right\}.$$

Vérifier que $\delta > 0$ et que

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \delta \mu_i) x_i,$$

et conclure qu'il existe $n \leq k-1$ tel que $x \in \widetilde{C}_{k-1}(A)$.

(c) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Conv}(A) = \widetilde{C}_{n+1}(A)$.
On vient donc de montrer que l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de A.

(d) On munit maintenant E d'une norme. En utilisant la question précédente, montrer que si A est compact alors $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.

2. On prend maintenant $E = L^2(\mathbb{R})$ muni de sa norme usuelle. On définit $f_n = \frac{1}{n} 1_{[n,n+1]}$ et

$$A = \{f_n, n \geq 1\} \cup \{0\}.$$

(a) Montrer que A est un compact de E.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} f_n$ converge dans E, on note f sa limite.

(c) Montrer que les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} f_n$ sont dans $\mathrm{Conv}(A)$. En déduire que $f \in \overline{\mathrm{Conv}(A)}$.

(d) Montrer que $f \notin \mathrm{Conv}(A)$ et en déduire, en particulier, que $\mathrm{Conv}(A)$ n'est pas compacte.
Indication : On pourra observer (en le justifiant) que les éléments de $\mathrm{Conv}(A)$ ont un support borné.

3. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $A \subset E$.

(a) Montrer que si A est finie, alors $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.

(b) On suppose que A est compact et on va montrer que $\overline{\mathrm{Conv}(A)}$ est compacte.

i. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $F \subset A$ fini tel que

$$A \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon).$$

ii. Montrer que

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \mathrm{Conv}(F) + B(0, \varepsilon).$$

iii. Montrer qu'il existe $\widetilde{F} \subset E$ fini tel que

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \bigcup_{x \in \widetilde{F}} B(x, 2\varepsilon).$$

iv. Conclure.