Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse fonctionnelle. Devoir à la maison
Corrigé

I Ensembles convexes

1. (a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles convexes (non vides sinon il n'y a rien à faire !). On note $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Soient $x, y \in A$ et $t \in [0, 1]$.
   Pour $i \in I$ quelconque, par définition de l'intersection, on a $x, y \in A_i$ et comme A_i est convexe, on a $tx + (1-t)y \in A_i$. Ceci étant vrai pour tout $i \in I$, on a
   $$tx + (1-t)y \in \bigcap_{i\in I} A_i = A.$$
   On a bien montré que A est convexe.

   (b) Soient $x, y \in E$ deux points **distincts**. On pose $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Il est clair que nous avons
   $$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \notin A \cup B,$$
   ce qui prouve que $A \cup B$ n'est pas convexe.

2. (a) Soient $x, y \in \overline{A}$ et $t \in [0, 1]$. Par définition de l'adhérence, il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de A qui convergent vers x et y respectivement.
   Par convexité de A, on a
   $$\forall n, tx_n + (1-t)y_n \in A,$$
   et par ailleurs, on a
   $$tx_n + (1-t)y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} tx + (1-t)y,$$
   ce qui prouve bien que $tx + (1-t)y \in \overline{A}$.

   (b) Soient $x, y \in \mathring{A}$ et $t \in [0, 1]$. Par définition de l'intérieur, il existe $r > 0$ tel que
   $$B(x, r) \subset A, \text{ et } B(y, r) \subset A.$$
   Noter qu'on peut bien prendre le même rayon (sinon considérer le plus petit des deux).
   Soit $z \in B(0, r)$. On écrit
   $$tx + (1-t)y + z = t \underbrace{(x+z)}_{\in B(x,r)\subset A} + (1-t) \underbrace{(y+z)}_{\in B(y,r)\subset A} \in A.$$
   Ceci montre que $B(tx + (1-t)y, r) \subset A$ et donc que $tx + (1-t)y \in \mathring{A}$.

3. On montre le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 2$ il s'agit tout simplement de la définition de la convexité. On suppose le résultat vrai pour un certain n et on le montre au rang $n+1$. On se donne des λ_i, x_i pour $i = 1, ..., n+1$ et on pose $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$.
   - Si $\lambda_{n+1} = 0$, alors l'hypothèse de récurrence montre que $x \in A$.
   - Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors tous les autres λ_i sont nuls et donc $x = x_{n+1} \in A$.
   - Si $\lambda_{n+1} \in]0, 1[$, on écrit
   $$x = (1-\lambda_{n+1}) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} z} + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$
   Comme $1 - \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, on voit par hypothèse de récurrence que $z \in A$ et donc
   $$x = (1-\lambda_{n+1})z + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in A,$$
   par définition de la convexité.

II Enveloppe convexe

1. (a) $\mathcal{A}$ est non vide car il contient à l'évidence l'espace entier E.
   (b) D'après la question I.1.a) une intersection de convexes est convexe donc $\mathrm{Conv}(A)$ est bien convexe. Par ailleurs, il est clair qu'il contient A par définition de $\mathcal{A}$. Comme c'est l'intersection de tous les convexes qui contiennent A, il est clair que $\mathrm{Conv}(A)$ est bien le plus petit de ces ensembles.
   (c) On note C l'ensemble de droite de l'égalité proposée. Nous avons les propriétés suivantes :
   — C contient A (prendre $k=1$, $\lambda_1 = 1$ dans la définition.
   — C est convexe : soient $x, y \in C$ que l'on écrit
   $$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \text{ et } y = \sum_{j=1}^{l} \mu_j y_j,$$
   avec les x_i, λ_i et y_j, μ_j comme dans la définition. Pour $t \in [0,1]$, on a
   $$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{k} t\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{l} (1-t)\mu_j y_j.$$
   Comme les $t\lambda_i$ et les $(1-t)\mu_j$ sont dans $[0,1]$ et que
   $$\sum_{i=1}^{k} t\lambda_i + \sum_{j=1}^{l} (1-t)\mu_j = t + (1-t) = 1,$$
   on a bien que $tx + (1-t)y \in C$.
   — Si B est un convexe qui contient A, alors d'après la question I.3) (appliquée à B), on voit que $C \subset B$.
   Ainsi C est le plus petit convexe qui contient A, c'est bien l'enveloppe convexe de A.
2. On a $A \subset \mathrm{Conv}(A)$ et par passage à l'intérieur, comme A est ouvert, on a
   $$A = \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(A).$$
   D'après I.2.b) $\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(A)$ est convexe et il contient A donc il contient $\mathrm{Conv}(A)$, ce qui prouve bien que $\mathrm{Conv}(A)$ est ouvert.
3. A est la réunion de deux fermés, c'est donc un fermé. Un simple calcul montre que
   $$\mathrm{Conv}(A) = \{(0,0)\} \cup \Big( ]0,1] \times \mathbb{R} \Big).$$
   On voit bien que $\mathrm{Conv}(A)$ n'est pas fermé. Ainsi la propriété de fermeture ne passe pas à l'enveloppe convexe.

III Convexes et normes

1. C'est absolument évident en utilisant les propriétés de la norme.
2. (a) Si $x = 0$, $\Lambda(0) =]0, +\infty[$ et $N(0) = 0$.
   Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(0, r) \subset A$ Si x est non nul, on a alors $\frac{r}{2\|x\|_\infty} x \in A$ et donc
   $$\frac{2\|x\|_\infty}{r} \in \Lambda(x),$$
   qui est bien non vide.
   Soit M une borne de A pour la norme infinie. Si $x \neq 0$ et si $\lambda \in \Lambda(x)$ alors on a
   $$\frac{\|x\|_\infty}{\lambda} = \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|_\infty \leq M,$$
   d'où
   $$\lambda \geq \frac{\|x\|_\infty}{M},$$
   et en particulier
   $$N(x) \geq \frac{\|x\|_\infty}{M}.$$
   Ceci prouve bien que $N(x) = 0$ implique que $x = 0$.

(b) Il est clair que $\Lambda(0) =]0, +\infty[=]N(0), +\infty[$.
Supposons x non nul, et prenons $\lambda \in \Lambda(x)$. On va montrer que pour tout $\mu > \lambda$ on a $\mu \in \Lambda(x)$. Il suffit pour cela d'utiliser le fait que $0 \in A$, $x/\lambda \in A$ et que A est convexe pour obtenir

$$\frac{1}{\mu}x = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{x}{\lambda} + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)0,$$

et comme $\lambda/\mu \in [0, 1]$, on a bien montré que x/μ est une combinaison convexe d'éléments de A et que c'est donc bien également un élément de A.
A ce stade, on a donc $\Lambda(x) = [N(x), +\infty[$ ou bien $\Lambda(x) =]N(x), +\infty[$. Il nous reste donc à établir que $N(x)$ n'appartient pas à $\Lambda(x)$. Par définition, pour tout n assez grand, on a

$$\frac{1}{N(x) - 1/n}x \notin A,$$

et comme A est ouvert (et donc A^c est fermé), on en déduit que, à la limite $n \to \infty$, on a

$$\frac{1}{N(x)}x \notin A,$$

ce qui montre que $N(x) \notin \Lambda(x)$ et conclut la preuve.

(c) Il suffit de constater que, par symétrie de A, nous avons $\Lambda(x) = \Lambda(-x)$ et ces deux ensembles ont donc la même borne inférieure.

(d) Pour $\lambda > 0, \mu > 0$, on a

$$\frac{1}{\lambda}(\mu x) = \frac{\mu}{\lambda}x,$$

et donc

$$\lambda \in \Lambda(\mu x) \Longleftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} \in \Lambda(x).$$

On a donc montré que

$$\Lambda(\mu x) = \mu\Lambda(x),$$

et par passage à la borne inférieure, il vient $N(\mu x) = \mu N(x)$.

(e) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question b), on a

$$N(x) + \varepsilon \in \Lambda(x), \quad N(y) + \varepsilon \in \Lambda(y),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{N(x) + \varepsilon}x \in A, \text{ et } \frac{1}{N(y) + \varepsilon}y \in A.$$

Par convexité de A, toute combinaison convexe de ces deux points est encore dans A, i.e. pour tout $\mu \in [0, 1]$, on a

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{N(x) + \varepsilon}x + \frac{1 - \mu}{N(y) + \varepsilon}y \in A.$$

Comme on veut calculer $N(x + y)$, on va essayer de choisir μ pour que le point z défini ci-dessus soit proportionnel à $x + y$, ceci sera vrai si

$$\frac{\mu}{N(x) + \varepsilon} = \frac{1 - \mu}{N(y) + \varepsilon},$$

ce qui donne la valeur suivante de μ

$$\mu = \frac{N(x) + \varepsilon}{N(x) + N(y) + 2\varepsilon}.$$

En reprenant la définition de z, on a donc montré que

$$z = \frac{1}{N(x) + N(y) + 2\varepsilon}(x + y) \in A,$$

ou encore que $N(x) + N(y) + 2\varepsilon \in \Lambda(x + y)$. Par définition de la borne inférieure ceci prouve que

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y) + 2\varepsilon.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

(f) Toutes les questions précédentes montrent bien que N est une norme. Par ailleurs nous avons par définition, et grâce à la question b)

$$N(x) < 1 \Longleftrightarrow 1 \in \Lambda(x) \Longleftrightarrow x \in A,$$

et donc A est bien la boule unité ouverte associée à la norme N.

IV Compacité

1. Bien observer que dans la définition de $C_k(A)$ les coefficients λ_i sont positifs ou nuls, alors que dans la définition de $\widetilde{C}_k(A)$, ils sont strictement positifs.

   (a) Soit $m \geq 1$ et $x \in \widetilde{C}_m(A)$. Le point x est donc une combinaison convexe de m points de A. Parmi les coefficients de cette combinaison, certains peuvent être nuls. Si on note $k \in \{1, ..., m\}$ le nombre de coefficients non nuls dans la combinaison, on a bien $x \in \widetilde{C}_k(A)$, ce qui montre une première inclusion.

   Par ailleurs , l'inclusion $\widetilde{C}_k(A) \subset C_m(A)$ pour $k \leq m$, est claire (il suffit de rajouter des coefficients nuls dans la combinaison convexe considérée).

   Avec les notations proposées, la définition de $\mathrm{Conv}(A)$ s'écrit

   $$\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{m \geq 1} \widetilde{C}_m(A),$$

   et d'après l'inclusion que l'on vient de montrer on peut remplacer la réunion des $\widetilde{C}_m(A)$ par celle des $C_k(A)$.

   (b) i. Comme $k \geq n + 2$, et que la dimension de E est n, la famille de vecteurs $\{x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ est nécessairement liée, d'où le résultat.

   ii. Si on pose $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{k} \mu_i$, alors l'égalité de la question précédente donne bien le résultat attendu.

   iii. Remarquons tout d'abord que le minimum est bien pris sur un ensemble non vide car les μ_i sont non tous nuls mais de somme nulle, il y en a donc au moins un qui est strictement positif. Par ailleurs, par construction, on a bien $\delta \geq 0$.

   On a les deux égalités

   $$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \ \ \text{et} \ \ \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0,$$

   et par combinaison, on en déduit bien une nouvelle écriture de x sous la forme

   $$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \delta \mu_i) x_i.$$

   Observons que

   $$\lambda_i - \delta \mu_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

   En effet, c'est clair si $\mu_i \leq 0$ et c'est une conséquence de la définition de δ si $\mu_i > 0$. Par ailleurs tous ces coefficients sont inférieurs à 1 car leur somme vaut 1. Enfin, l'un de ces coefficients (au moins) est nul car le minimum qui définit δ est atteint en au moins un indice i.

   En conclusion, le point x peut s'écrire comme une combinaison convexe d'au plus $k - 1$ points de A, ce qui prouve que $x \in \widetilde{C}_{k-1}(A)$.

   (c) D'après les deux questions précédentes et une récurrence immédiate on a

   $$C_k(A) \subset \widetilde{C}_{n+1}(A), \ \ \forall k \geq n + 2.$$

   D'après la question a) on a bien l'égalité

   $$\mathrm{Conv}(A) = \widetilde{C}_{n+1}(A).$$

   On vient de démontrer le **Théorème de Carathéodory**.

   (d) On introduit l'application

   $$\Phi : \big((\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}), (x_1, ..., x_{n+1})\big) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in E.$$

   Cette application est bilinéaire donc continue et d'après la question précédente on a

   $$\Phi\big([0, 1]^{n+1} \times A^{n+1}\big) = \mathrm{Conv}(A).$$

   Comme $[0, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et A est un compact de E, le théorème de Tychonoff montre que $[0, 1]^{n+1} \times A^{n+1}$ est un compact. Ainsi $\mathrm{Conv}(A)$ apparait comme l'image d'un compact par une application continue, c'est donc également un compact.

2. (a) Nous avons $\|f_n\|_E = 1/n$ et donc $(f_n)_n$ converge vers 0 dans E. D'après l'exercice 3 du TD1, l'ensemble A est donc un compact de E.
   (b) E est un espace de Banach donc il suffit de montrer que cette série est absolument convergente, ce qui est bien le cas vu la convergence de la série numérique de terme général 2^{-n}.
   (c) Comme 0 et les f_n sont dans A, on peut écrire
   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} f_n + \underbrace{\left(1 - \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\right)}_{=2^{-N}} 0,$$
   qui est bien une combinaison convexe d'éléments de A. On a donc bien $S_N \in \mathrm{Conv}(A)$. Par passage à la limite on a bien $f \in \overline{\mathrm{Conv}(A)}$.
   (d) On voit que tous les éléments de A ont un support compact, il en est donc de même des éléments de $\mathrm{Conv}(A)$ (ce sont des combinaisons finies d'éléménts de A).
   On voit aisément que la somme de la série f, en revanche, n'est pas à support compact. En effet, pour tout $k \geq 1$, on a
   $$f(x) = \frac{1}{k}, \text{ pour presque tout } x \in]k, k+1[.$$
   Ainsi $\mathrm{Conv}(A)$ n'est pas fermée et *a fortiori* pas compacte.
3. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $A \subset E$.
   (a) Si A est finie (on note n le cardinal de A), A est en particulier compact (savez-vous le démontrer ?). Par ailleurs, on voit bien que
   $$\mathrm{Conv}(A) = \widetilde{C}_{n+1}(A),$$
   en reprenant les notations précédentes. L'argument utilisé dans la question 1.d) s'applique alors *mutatis mutandis* dans l'espace E et prouve la compacité de $\mathrm{Conv}(A)$.
   (b) i. On écrit de façon usuelle que
   $$A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon),$$
   et par compacité de A on peut extraire un sous recouvrement fini indexé par un ensemble fini $F \subset A$.
   ii. On remarque que $B(x,\varepsilon) = x + B(0,\varepsilon)$ de sorte que, en utilisant la question précédente, toute combinaison convexe de points de A s'écrit sous la forme
   $$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i + z_i), \text{ avec } x_i \in F \text{ et } z_i \in B(0,\varepsilon),$$
   ce qui peut s'écrire
   $$x = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i.$$
   Comme la boule $B(0,\varepsilon)$ est convexe, la seconde somme est un élément de $B(0,\varepsilon)$, tandis que la première est dans l'enveloppe convexe de F. On a bien montré
   $$\mathrm{Conv}(A) \subset \mathrm{Conv}(F) + B(0,\varepsilon).$$
   iii. F étant fini, la question a) montre que $\mathrm{Conv}(F)$ est compacte. On écrit alors le recouvrement ouvert suivant
   $$\mathrm{Conv}(F) \subset \bigcup_{y \in \mathrm{Conv}(F)} B(y,\varepsilon),$$
   donc on peut extraire, par compacité, un sous-recouvrement fini
   $$\mathrm{Conv}(F) \subset \bigcup_{y \in \tilde{F}} B(y,\varepsilon),$$
   avec $\tilde{F} \subset \mathrm{Conv}(F)$ finie.
   Par sommation, la question précédente implique
   $$\mathrm{Conv}(A) \subset \bigcup_{y \in \tilde{F}} (B(y,\varepsilon) + B(0,\varepsilon)) = \bigcup_{y \in \tilde{F}} B(y, 2\varepsilon).$$
   iv. La question précédente montre que $\mathrm{Conv}(A)$ est précompact. Comme E est supposé complet, cela implique que $\mathrm{Conv}(A)$ est compact (voir le Corollaire I.32).