Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2013-2014

Analyse Fonctionnelle - Examen du 8 Janvier 2014

Durée : 3h

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Le barême tiendra compte de la longueur manifeste du sujet.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème de Banach-Steinhaus.
2. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \mapsto X$ une application.
   (a) Rappeler ce que signifie la propriété : f est contractante sur X.
   (b) Démontrer que si f est contractante, elle admet un unique point-fixe dans X.

Exercice 2

Soit $a = (a_n)_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que, pour que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n x_n|$ soit convergente pour tout élément $x \in l^\infty$, il est nécessaire et suffisant que $a \in l^1$.
2. On suppose désormais que $a \in l^1$, et on définit
$$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 0} |a_n x_n|, \quad \forall x \in l^\infty.$$
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\|.\|$ soit une norme sur l^∞.
3. Sous les conditions précédentes, montrer qu'il existe $C > 0$ (dépendant de la suite a) telle que
$$\|x\| \leqslant C\|x\|_{l^\infty}, \quad \forall x \in l^\infty.$$
4. Montrer que les normes $\|.\|$ et $\|.\|_{l^\infty}$ ne sont pas équivalentes sur l^∞.
5. Montrer que l'espace l^∞ muni de la norme $\|.\|$ n'est pas un Banach.

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|.\|_\infty$ et F un sous-espace vectoriel **fermé** de E. On suppose que toutes les fonctions f éléments de F sont dérivables en tout point de $[0, 1]$.
Le but de l'exercice est de montrer que F est de dimension finie.

1. On fixe dans cette question un point $x \in [0, 1]$. Pour tout $y \in [0, 1] \setminus \{x\}$, on définit
$$T_y : f \in F \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $y \neq x$, T_y est une forme linéaire continue sur F.
   (b) Montrer que, pour tout $f \in F$, la famille $(T_y f)_{y\neq x}$ est bornée.
   (c) Montrer qu'il existe un nombre $C_x > 0$ dépendant seulement de x tel que
$$|T_y f| \leqslant C_x \|f\|_\infty, \quad \forall f \in F, \forall y \neq x.$$
2. On fixe dans cette question un nombre $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $\delta_x > 0$ tel que
$$\forall y, y' \in [0, 1], \text{ t.q. } |y - x| \leqslant \delta_x, |y' - x| \leqslant \delta_x, \quad \text{on a } |f(y) - f(y')| \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty, \forall f \in F.$$

(b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$, tel que

$$\forall y, y' \in [0,1], \text{ t.q. } |y - y'| \leqslant \delta, \text{ on a } |f(y) - f(y')| \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty, \ \forall f \in F.$$

3. Montrer que la boule unité fermée de F est compacte et conclure.

Exercice 4 (Représentation du dual de $L^p(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert **borné** de $\mathbb{R}^d$, $1 < p \leqslant 2$ et $q = p/(p-1)$ son exposant conjugué, qui vérifie donc $2 \leqslant q < +\infty$. On munit Ω de la mesure de Lebesgue (on notera $|\Omega|$ le volume de Ω) et on ne considèrera que des fonctions à valeurs réelles. Le but de cet exercice est de démontrer un théorème de représentation pour le dual de l'espace $L^p(\Omega)$ qui s'énonce comme suit :

Pour toute forme linéaire continue $L \in (L^p(\Omega))'$, il existe une unique $g \in L^q(\Omega)$ telle que

$$L(v) = \int_\Omega gv\, dx, \ \ \forall v \in L^p(\Omega), \ \text{ et de plus on a } \ \|L\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q}. \qquad (\mathcal{P})$$

1. En utilisant un résultat du cours, montrer la propriété $(\mathcal{P})$ dans le cas $p = q = 2$.
2. On suppose maintenant que $p < 2$. Démontrer qu'on a l'inclusion $L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et l'inégalité

$$\|v\|_{L^p} \leqslant |\Omega|^{\frac{2-p}{2p}} \|v\|_{L^2}, \ \ \forall v \in L^2(\Omega).$$

3. Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable quelconque. Pour tout $n \geq 1$, on définit une fonction $T_n v$ par

$$T_n v(x) = \max(-n, \min(n, v(x))), \ \ \forall x \in \Omega.$$

   (a) Montrer les propriétés suivantes :
      i. $T_n v \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, pour tout $n \geq 1$.
      ii. $T_n v(x)$ et $v(x)$ sont de même signe, pour tout $x \in \Omega$ et tout $n \geq 1$.
      iii. $|T_n v(x)| \leqslant |v(x)|$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $n \geq 1$.
      iv. $\lim_{n\to\infty} T_n v(x) = v(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

   (b) Montrer que si $v \in L^p(\Omega)$, avec $p < 2$ alors $(T_n v)_n$ converge vers v dans $L^p(\Omega)$. En déduire que $L^2(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
4. On rappelle qu'on a supposé que $p < 2$. On se donne une forme linéaire continue L sur $L^p(\Omega)$.
   (a) Montrer que la restriction de L à l'espace $L^2(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$. En déduire qu'il existe $g \in L^2(\Omega)$ telle que

$$L(v) = \int_\Omega gv\, dx, \ \ \forall v \in L^2(\Omega). \qquad (1)$$

   (b) On pose $v_n = T_n(|g|^{q-2} g)$. En utilisant le fait que $(p-1)(q-1) = 1$, montrer que

$$\int_\Omega |v_n|^p \ dx \leqslant \int_\Omega g v_n\, dx.$$

   (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $\|v_n\|_{L^p}^{p-1} \leqslant \|L\|_{(L^p)'}$.
   (d) En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $g \in L^q(\Omega)$ et $\|g\|_{L^q} \leqslant \|L\|_{(L^p)'}$.
   (e) En déduire que l'égalité (1) est encore valable pour tout $v \in L^p(\Omega)$.
   (f) Montrer qu'on a en fait l'égalité des normes $\|g\|_{L^q} = \|L\|_{(L^p)'}$.