Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse Fonctionnelle
TD 1 : Espaces métriques. Espaces vectoriels normés

Avec corrigés

Les numéros de Théorèmes, Propositions, etc ... font référence aux notes de cours.

Exercice 1

Vérifier les propriétés suivantes dans un espace métrique (X, d) quelconque.

- *Les boules ouvertes sont ouvertes.*
- *Les boules fermées sont fermées.*
- *Les sphères sont fermées.*

Montrer que dans un espace vectoriel normé, les sphères sont d'intérieur vide. Est-ce encore le cas dans un espace métrique quelconque ?

Corrigé :

- Soit $x \in X$ et $r > 0$. On veut montrer que la boule ouverte
$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\},$$
est un ouvert. Pour cela on se donne un $y \in B(x, r)$ quelconque et il nous faut trouver un rayon $R > 0$ tel que la boule centrée en y et de rayon R $B(y, R)$ soit entièrement contenue dans $B(x, r)$.
On va vérifier que $R = r - d(x, y)$ convient. Tout d'abord, on remarque que cette valeur vérifie $R > 0$ car, par hypothèse sur y, nous avons $d(x, y) < r$. Prenons maintenant $z \in B(y, R)$ quelconque et montrons qu'il appartient à $B(x, r)$. Par l'inégalité triangulaire nous avons
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + R = r,$$
ce qui montre bien le résultat.
- On peut utiliser la caractérisation par les suites ou bien faire une preuve similaire à la précédente en montrant que le complémentaire
$$\left(\bar{B}(x, r)\right)^c = \{y \in X, d(x, y) > r\},$$
est un ouvert. On prend un y quelconque dans cet ensemble et on pose $R = d(x, y) - r$ qui est bien strictement positif par hypothèse sur y.
Pour tout $z \in B(y, R)$ nous avons
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + R$$
et donc
$$d(x, z) > d(x, y) - R = r,$$
ce qui établit le résultat attendu.
- Par définition nous avons
$$S(x, r) = \bar{B}(x, r) \setminus B(x, r) = \bar{B}(x, r) \cap \left(B(x, r)\right)^c,$$
ce qui montre que $S(x, r)$ est l'intersection de deux fermés (grâce aux deux résultats précédents) et que c'est donc bien un fermé.

– Supposons maintenant que (X,d) est un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ (on rappelle qu'alors $d(x,y) = \|x-y\|$). On considère une sphère $S(x,r)$ (avec $r > 0$ sinon on a affaire à un singleton qui est bien d'intérieur vide) et on se donne un point $y \in S(x,r)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on construit le point

$$z = y + \frac{\varepsilon}{r}(y-x).$$

Remarquons qu'on utilise bien sûr ici la structure d'espace vectoriel sur E.
Ce point z vérifie

$$\|z-y\| = \frac{\varepsilon}{r}\|y-x\| = \varepsilon,$$

il est donc aussi proche de y que l'on veut. Mais il vérifie également

$$\|z-x\| = \left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)\|y-x\| = r+\varepsilon.$$

Ceci exprime que

$$\bar{B}(y,\varepsilon) \not\subset S(x,r),$$

puisque nous avons trouvé un élément du premier ensemble qui n'est pas dans le second.
Ainsi, aussi petit que soit ε, la boule de centre y et de rayon ε n'est pas contenue dans la sphère $S(x,r)$. Ceci étant vrai pour tout point $y \in S(x,r)$, nous avons bien montré qu'elle était d'intérieur vide.
Cette propriété est fausse dans le cas général. On se place dans $\mathbb{R}^n$ et on pose $X = S_{\mathbb{R}^n}(0,1) \cup \{0\}$ muni de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Dans X nous avons

$$S_X(0,1) = S_{\mathbb{R}^n}(0,1),$$

mais on a aussi

$$S_X(0,1) = B_X(0,2) \setminus \overline{B}_X(0,1/2),$$

et donc $S_X(0,1)$ est un ouvert non vide de X (en particulier il n'est pas d'intérieur vide).

■

Exercice 2 (Compacts de $\mathbb{R}$)

On munit $\mathbb{R}$ de sa métrique usuelle définie par la valeur absolue.

1. *On veut montrer que tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est compact. On considère donc un recouvrement de $[a,b]$ par une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$. On pose alors*

   $$A = \{x \in [a,b], \ \textit{ tel que le segment } [a,x] \textit{ puisse être recouvert par une sous-famille } \textbf{finie} \textit{ de } (U_i)_i\}.$$

   On souhaite établir que $b \in A$, ce qui montrera l'existence d'un sous-recouvrement fini de $[a,b]$.
   (a) *Montrer que $a \in A$.*
   (b) *On note $c = \sup A$. Montrer que $c \in A$.*
   (c) *On suppose que $c < b$, montrer qu'il existe $c' \in]c,b[$ tel que $c' \in A$.*
   (d) *Conclure.*
2. *Montrer que les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les ensembles fermés et bornés.*

Corrigé :

1. (a) Le segment $[a,a]$ n'est autre que le singleton $\{a\}$. Comme les $(U_i)_{i\in I}$ recouvrent $[a,b]$, il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $a \in U_{i_0}$. Ceci montre que U_{i_0} est un recouvrement ouvert (à l'évidence fini) de $[a,a]$ et donc que $a \in A$.
   (b) On a déjà que $c \leq b$ et donc que c est en particulier fini. On suppose que $c \notin A$. Comme $c \in [a,b]$, il existe un $i_0 \in I$ tel que $c \in U_{i_0}$. L'ensemble U_{i_0} étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $a < c - r < c$ et

   $$[c-r, c] \subset U_{i_0}. \tag{1}$$

   Comme $c = \sup A$ et $c \notin A$, on peut même choisir r assez petit pour que $c - r \in A$. Par définition de A, il existe donc une partie finie $J \subset I$ telle que

   $$[a, c-r] \subset \bigcup_{i\in J} U_i.$$

En rajoutant l'indice i_0 à J et en utilisant (1), on obtient que

$$[a,c] = [a,c-r] \cup [c-r,c] \subset \bigcup_{i \in J \cup \{i_0\}} U_i,$$

et comme $J \cup \{i_0\}$ est fini, on obtient bien un sous-recouvrement ouvert de $[a,c]$, ce qui montre que $c \in A$, c'est une contradiction.

(c) Supposons $c < b$. Comme $c \in A$, on peut trouver $J \subset I$ finie telle que

$$[a,c] \subset \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Soit $i_0 \in J$ tel que $c \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $c + r \leq b$ et $[c, c+r] \subset U_{i_0}$. Il s'en suit que l'on a le sous-recouvrement ouvert fini suivant

$$[a, c+r] \subset \bigcup_{i \in J} U_i,$$

et donc $c' = c + r \in A$.

(d) L'existence du c' dans la question précédente contredit le fait que $c = \sup A$ et donc le fait que $c < b$. On en déduit que $c = b$ et donc que tout le segment $[a,b]$ peut être recouvert par une sous-famille finie de $(U_i)_i$.

2. On sait déjà que tout compact est fermé et borné (dans un espace métrique quelconque). Soit maintenant $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé et borné. La bornitude de K montre qu'il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. La question précédente montre que $[-R, R]$ est un compact. Par hypothèse K est fermé dans $\mathbb{R}$ et donc c'est aussi un fermé de $[-R, R]$ (car $K = K \cap [-R, R]$). D'après la Proposition I.12, on déduit que K est lui-même compact.

■

Exercice 3

Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X qui converge vers une limite l.
Montrer que l'ensemble $A = \{x_n, n \geq 0\} \cup \{l\}$ est compact.

Corrigé :

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de A par une famille quelconque d'ouverts

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

On veut montrer qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Comme $l \in A$, il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $l \in U_{i_0}$. Par ailleurs, comme U_{i_0} est un ouvert, nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(l, \varepsilon) \subset U_{i_0}.$$

Par définition de la convergence de la suite $(x_n)_n$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ d(x_n, l) < \varepsilon,$$

ce qui implique, d'après le choix de ε,

$$\forall n \geq n_0,\ x_n \in B(l, \varepsilon) \subset U_{i_0}.$$

Ainsi, tous les termes de la suite à partir du rang n_0 sont dans U_{i_0}.

On peut maintenant s'occuper des $n_0 - 1$ premiers termes, qui sont en nombre fini. Pour tout $n < n_0$, il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in U_{i_n}$.

Au final nous avons bien montré

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{n_0} U_{i_k},$$

qui est un sous-recouvrement fini de A. ■

Exercice 4 (Equivalence de distances)

Soit (X, d) un espace métrique.

1. *Soit δ une autre distance sur l'ensemble X. Montrer que*

$$d \text{ et } \delta \text{ sont topologiquement équivalentes} \iff \text{Elles définissent les mêmes suites convergentes.}$$

2. *On définit maintenant δ par*

$$\delta = \frac{d}{1+d}.$$

   (a) *Montrer que δ est une distance uniformément équivalente à d. Sont-elles en général, Lipschitz équivalentes ?*

   (b) *Montrer que (X, d) est complet, si et seulement si, (X, δ) l'est.*

Corrigé :

1. Montrons les deux implications.

   $\Rightarrow$ On suppose que (X, d) et (X, δ) ont les mêmes ouverts.
   Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers une limite l dans (X, d), on veut montrer qu'elle converge également dans (X, δ).
   Soit $\varepsilon > 0$ donné. L'ensemble $B_\delta(l, \varepsilon)$ est un ouvert de (X, δ) (voir Exercice 1) et donc par hypothèse c'est également un ouvert de (X, d) qui contient l. Il existe donc un nombre $\eta > 0$ tel que

$$B_d(l, \eta) \subset B_\delta(l, \varepsilon). \tag{2}$$

   On utilise maintenant la convergence de $(x_n)_n$ vers l dans (X, d) pour obtenir l'existence d'un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \ d(x_n, l) < \eta.$$

   Grâce à (2), cela implique

$$\forall n \geq n_0, \ \ \delta(x_n, \varepsilon) < \varepsilon.$$

   Ceci étant valable pour tout choix intial de ε, on a bien montré la convergence de $(x_n)_n$ vers l dans (X, δ).
   On peut bien entendu échanger les rôles de d et δ pour prouver *in fine* que les deux espaces ont les mêmes suites convergentes.

   $\Leftarrow$ On suppose que les deux espaces ont les mêmes suites convergentes. On se donne un ouvert U de (X, d) et on veut montrer que c'est un ouvert de (X, δ). Soit $x \in U$ quelconque, il s'agit de montrer l'existence d'un $r > 0$ tel que

$$B_\delta(x, r) \subset U.$$

   On va raisonner par l'absurde et supposer que

$$\forall r > 0, \ \ B_\delta(x, r) \not\subset U.$$

   En spécifiant cette propriété pour les valeurs de r égales à $1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient la propriété suivante

$$\forall n \geq 1, \ \ \exists x_n \in B_\delta(x, 1/n), \text{ t.q. } \ x_n \notin U. \tag{3}$$

   On vient de construire une suite $(x_n)_n$ vérifiant

$$\delta(x_n, x) < 1/n,$$

   elle converge donc vers s dans (X, δ). On utilise maintenant l'hypothèse qui nous dit qu'elle converge également vers x dans (X, d). Autrement dit, nous avons

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{4}$$

   Comme U est un ouvert de (X, d) et que x est dans U, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. D'après (4), il existe un rang n_0 à partir duquel nous avons $d(x_n, x) < \varepsilon$, $n \geq n_0$.
   En particulier, nous avons établi que $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon) \subset U$. Ceci contredit (3) car nous avions construit les x_n de sorte qu'aucun d'entre eux n'appartienne à U.

2. (a) Pour tout $r \geq 0$, on pose $\varphi(r) = \frac{r}{1+r}$ de sorte que $\delta = \varphi(d)$. La fonction φ est continue, strictement croissante, vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} \varphi = 1$.

   Ainsi, pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\varphi(r) \leq R$ (prendre $r = \varphi^{-1}(R)$ si $R < 1$ et n'importe quelle valeur de r si $R \geq 1$). Ainsi les boules de rayon r dans (X, d) sont contenues dans les boules de rayon R dans (X, δ).

   Réciproquement pour tout $R > 0$, on pose $r = \varphi(R)$ et on constate que toutes les boules de rayon r dans (X, δ) sont contenues dans les boules de rayon R dans (X, d).

   (b) Comme les deux distances sont uniformément équivalentes, elles sont topologiquement équivalentes et donc définissent les mêmes suites convergentes d'après la question 1. Par ailleurs, d'après la propriété précédente elles définissent aussi les mêmes suites de Cauchy.

   Ainsi (X, d) est complet si et seulement si (X, δ) l'est.

■

Exercice 5 (Une distance exotique sur $\mathbb{R}$)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. *Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$ topologiquement équivalente à la distance usuelle.*
2. *Montrer que d n'est pas uniformément équivalente à la distance usuelle.*
3. *Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.*

Corrigé :

1. Vérifier que d est une distance ne pose aucune difficulté. On utilise le caractère injectif de $\arctan$. Nous allons utiliser l'exercice 4 et montrer que $(\mathbb{R}, |.|)$ et $(\mathbb{R}, d)$ ont les mêmes suites convergentes.
   - Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers l dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Comme $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$ nous en déduisons que $\arctan(x_n)$ converge vers $\arctan(l)$ ce qui implique bien
   $$d(x_n, l) = |\arctan(x_n) - \arctan(l)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
   - Réciproquement si $(x_n)_n$ converge vers l dans $(\mathbb{R}, d)$ nous déduisons que $(\arctan x_n)_n$ converge vers $\arctan(l)$. Comme $\arctan(l) \in]-\pi/2, \pi/2[$ et que $\tan$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$, nous déduisons que
   $$|x_n - l| = |\tan(\arctan(x_n)) - \tan(\arctan(l))| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
2. Pour tout $n \geq 0$, posons $x_n = n$ et $y_n = n + 1$. Nous avons
$$|x_n - y_n| = 1, \ \forall n \geq 0,$$
$$d(x_n, y_n) = |\arctan x_n - \arctan y_n| \xrightarrow{n\to\infty} |\pi/2 - \pi/2| = 0.$$
   Ainsi, x_n et y_n sont aussi proches que l'on veut dans $(\mathbb{R}, d)$ pour n grand mais restent à distance 1 dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Ceci prouve que d et $|.|$ ne peuvent être uniformément équivalentes.
3. La suite $(x_n = n)_n$ définie à la question précédente est bien de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ (car la suite $\arctan(x_n)$ est convergente donc de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$!) mais elle ne converge pas. En effet, si elle convergeait vers une limite $l \in \mathbb{R}$, on aurait
$$\arctan(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \arctan(l) \in]-\pi/2, \pi/2[,$$
   et donc par continuité de l'application $\tan$ on aurait
$$x_n = \tan(\arctan x_n) \xrightarrow{\tan} (\arctan(l)) = l,$$
   ce qui est exclu car $x_n \to +\infty$.

■

Exercice 6

Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de X.

1. *Montrer que pour toute suite $(\varepsilon_n)_n$ de nombres réels strictement positifs, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que*
$$d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) \leq \varepsilon_n, \ \ \forall n \geq 0.$$
2. *Montrer que si $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente, alors toute la suite $(x_n)_n$ converge.*

Corrigé :

1. On applique la définition de la suite de Cauchy en prenant $\varepsilon = \varepsilon_1$. Ainsi, il existe un $n_1 \geq 0$ telle que
$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_1, \ \ \forall n \geq n_1, \forall p \geq 0.$$
On pose $\varphi(1) = n_1$. On applique à nouveau la définition mais cette fois pour ε_2. On trouve donc un $n_2 > n_1$ tel que
$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_2, \ \ \forall n \geq n_2, \forall p \geq 0.$$
On pose $\varphi(2) = n_2$, de sorte que de proche en proche on obtient la sous-suite recherchée.
2. Soit x la limite de la sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$, on va montrer que toute la suite converge vers x. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un n_0 tel que
$$d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \varepsilon, \ \ \forall n \geq n_0.$$
Mais, comme la suite est de Cauchy, on peut aussi trouver un $n_1 \geq \varphi(n_0)$ tel que
$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \ \ \forall n \geq n_1, \forall m \geq n_1.$$
Il s'en suit que, pour tout $n \geq n_1$, on a
$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(n_1)}) + d(x_{\varphi(n_1)}, x) \leq 2\varepsilon,$$
ce qui montre le résultat.

■

Exercice 7 (Distance à un fermé)

On suppose que (X, d) est un espace métrique tel que toutes les boules fermées de (X, d) sont compactes. Soit F un fermé de (X, d).

1. *Montrer que pour tout $x \in X$, il existe $y \in F$ tel que*
$$d(x, F) = d(x, y).$$
2. *Montrer que, pour tout $x \in X$, on a*
$$d(x, F) = 0 \iff x \in F.$$
3. *Soit K un compact disjoint de F.*
   (a) *Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*
   $$d(x, y) \geq \alpha, \ \ \forall x \in K, \forall y \in F.$$
   (b) *En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U, V tels que*
   $$K \subset U, \text{ et } F \subset V.$$

Corrigé :

1. On pose $r = d(x, F)$. Par inégalité triangulaire, on observe immédiatement que
$$d(x, F) = d(x, F \cap \overline{B}(x, r)).$$
On peut donc remplacer F par $G = F \cap \overline{B}(x, r)$ sans perte de généralité. Or G est un fermé de X inclu dans le compact $\overline{B}(x, r)$ (par hypothèse), il s'agit donc d'un compact.
La fonction $y \in X \mapsto d(x, y)$ étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur le compact G. En particulier, il existe $y \in G \subset F$ tel que
$$d(x, y) = d(x, G) = d(x, F).$$
2. L'implication $\Leftarrow$ est toujours valable sans aucune hypohèse sur l'espace ni sur F. L'autre implication découle immédiatement de la question précédente et de la propriété de séparation dans la définition de la distance d.

3. (a) La fonction $x \mapsto d(x,F)$ est continue (et même Lipschitzienne). Comme K est compact, elle bornée sur K et atteint ses bornes sur K. Il existe donc $x_0 \in K$ tel que

$$\inf_{x\in K} d(x,F) = d(x_0,F).$$

Comme $x_0 \in K$ et que K est disjoint de F, on a nécessairement $x_0 \notin F$ et donc $\alpha = d(x_0,F) > 0$. Si maintenant $x \in K$ et $y \in F$, on a

$$d(x,y) \geq d(x,F) \geq \inf_{x\in K} d(x,F) = \alpha > 0.$$

(b) On pose

$$U = \bigcup_{x\in K} B(x,\alpha/3), \text{ et } V = \bigcup_{y\in F} B(y,\alpha/3).$$

Ce sont bien des ouverts car réunions d'ouverts et il est clair par construction que $K \subset U$ et $F \subset V$. Vérifions pour conclure que U et V sont disjoints. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point a qui soit à la fois dans U et dans V. Par définition, cela montre qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que

$$a \in B(x,\alpha/3), \text{ et } a \in B(y,\alpha/3).$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \alpha/3 + \alpha/3 = \frac{2\alpha}{3} < \alpha,$$

ce qui contredit la définition de α.

■

Exercice 8 (Continuité uniforme)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. *Montrer que si f est périodique, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que si f admet des limites en $\pm\infty$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que si f est uniformément continue alors elle vérifie que, pour toutes suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ on a*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0.$$

En déduire que les fonctions

$$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}, \quad \textit{et} \quad f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2),$$

ne sont pas uniformément continues.

Corrigé :

1. Soit $T > 0$ une période de f. On considère le compact $K = [0, 2T]$ (attention à bien prendre le compact strictement plus grand qu'une période). D'après le théorème de Heine, comme f est continue, elle est uniformément continue sur K.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par uniforme continuité de f sur K, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in K, \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{5}$$

On peut toujours diminuer la valeur de δ de sorte que $\delta \leq T/2$.
Il s'agit de montrer que (5) demeure vraie pour tous les éléments de $\mathbb{R}$ et non plus seulement ceux de K.
Soient donc $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques tels que $|x - y| \leq \delta$. Il faut utiliser la périodicité de f. On prend donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + kT \in [T/2, 3T/2]$ (se convaincre qu'un tel entier existe bien !).
On pose alors $\tilde{x} = x + kT$ et $\tilde{y} = y + kT$. De sorte que

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| = |x - y| \leq \delta.$$

Par ailleurs, par construction on a bien $\tilde{x} \in [T/2, 3T/2] \subset K$ et il nous reste juste à voir que $\tilde{y}$ est également dans K.

On écrit pour cela
$$\tilde{y} = \tilde{x} + (\tilde{y} - \tilde{x}) = \tilde{x} + (y - x),$$
ce qui donne
$$\tilde{x} - \delta \leq \tilde{y} \leq \tilde{x} + \delta,$$
et donc, vu que $\tilde{x} \in [T/2, 3T/2]$
$$T/2 - \delta \leq \tilde{y} \leq 3T/2 + \delta.$$
Ayant choisi δ plus petit que $T/2$, on a bien montré que $\tilde{y} \in [0, 2T] = K$.
On peut donc appliquer (5) à $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ et obtenir
$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq \varepsilon.$$
Comme f est T-périodique et que $\tilde{x} - x = \tilde{y} - y \in T\mathbb{Z}$ on en déduit que
$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$
et le résultat est prouvé.

2. On note $l^{\pm}$ les limites respectives de f en $\pm\infty$. On se donne un $\varepsilon > 0$ et on commence par utiliser la définition des limites pour construire un nombre $M > 0$ tel que
$$\forall x \geq M, \ \ |f(x) - l^+| \leq \varepsilon/2, \tag{6}$$
$$\forall x \leq -M, \ \ |f(x) - l^-| \leq \varepsilon/2. \tag{7}$$
Ensuite on introduit le compact $K = [-2M, 2M]$ sur lequel f est continue, donc uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que (5) soit vérifiée. Quitte à diminuer δ, on peut toujours supposer que $\delta \leq M$.
Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques tels que $|x - y| \leq \delta$. On va différencier plusieurs cas :
   - Si x et y sont tous les deux dans K, alors on peut appliquer (5) et on a bien montré que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
   - Si au moins l'un des deux points n'est pas dans K, on peut toujours supposer qu'il s'agit de x (les deux points jouent des rôles symétriques). Deux sous-cas sont à envisager :
     - Si $x < -2M$, et vu qu'on a choisi δ plus petit que M, on a
$$y = x + (y - x) \leq x + \delta \leq x + M < -M.$$
       Ainsi x et y sont tous les deux plus petits que $-M$ et on peut donc utiliser (7) pour écrire
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l^-| + |l^- - f(y)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$
     - Si $x > 2M$, on montre de la même façon que $y > M$ et on utilise (6) pour conclure.

3. Soient deux suites comme dans l'énoncé. On se donne un $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Par hypothèse sur les suites, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \ |x_n - y_n| \leq \delta,$$
et donc par la propriété d'uniforme continuité ci-dessus
$$\forall n \geq n_0, \ |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon,$$
ce qui montre les résultat attendu.
Pour les deux exemples proposés, il suffit de trouver deux suites qui contredisent ce que l'on vient de prouver.
   - Pour f_1, on prend
$$x_n = n, \ \ y_n = n + 1/n.$$
     Il est clair que $(x_n - y_n)_n$ tend vers 0 à l'infini alors que
$$f_1(x_n) - f_1(y_n) = n^2 - (n + 1/n)^2 = -2 - 1/n^2,$$
     ne tend pas vers 0.

– Pour f_2, on prend
$$x_n = \sqrt{n\pi}, \quad y_n = \sqrt{n\pi + \pi/2}.$$
On calcule
$$x_n - y_n = \sqrt{n\pi} - \sqrt{n\pi + \pi/2} = \frac{-\pi/2}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{n\pi + \pi/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Mais par ailleurs
$$f_2(x_n) = 0, \quad f_2(y_n) = (-1)^n.$$

Remarque : Dans tous les cas, quand on cherche un tel contre-exemple il faut absolument s'intéresser à des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ non bornées. Car le théorème de Heine dit que sur des compacts, il ne peut y avoir de fonction continue qui ne soit pas uniformément continue. Autrement dit, un défaut de continuité uniforme ne peut se produire qu'au voisinage de l'infini.

■

Exercice 9

Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ une fonction continue et bijective. Montrer que, si on suppose que (X, d) est compact, alors f^{-1} est continue.
Discuter le cas suivant :
$$X = [0, 1[\cup [2, 3[, \quad Y = [0, 2],$$
$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1[, \\ x - 1 & si\ x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Corrigé :

On va donner deux preuves de ce résultat. Une preuve "métrique" utilisant les suites et une preuve "topologique" plus générale.

– Utilisons, par exemple, la caractérisation séquentielle de la continuité de f^{-1}. Soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de Y qui converge vers une limite y, il s'agit de montrer que $x_n \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(y_n)$ converge vers $x \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(y)$.
On va montrer que si $(x_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite convergente, dont la limite est notée l, alors on a nécessairement $l = x$. Pour cela, on utilise la continuité de f qui implique que
$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l),$$
et comme on a $f(x_{\varphi(n)}) = f(f^{-1}(y_{\varphi(n)})) = y_{\varphi(n)}$, il vient que $f(l) = y$ et donc, par bijectivité de f que $l = f^{-1}(y) = x$.
Par compacité, le résultat est donc démontré en utilisant la Proposition I.22.

– On va montrer que l'image réciproque par f^{-1} de tout fermé F de X est un fermé de Y.
Comme f est bijective, nous avons
$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F).$$
Par ailleurs, F est un fermé du compact X, c'est donc un compact (voir la Proposition I.12).
Comme f est continue, nous savons que l'image (directe) par f du compact F est un compact de Y (Théorème I.16) et le résultat est bien démontré.

L'exemple proposé montre que le résultat établi ici est faux en général (sans aucune hypothèse sur X, Y, ou f). On vérifie en effet aisément que f est continue (X a deux composantes connexes sur lesquelles la continuité de f ne fait aucun doute) et bijective. L'application réciproque est donnée par
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in [0, 1[, \\ y + 1 & \text{si } y \in [1, 2], \end{cases}$$
et elle n'est manifestement pas continue au point 1. Remarquons au passage que Y est compact et que c'est donc bien la compacité de X qui permet de montrer le résultat de l'exercice.

On verra plus loin dans le cours un autre résultat très important du même type (qui donne des conditions pour que la fonction réciproque d'une fonction continue soit elle-même continue), voir le Théorème II.33. ■

Exercice 10 (Fonctions Hölderiennes)

Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et $\alpha \in]0,1]$. On dit que $f : X \to Y$ est une fonction α-Hölderienne, et on notera $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(X,Y)$, s'il existe $M > 0$ qui vérifie

$$d'(f(x),f(y)) \leq Md(x,y)^\alpha, \ \ \forall x,y \in X.$$

La plus petite constante M vérifiant cette propriété est notée $|f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$.

1. *Montrer que toute fonction α-Hölderienne est uniformément continue.*
2. *Si (X,d) est borné, montrer que toute fonction Lipschitzienne est α-Hölderienne pour tout $\alpha \in]0,1[$.*
3. *Donner un exemple de fonction α-Hölderienne qui ne soit pas Lispchitzienne.*
4. *On suppose que $(Y,d') = (E,\|.\|)$ est un espace vectoriel normé. Montrer que $\mathcal{C}^{0,\alpha}(X,E)$ est un espace vectoriel et que $|.|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$ est une semi-norme sur $\mathcal{C}^{0,\alpha}(X,E)$. Que manque-t'il pour obtenir une norme ?*

Corrigé :

1. Soit f une fonction α-Hölderienne et $\varepsilon > 0$ fixé puis on pose $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha} > 0$. Soit alors $x,y \in X$ tels que $d(x,y) \leq \delta$, on a alors
$$d'(f(x),f(y)) \leq Md(x,y)^\alpha \leq \varepsilon,$$
ce qui montre que f est uniformément continue.
2. Soit C une borne de l'ensemble des distances entre deux points quelconques de X, on a alors pour $\alpha \in]0,1[$, et $x,y \in X$
$$d(x,y) \leq d(x,y)^{1-\alpha}d(x,y)^\alpha \leq C^{1-\alpha}d(x,y)^\alpha.$$
Ainsi toute fonction Lipschitzienne est dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour tout α.
3. L'exemple classique est la fonction $x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$ qui est $1/2$ Hölderienne mais pas Lipschitzienne. En effet, si $x,y \in [0,1]$ avec $x < y$ nous avons
$$\begin{aligned} |\sqrt{x}-\sqrt{y}| &= \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &= \sqrt{|x-y|}\frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &\leq \sqrt{|x-y|}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &\leq \sqrt{|x-y|}. \end{aligned}$$
Cette fonction n'est pas Lipchitzienne car si c'était le cas, sa dérivée serait bornée sur $]0,1]$ (théorème des accroissements finis) ce qui n'est pas le cas.
4. Le fait que $|f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$ soit positif est clair. Si f et g sont deux fonctions α-Hölderiennes alors nous avons, pour tous x,y
$$\|f(x)-f(y)\| \leq |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}d(x,y)^\alpha,$$
$$\|g(x)-g(y)\| \leq |g|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}d(x,y)^\alpha,$$
et donc en sommant
$$\|(f+g)(x)-(f+g)(y)\| \leq (|f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}+|g|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}})d(x,y)^\alpha,$$
ce qui montre que $f+g$ est α-Hölderienne et que l'on a bien l'inégalité triangulaire. L'homogénité se montre de la même façon.
En revanche, si $|f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} = 0$, nous ne déduisons pas que $f = 0$ car par exemple les fonctions constantes non nulles vérifient cette hypothèse. Il faut donc rajouter à la semi-norme une autre semi-norme qui soit non nulle sur les fonctions qui annulent $|.|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$.
Par exemple, si X est connexe, il n'y a que les fonctions constantes à *tuer* et on peut par exemple prendre comme norme
$$f \mapsto |f(x_0)| + |f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}},$$
où x_0 est un point quelconque de X.

■

Exercice 11

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que
- *L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte correspondante.*
- *La fermeture d'une boule ouverte est la boule fermée correspondante.*

Exhiber des exemples simples montrant que ces propriétés sont fausses en général dans un espace métrique.

Corrigé :

Prouvons le premier résultat. On sait déjà que $B(x, r)$ est un ouvert contenu dans $\overline{B}(x, r)$, il s'agit de montrer que c'est le plus grand. Supposons qu'il existe un ouvert U inclus dans $\overline{B}(x, r)$ et contenant strictement $B(x, r)$. Il est clair alors que U contient un élément y de la sphère $S(x, r)$, i.e. vérifiant $\|y - x\| = r$. On observe ensuite que

$$d(x, x + (t/r)(y - x)) = \|x - (x + (t/r)(y - x)\| = t$$

et donc $x + (t/r)(y - x)$ n'est pas dans $\overline{B}(x, r)$ pour tout $t > r$ mais converge vers y quand $t \to r$, ce qui n'est pas possible.

Pour les contre-exemples, il suffit de prendre pour X la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ munie de la distance induite par celle de $\mathbb{R}^d$. Dans cet espace la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$, est aussi ouverte et donc égale à son intérieur ... ■

Exercice 12 (Identité du parallèlogramme. Caractérisation des espaces pré-hilbertiens)

*Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la norme $\|.\|$ découle d'un produit scalaire sur E si et seulement si nous avons la propriété suivante (***identité du parallèlogramme***)*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \;\; \forall x, y \in E.$$

Indication : Pour la condition suffisante, on pourra montrer que l'identité du parallèlogramme implique

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2, \;\; \forall x, y, z \in E. \qquad (\star)$$

Corrigé :

- Supposons que la norme sur E découle d'un produit scalaire. Il suffit alors de développer le membre de gauche
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2) + (\|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
- Si maintenant on suppose que l'identité du parallèlogramme est vraie pour une certaine norme $\|.\|$, il s'agit de montrer l'existence d'un produit scalaire associé.
Pour cela, on définit pour tous $x, y \in E$ la quantité suivante
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \qquad (8)$$
Il est clair que φ est symétrique et que $\varphi(x, x) = \|x\|^2$ pour tout x, donc on a la définie positivité. Si on montre que φ est bilinéaire on aura gagné.
Remarquons pour commencer que φ est continue par rapport à chacune de ses variables car elle est construite en composant des applications continues ($x \mapsto x \pm y$, la norme $\|.\|$, la fonction carré, ...).
  - Montrons pour commencer l'égalité ($\star$). Pour cela on commence par appliquer trois fois l'identité du parallèlogramme aux couples $(x + y, z)$, $(x + z, y)$ et $(y + z, x)$ et on somme l'ensemble pour obtenir
  $$\begin{aligned}3\|x + y + z\|^2 =& 2(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2) \\ &- \|x + y - z\|^2 - \|x - y + z\|^2 - \| - x + y + z\|^2.\end{aligned}$$
  On applique maintenant trois fois l'identité du parallèlogramme aux couples $(x - z, y)$, $(x - y, z)$ et $(y - z, x)$, on somme et on simplifie par 2 pour obtenir
  $$\|x - z + y\|^2 + \|x - z - y\|^2 + \|x - y + z\|^2 = \|x - z\|^2 + \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2.$$
  Enfin, on applique trois fois l'identité du parallèlogramme aux couples (x, y), (y, z) et (x, z) et on somme pour obtenir
  $$\|x - z\|^2 + \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 = 4(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2) - \|x + z\|^2 - \|x + y\|^2 - \|y + z\|^2.$$
  En rassemblant les trois identités obtenues ci-dessus, et en simplifiant par 3, on obtient bien l'identié ($\star$).

– Vérifiant maintenant que φ est additive. Par définition, on a
$$4\varphi(x+y,z) = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2,$$
et en appliquant ($\star$) aux triplets (x,y,z) et $(x,y,-z)$, on obtient par soustraction
$$4\varphi(x+y,z) = \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2 = 4\varphi(x,z) + 4\varphi(y,z),$$
ce qui montre le résultat.

– On a précédemment montré l'additivité de φ par rapport à chacune de ses variables. Il nous faut maintenant montrer l'homogénéité par rapport à la première variable (cela suffit par symétrie).
  – Observons d'abord que, d'après (8), nous avons clairement
$$\varphi(-x,y) = \varphi(x,y), \quad \forall x,y \in E. \tag{9}$$
  – On écrit maintenant, en utilisant l'additivité de φ établie plus haut
$$\varphi(2x,y) = \varphi(x+x,y) = \varphi(x,y) + \varphi(x,y) = 2\varphi(x,y), \quad \forall x,y \in E.$$
Par une récurrence immédiate nous obtenons
$$\varphi(nx,y) = n\varphi(x,y), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x,y \in E,$$
et avec (9) nous déduisons finalement
$$\varphi(nx,y) = n\varphi(x,y), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x,y \in E. \tag{10}$$
  – Soit maintenant $\lambda = p/q$ un nombre rationnel. En appliquant (10) avec x/q à la place de x et $n = q$, nous avons
$$\varphi(x,y) = q\varphi\left(\frac{1}{q}x, y\right), \quad \forall x,y \in E.$$
On applique cette nouvelle formule avec px au lieu de x et on obtient
$$p\varphi(x,y) = \varphi(px,y) = q\varphi\left(\frac{p}{q}x, y\right), \quad \forall x,y \in E,$$
ce qui finalement donne
$$\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}, \forall x,y \in E. \tag{11}$$
  – On se donne maintenant un réel λ quelconque. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{Q}$ qui converge vers λ. D'après (11) nous avons, pour $x,y \in E$ fixés
$$\varphi(\lambda_n x,y) = \lambda_n\varphi(x,y).$$
Par ailleurs, $(\lambda_n x)_n$ converge vers λx dans E car nous avons
$$\|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n - \lambda|\|x\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$
Par continuité de φ par rapport à sa première variable, on peut donc passer à la limite dans la formule ci-dessus et obtenir la propriété d'homogénéité attendue
$$\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,y \in E.$$

Ceci conclut la preuve de la bilinéarité de φ et donc la preuve du résultat demandé.

Remarque : La formule (8) qui donne une expression du produit scalaire en fonction de la norme est appelée **formule de polarisation**.

■

Exercice 13

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $T : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Montrer les équivalences suivantes
$$T \textit{ est continue} \iff \textit{Ker } T \textit{ est fermé dans } E,$$
$$T \textit{ n'est pas continue} \implies \textit{Ker } T \textit{ est dense dans } E.$$

Corrigé :

- Si T est continue, son noyau qui est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ est bien fermé.
  Supposons maintenant que Ker T est fermé (et que T n'est pas identiquement nulle sinon il n'y a rien à montrer). On fixe un élément $e \in E$ tel que $T(e) = 1$. On se donne une suite $(x_n)_n$ qui tend vers 0 et on veut montrer que $T(x_n)$ tend vers 0. Supposons que ce n'est pas le cas. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que pour un certain $\varepsilon > 0$, on a $|T(x_n)| \geq \varepsilon$ pour tout n.
  On pose maintenant $y_n = e - \frac{1}{T(x_n)}x_n$. Par choix de e, nous avons $T(y_n) = 0$ pour tout n et par construction nous avons
  $$\|y_n - e\| = \frac{\|x_n\|}{|T(x_n)|} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
  ce qui montre que $(y_n)_n$ converge vers e. Par hypothèse, Ker T est fermé et donc e doit donc appartenir à Ker T, soit donc $T(e) = 0$, ce qui contredit le choix de e et prouve le résultat.
- Montrons que si Ker T n'est pas fermé alors il est dense. Si Ker T n'est pas fermé, il existe un $u \in \overline{\text{Ker}\, T}$ qui n'est pas dans Ker T. Quitte à diviser u par $T(u)$, on peut supposer que $T(u) = 1$.
  Soit maintenant $x \in E$ quelconque. On peut écrire
  $$x = (x - T(x)u) + T(x)u,$$
  et on voit que le premier terme est dans Ker T et le second, par construction, est dans $\overline{\text{Ker}\, T}$. Ainsi x est un élément de $\overline{\text{Ker}\, T}$, ce qui montre bien que Ker T est dense dans E.

■

Exercice 14

> *Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que les applications "multiplication" et "addition" définies comme suit sont continues*
> $$M : (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda x \in E,$$
> $$A : (x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E.$$

Corrigé :

- Il suffit de constater que nous avons
  $$\|M(\lambda, x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E.$$
  Comme M est bilinéaire, cela implique la continuité (Proposition I.52).
- L'application A est linéaire de $E \times E$ dans E et par inégalité triangulaire et définition de la norme produit sur $E \times E$, on a
  $$\|A((x, y))\|_E = \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E = \|(x, y)\|_{E\times E},$$
  ce qui prouve bien la continuité de A (Théorème I.41).

■

Exercice 15

> *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Montrer que l'application* **composition**
> $$\circ : (T, S) \in L(E, F) \times L(F, G) \mapsto S \circ T \in L(E, G),$$
> *est bilinéaire et continue pour les normes naturelles sur les espaces $L(.,.)$.*

Corrigé :

On vérifie d'abord que $\circ$ est une application bilinéaire (attention ! ceci n'est vrai que parce qu'on compose des applications elles-mêmes linéaires).

La continuité est ainsi juste une conséquence de l'inégalité suivante
$$\|S \circ T(x)\|_G \leq \|S\|_{L(F,G)}\|T(x)\|_F \leq \|S\|_{L(F,G)}\|T\|_{L(E,F)}\|x\|_E,$$
qui prouve que
$$\|S \circ T\|_{L(E,G)} \leq \|S\|_{L(F,G)}\|T\|_{L(E,F)}.$$

On utilise ici la Proposition I.52. ∎

Exercice 16

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé quelconque.

1. *Montrer que tout sous-espace vectoriel de E* **de dimension finie** *est fermé dans E.*
2. *Montrer que tout sous-espace vectoriel* **strict** *de E est d'intérieur vide.*

Corrigé :

1. Soit F un sous-espace de dimension finie de E. L'espace F muni de la norme de E est un espace vectoriel normé de dimension finie. D'après le théorème I.54, c'est un espace complet. On utilise maintenant la proposition I.29 pour déduire que F est nécessairement fermé dans E.
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel strict de E. Il existe donc $e \in F \setminus E$. Par homogénéité, on peut supposer que $\|e\| = 1$.
   Soit maintenant $x \in F$ quelconque et $\varepsilon > 0$, nous avons alors
   $$x + \frac{\varepsilon}{2} e \in B(x, \varepsilon) \setminus F.$$
   En effet, on a
   $$\left\| \left(x + \frac{\varepsilon}{2} e \right) - x \right\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2} e \right\| = \frac{\varepsilon}{2} \|e\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$
   et $x + \frac{\varepsilon}{2} e$ ne peut appartenir à F, sinon e appartiendrait aussi à F ce qui est exclu.
   On a donc établi
   $$B(x, \varepsilon) \not\subset F, \quad \forall \varepsilon > 0,$$
   ce qui montre que l'intérieur de F est vide.

∎

Exercice 17

On considère l'espace $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.

1. *Montrer que, pour $f \in E$, les quantités suivantes sont bien définies et sont des normes sur E*
   $$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$
2. *Montrer que $(E, \|.\|_\infty)$ est complet.*
3. *Pour tout $n \geq 1$ et $x \in [-1,1]$, on pose*
   $$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1/n, \\ nx, & \text{si } -1/n < x < 1/n, \\ 1, & \text{si } x > 1/n. \end{cases}$$
   Montrer que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$. Converge-t'elle dans cet espace ? Qu'en déduit-on ?
4. *Pour tout n et tout $x \in [-1,1]$, on pose $g_n(x) = x^n$. Discuter la convergence éventuelle de la suite $(g_n)_n$ dans les espaces $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_\infty)$.*

Corrigé :

1. Soit $f \in E$. La fonction $|f|$ étant continue sur le compact $[-1,1]$, elle est bornée et atteint ses bornes (Théorème I.16), ce qui prouve que $\|f\|_\infty$ est bien définie. De même, la fonction continue $|f|$ est intégrable sur le compact $[-1,1]$.
   On vérifie sans aucune difficulté que ce sont bien deux normes sur E.
2. La stratégie de preuve est standard. On se donne une suite $(f_n)_n$ de Cauchy dans $(E, \|.\|_\infty)$. Cela signifie que
   $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \ \ \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon. \tag{12}$$

Il faut d'abord exhiber une éventuelle limite de cette suite. Pour cela, on va raisonner par convergence simple. Pour tout point $x \in [-1,1]$, on observe que la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. En effet, nous avons

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \;\; |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \sup_{[-1,1]} |f_{n+p} - f_n| = \|f_{n+p} - f_n\|_\infty < \varepsilon. \tag{13}$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet, nous en déduisons qu'il existe une limite, notée $f(x)$, de la suite $(f_n(x))_n$.
Il s'agit maintenant de montrer que la fonction f ainsi construite est continue et qu'elle est bien la limite de $(f_n)_n$ dans $(E, \|.\|_\infty)$.
Pour cela, on observe que le n_0 dans (13) ne dépend pas du point x, car il provient de (12). En conséquence, nous pouvons fixer $x \in [-1,1]$ et $n \geq n_0$ et passer à la limite quand $p \to \infty$ dans (13) pour obtenir

$$\forall x \in [-1,1], \forall n \geq n_0, \;\; |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{14}$$

Ceci montre que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f. Comme chaque f_n est continue sur $[-1,1]$, un théorème usuel de Licence nous dit que la limite f est également une fonction continue. On a donc montré que $f \in E$.
En observant attentivement (14), on voit que l'on a en fait montré

$$\forall n \geq n_0, \;\; \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

où n_0 ne dépend que de ε. On a finalement bien montré que $(f_n)_n$ converge vers f dans $(E, \|.\|_\infty)$.
Ceci conclut la preuve de la complétude de $(E, \|.\|_\infty)$.

3. Observons la figure 1. La quantité $\|f_n - f_{n+p}\|_1$ correspond à l'aire de la zone grisée que l'on peut bien sûr calculer explicitement. En réalité, ce calcul précis n'est pas utile et on peut se contenter de la majoration suivante qui utilise le fait que f_n et f_{n+p} coincident sur le complémentaire de $[-1/n, 1/n]$ et sont bornées par 1

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_{n+p} - f_n| = \int_{-1/n}^{1/n} |f_{n+p} - f_n| \leq \int_{-1/n}^{1/n} 2.$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$ uniformément par rapport à p, ce qui prouve bien que $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$.

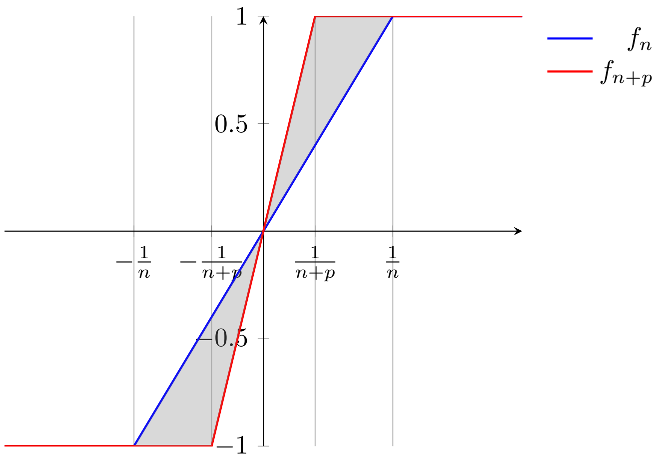

FIGURE 1 – Les fonctions f_n et f_{n+p}

Il reste à voir que $(f_n)_n$ ne converge pas dans $(E, \|.\|_1)$. L'intuition nous dit que si la limite f existe, elle doit valoir 1 sur $]0,1]$ et -1 sur $[-1, 0[$ ce qui est exclu pour une fonction continue. Formalisons ce raisonnement en supposant l'existence d'une limite $f \in E$ de la suite $(f_n)_n$, au sens de la norme $\|.\|_1$.
Fixons $\alpha \in]0,1]$ et observons que pour $n > \frac{1}{\alpha}$, les fonctions f_n sont identiquement égales à 1 sur $[\alpha, 1]$ ce qui donne

$$\int_\alpha^1 |f-1| = \int_\alpha^1 |f - f_n| \leq \int_{-1}^1 |f - f_n| = \|f - f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ainsi nous avons $\int_\alpha^1 |f-1| = 0$ ce qui prouve que $f = 1$ sur $[\alpha, 1]$.
Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in]0,1]$, on a bien prouvé que $f = 1$ sur $]0,1]$.
Le même raisonnement montre que $f = -1$ sur $[-1, 0[$ et on a bien une contradiction avec le fait que f doit être continue.
On déduit de tout cela que $(E, \|.\|_1)$ n'est pas complet. Son complété n'est rien d'autre que l'espace $(L^1(]-1,1[), \|.\|_1)$ des (classes de) fonctions Lebesgue-intégrables sur $]-1,1[$.

4. Les courbes représentatives de quelques unes des fonctions g_n sont données dans la figure 2.

   – Etudions d'abord la convergence de $(g_n)_n$ dans $(E, \|.\|_\infty)$. Cette convergence, si elle a lieu, n'est rien d'autre que la convergence uniforme sur $[-1,1]$. Ainsi, si une limite g existe, elle est en particulier la limite simple des $(g_n)_n$. Or nous observons que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0, \ \ \forall x \in]-1,1[, \\ &\lim_{n\to\infty} g_n(1) = 1, \\ &\lim_{n\to\infty} g_n(-1) \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

   La limite simple des g_n n'existe donc pas (à cause du point $x=-1$) et même si on exclut ce point, il y a une discontinuité de la limite en $x=1$. En conclusion, la suite de fonctions g_n ne converge pas simplement et donc ne peut en aucun cas converger uniformément.

   – Montrons qu'en revanche la suite $(g_n)_n$ converge vers 0 au sens de la norme $\|.\|_1$. On pourrait appliquer le théorème de convergence dominée par exemple (sauriez-vous le faire proprement ?) mais ici on peut simplement faire le calcul explicite

$$\|g_n - 0\|_1 = \|g_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |x|^n \, dx = 2\int_0^1 x^n \, dx = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

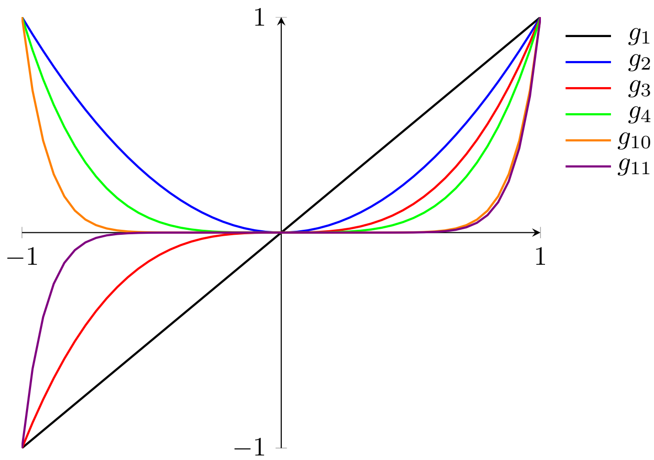

FIGURE 2 – Les fonctions g_n

■

Exercice 18 (Familles sommables)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est **sommable**, *de somme $S \in E$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J_\varepsilon \subset I, J_\varepsilon \textbf{ fini}, \text{ tel que pour tout } J \subset I \textbf{ fini} \text{ avec } J_\varepsilon \subset J, \text{ on a } \left\| S - \sum_{i\in J} x_i \right\| \leq \varepsilon. \quad (\star)$$

1. *Montrer que si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, sa somme est unique.*
   Montrer également que si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors
   $$\exists M > 0,\ \forall J \subset I,\ J \text{ fini, on a } \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\| \leq M. \quad (\star\star)$$
2. *Soit $\varphi : \tilde{I} \to I$ une bijection d'un autre ensemble $\tilde{I}$ sur I. Pour tout $\tilde{i} \in \tilde{I}$, on pose $y_{\tilde{i}} = x_{\varphi(\tilde{i})}$. Montrer que*
   $$(x_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff (y_{\tilde{i}})_{\tilde{i}\in\tilde{I}} \text{ est sommable},$$
   et que, dans le cas sommable, les deux sommes sont égales. Autrement dit, la propriété de sommabilité ne dépend pas de la façon dont sont indexées les familles considérées.
3. *Montrer que si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors elle est "dénombrable" au sens suivant*
   $$\{i \in I,\ \ x_i \neq 0\}, \text{ est dénombrable}.$$
4. *Dans cette question, on compare la notion de "série convergente" avec celle de "famille sommable". Soit donc $(x_n)_n \subset E$ une suite dans E (i.e. une famille dénombrable dont on a fixé la numérotation).*
   (a) *Montrer que si la famille $(x_n)_n$ est sommable, alors la série $\sum_n x_n$ est convergente.*
   (b) *Montrer que la famille $(x_n)_n$ est absolument sommable si et seulement si la série $\sum_n x_n$ est absolument convergente.*
   (c) *On se place dans $E = \mathbb{R}$ et on considère $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Montrer que la série $\sum_n x_n$ est convergente mais que la famille $(x_n)_n$ n'est pas sommable.*
5. *On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est absolument sommable si $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$.*
   (a) *Montrer que si $(E, \|.\|)$ est complet, alors toute famille absolument sommable est sommable.*
   (b) *Réciproquement, montrer que si toute famille absolument sommable est sommable, alors $(E, \|.\|)$ est complet.*

Corrigé :

1. Supposons qu'il existe deux sommes S et S' distinctes vérifiant la définition. On pose alors $\varepsilon = \frac{1}{4}\|S - S'\| > 0$ et on applique la définition de S
   $$\exists J_\varepsilon \text{ fini tel que pour tout } J \subset I \text{ fini avec } J_\varepsilon \subset J \text{ on a } \|S - \sum_{i\in J} x_i\| \leq \varepsilon, \quad (15)$$
   et celle de S'
   $$\exists J'_\varepsilon \text{ fini tel que pour tout } J \subset I \text{ fini avec } J'_\varepsilon \subset J \text{ on a } \|S' - \sum_{i\in J} x_i\| \leq \varepsilon. \quad (16)$$
   On pose maintenant $J = J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon$ qui est bien un ensemble fini contenant à la fois J_ε et J'_ε. Ainsi d'après (15) et (16), nous avons
   $$\|S - \sum_{i\in J} x_i\| \leq \varepsilon, \text{ et } \|S' - \sum_{i\in J} x_i\| \leq \varepsilon.$$
   En combinant ces deux inégalités et avec l'inégalité triangulaire, on trouve
   $$\|S - S'\| \leq \|S - \sum_{i\in J} x_i\| + \|S' - \sum_{i\in J} x_i\| \leq 2\varepsilon.$$
   Par choix initial de ε, on obtient
   $$\|S - S'\| \leq \frac{1}{2}\|S - S'\|,$$

ce qui est une contradiction manifeste.

Montrons la seconde propriété. On applique la définition ($\star$) avec $\varepsilon = 1$ (par exemple). On a donc l'existence d'un ensemble fini J_1 tel que, pour tout J fini contenant J_1, on a

$$\left\| S - \sum_{i \in J} x_i \right\| \leq 1,$$

et donc, en particulier,

$$\left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| \leq 1 + \|S\|.$$

On a presque le résultat attendu, à ceci près que l'inégalité ci-dessus n'est vrai que pour les J qui contiennent J_1. Si maintenant J est un ensemble fini quelconque, on peut appliquer ce qui précède à $J \cup J_1$. On en déduit

$$\left\| \sum_{i \in J \cup J_1} x_i \right\| \leq 1 + \|S\|.$$

En écrivant l'union disjointe

$$J \cup J_1 = J \bigsqcup (J_1 \setminus J),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i \in J \cup J_1} x_i - \sum_{i \in J_1 \setminus J} x_i \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{i \in J \cup J_1} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in J_1 \setminus J} x_i \right\| \\
&\leq (1 + \|S\|) + \sum_{i \in J_1 \setminus J} \|x_i\| \\
&\leq (1 + \|S\|) + \sum_{i \in J_1} \|x_i\|,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne un majorant valable pour tous les ensembles finis J (vu que J_1 a été fixé une fois pour toute au début).

2. Supposons que $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et notons S sa somme. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé ; d'après la définition de la sommabilité, on peut trouver un ensemble fini $J_\varepsilon \subset I$ vérifiant ($\star$). Posons $\tilde{J}_\varepsilon = \varphi^{-1}(J_\varepsilon)$ qui est bien un sous-ensemble fini de $\tilde{I}$ et vérifions que cet ensemble vérifie la propriété ($\star$) pour la famille $(y_{\tilde{i}})_{\tilde{i} \in \tilde{I}}$.

   Pour cela, on se donne un ensemble fini $\tilde{J} \subset \tilde{I}$ tel que $\tilde{J}_\varepsilon \subset \tilde{J}$. On pose $J = \varphi(\tilde{J})$ qui est un sous-ensemble fini de I contenant J_ε. Par définition de la famille $(y_{\tilde{i}})_{\tilde{i} \in \tilde{I}}$, et comme φ réalise une bijection de $\tilde{J}$ sur J, on a

$$\left\| S - \sum_{\tilde{i} \in \tilde{J}} y_{\tilde{i}} \right\| = \left\| S - \sum_{\tilde{i} \in \tilde{J}} x_{\varphi(\tilde{i})} \right\| = \left\| S - \sum_{i \in J} x_i \right\| \leq \varepsilon,$$

   d'après ($\star$), puisque J contient J_ε.

   On a bien montré que S est aussi la somme de la famille $(y_{\tilde{i}})_{\tilde{i} \in \tilde{I}}$.

3. On note $K = \{i \in I, x_i \neq 0\}$ l'ensemble dont on veut montrer la dénombrabilité et on pose

$$K_n = \{i \in I, \|x_i\| > 1/n\}.$$

   On va montrer que K_n est fini.

   Pour cela, on applique la définition de la sommabilité avec $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, ce qui nous donne l'existence d'un ensemble **fini** $J_n \subset I$ tel que pour tout J fini vérifiant $J_n \subset J$ on a

$$\|S - \sum_{i \in J} x_i\| \leq \frac{1}{2n}.$$

   On va montrer que $K_n \subset J_n$ ce qui impliquera bien que K_n est fini.

Soit $j \in I \subset J_n$, on applique la définition de la sommabilité avec $J = J_n$ et $J = J_n \cup \{j\}$ qui sont bien deux ensembles finis contenant J_n. On a donc

$$\|S - \sum_{i \in J_n} x_i\| \leq \frac{1}{2n},$$

et

$$\|S - \sum_{i \in J_n \cup \{j\}} x_i\| \leq \frac{1}{2n}.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
\|x_j\| &= \left\| \sum_{i \in J_n \cup \{j\}} x_i - \sum_{i \in J_n} x_i \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{i \in J_n \cup \{j\}} x_i - S \right) + \left(S - \sum_{i \in J_n} x_i \right) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{i \in J_n \cup \{j\}} x_i - S \right\| + \left\| \sum_{i \in J_n} x_i - S \right\| \\
&\leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

et ainsi j n'appartient pas à l'ensemble K_n, ce qui prouve bien que $K_n \subset J_n$.
Pour conclure, on remarque que l'ensemble qui nous intéresse K vérifie

$$K = \bigcup_{n \geq 1} K_n,$$

et c'est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis, c'est donc bien un ensemble dénombrable.

4. (a) Supposons $(x_n)_n$ sommable et notons S sa somme. On note $(S_N)_N$ la suite des sommes partielles de la série de terme général x_n, c'est-à-dire

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n.$$

Montrons que la suite $(S_N)_N$ converge vers S. Soit donc $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la sommabilité, il existe un ensemble fini $J_\varepsilon \subset \mathbb{N}$ vérifiant ($\star$). On note $N_0 = \max J_\varepsilon$ (c'est possible car J_ε est fini). Pour tout $N \geq N_0$, on a

$$J_\varepsilon \subset \{0, \ldots, N\},$$

et donc, par ($\star$), on a

$$\|S - S_N\| = \left\| S - \sum_{n=0}^{N} x_n \right\| = \left\| S - \sum_{n \in \{0,\ldots,N\}} x_n \right\| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré le résultat.

(b) Dans le sens direct, il suffit d'appliquer la question précédente à la famille $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour le sens réciproque, on suppose que la série de terme général $(\|x_n\|)_n$ est convergente. On note S sa somme.
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \geq 0$ tel que

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \|x_n\| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique

$$0 \leq S - \sum_{n=0}^{n_0} \|x_n\| \leq \varepsilon.$$

On pose maintenant $J_\varepsilon = \{0, ..., n_0\}$ qui est bien un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Si J est un autre sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ qui contient J_0, on peut écrire

$$\left| S - \sum_{n \in J} \|x_n\| \right| \leq \left| S - \sum_{n \in J_\varepsilon} \|x_n\| \right| + \sum_{n \notin J_\varepsilon} \|x_n\| \leq 2\varepsilon,$$

et le résultat est démontré.

(c) La convergence de cette série alternée est un classique de niveau licence (une façon de faire étant de procéder à une transformation d'Abel ...).

Montrons que la famille $(x_n)_n$ n'est pas sommable. On se fixe un ensemble fini J_0 quelconque et on note $n_0 = \max J_0$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2k_0 > n_0$.

Pour $k_1 \geq k_0$ quelconque on pose $J_1 = J_0 \cup \{2k_0, 2(k_0+1), \dots, 2k_1\}$ qui est, par construction, un ensemble fini contenant J_0. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\in J_1} x_n &= \sum_{n\in J_0} x_n + \sum_{n\in\{2k_0,\dots,2k_1\}} x_n \\ &= \sum_{n\in J_0} x_n + \sum_{k=k_0}^{k_1} x_{2k} \\ &= \sum_{n\in J_0} x_n + \sum_{k=k_0}^{k_1} \frac{1}{2k}.\end{aligned}$$

Comme la série harmonique (de terme général $1/k$) est divergente, on voit que l'on peut rendre la quantité précédente aussi grande que l'on veut en prenant k_1 de plus en plus grand. Ceci contredit la borne ($\star\star$) que la famille $(x_n)_n$ devrait vérifier si elle était sommable.

5. (a) Si $(x_i)_i$ est absolument sommable, l'ensemble K défini à la question 3 est bien également dénombrable (on applique le résultat à la famille $(\|x_i\|)_i$, ce qui ne change rien à l'ensemble K ...).

Si K est fini, il est clair que la famille $(x_i)_i$ est sommable et que sa somme vaut

$$S = \sum_{i\in K} x_i.$$

On suppose donc que K est infini (dénombrable). On peut donc trouver une application bijective $\varphi : \mathbb{N} \to K$. Par définition, la famille $(\|x_{\varphi(n)}\|)_n$ est donc sommable (on a enlevé tous les éléments nuls de la famille initiale ...). D'après la question 4.b) la série de terme général $(x_{\varphi(n)})_n$ est donc absolument convergente. Comme E est complet, la série de terme général $(x_{\varphi(n)})_n$ est convergente (Voir la proposition I.46). On note S sa somme et on va montrer que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et a pour somme S. On se donne un $\varepsilon > 0$. Par convergence absolue de la série de terme général $(x_{\varphi(n)})_n$, il existe un n_0 tel que

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \|x_{\varphi(n)}\| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique en particulier que

$$\left\| S - \sum_{n=0}^{n_0} x_i \right\| \leq \varepsilon.$$

On pose alors $J_\varepsilon = \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_0)\}$ qui est bien fini. Pour tout $J \subset I$ fini contenant J_ε on a (en remarquant que $J_\varepsilon \subset K$ par construction)

$$\sum_{i\in J} x_i = \sum_{i\in J\cap K} x_i = \sum_{i\in J_\varepsilon} x_i + \sum_{i\in (J\setminus J_\varepsilon)\cap K} x_i,$$

et donc

$$\begin{aligned}\left\| S - \sum_{i\in J} x_i \right\| &\leq \left\| S - \sum_{i\in J_\varepsilon} x_i \right\| + \left\| \sum_{i\in (J\setminus J_\varepsilon)\cap K} x_i \right\| \\ &\leq \left\| S - \sum_{n=0}^{n_0} x_{\varphi(n)} \right\| + \sum_{n\geq n_0+1} \|x_{\varphi(n)}\| \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré.

(b) C'est une simple conséquence de la Proposition I.46 et de la question 4.b).

■

Exercice 19 (Tiré du partiel 2013/2014)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. *Montrer que, quelque soit la norme choisie sur E, l'application*

$$\Phi : P \in E \mapsto XP'(X) \in E,$$

n'est pas continue.

2. *On note E_0 le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0*

$$E_0 = \{P \in E, \;\; P(0) = 0\}.$$

(a) *Montrer que Φ est une bijection de E_0 sur E_0.*

(b) *Pour tout $P \in E$, on note*

$$N(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \;\; \forall P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in E_0.$$

Montrer que N est une norme sur E (et donc sur E_0 qui est un sous-espace de E).

(c) *Montrer que Φ^{-1} est continue sur (E_0, N). Calculer sa norme dans $L\big((E_0, N), (E_0, N)\big)$.*

3. *On pose maintenant*

$$\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|, \;\; \forall P \in E.$$

(a) *Montrer qu'il s'agit d'une norme sur E.*

(b) *Montrer que*

$$\forall P \in E, \;\; \|P\| \leq N(P).$$

(c) *Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que*

$$\forall P \in E, \;\; N(P) \leq C\|P\|.$$

Indication : *On pourra considérer les polynômes*

$$P_N(X) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n X^n, \;\; \forall N \geq 1.$$

(d) *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on introduit l'application linéaire*

$$\varphi_a : P \in E \mapsto \varphi_a(P) = P(a) \in \mathbb{R}.$$

Montrer que φ_a est continue pour la norme $\|.\|$ si et seulement si $a \in [0, 1]$.

Corrigé :

1. Soit $\|.\|$ une norme sur E. On observe que

$$\Phi(X^n) = X\frac{d}{dX}(X^n) = nX^n,$$

de sorte que

$$\|\Phi(X^n)\| = n\|X^n\|, \;\; \forall n \geq 0.$$

et donc il ne peut exister de constante C telle que

$$\|\Phi(P)\| \leq C\|P\|.$$

2. (a) On constate déjà que $\Phi(P) \in E_0$ pour tout $P \in E$, à cause du facteur X dans la définition de Φ. Ainsi Φ définit bien une application de E_0 dans lui-même.
   – Montrons qu'elle est injective dans E_0. Si $P \in E_0$ est tel que $\Phi(P) = 0$ alors nous avons

$$P' = 0,$$

et donc P est un polynôme constant. Comme $P \in E_0$, il ne peut être que le polynôme nul.

– Montrons maintenant la surjectivité de cette application. On se donne un polynôme $Q \in E_0$ que l'on écrit

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k,$$

sans terme d'ordre 0 par hypothèse. On voit immédiatement que l'on a $\Phi(P) = Q$ avec P défini par

$$P(X) = \sum_{k=1} \frac{a_k}{k} X^k.$$

(b) Il n'y a aucune difficulté ici. On utilise que les coefficients de la somme de deux polynômes sont les sommes de tous les coefficients respectifs.

(c) On a obtenu l'expression de Φ^{-1} à la question (a)

$$\Phi^{-1}(Q) = P,$$

avec

$$Q = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k, \text{ et } P = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} X^k.$$

On a bien

$$N(\Phi^{-1}(Q)) = N(P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| = N(Q),$$

ce qui montre la continuité de Φ^{-1} et l'estimation $\|\Phi^{-1}\| \leq 1$. Cette inégalité est en fait une égalité dès lors qu'on constate que

$$\Phi^{-1}(X) = X.$$

3. (a) Le seul point qui mérite une attention particulière est le fait que $\|P\| = 0$ implique que $P = 0$. Ceci est vrai car si $\|P\| = 0$, cela signifie que le polynôme P est nul sur l'intervalle $[0, 1]$ tout entier, ce qui n'est possible que si $P = 0$.

(b) Soit $P \in E$ et $x \in [0, 1]$, nous avons

$$|P(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \underbrace{|x|^k}_{\leq 1} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| = N(P).$$

En prenant le supremum en x, il vient

$$\|P\| \leq N(P).$$

(c) Suivons l'indication de l'énoncé en introduisant les polynômes P_N et en calculant ses normes.

Tout d'abord nous avons aisément

$$N(P_N) = \sum_{n=0}^{N} |(-1)^n| = N + 1.$$

Ensuite, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{N} (-x)^n = \frac{1 - (-x)^{N+1}}{1 + x}.$$

Ceci donne

$$|P_N(x)| \leq 2.$$

Ainsi, on a

$$\|P_N\| = \sup_{[0,1]} |P_N(x)| \leq 2.$$

Ainsi la suite $(P_N)_n$ est bornée pour la norme $\|.\|$ mais pas pour la norme N, ce qui montre bien le résultat souhaité.

(d) La linéarité de φ_a est claire.
Si $a \in [0,1]$, on a bien, pour tout $P \in E$

$$|\varphi_a(P)| = |P(a)| \leq \sup_{[0,1]} |P| = \|P\|,$$

ce qui prouve bien la continuité de φ_a dans ce cas.
Si $a > 1$, et que nous considérons $P_N(X) = X^n$, nous avons

$$\varphi_a(P_N) = a^N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty,$$

alors que $\|P_N\| = 1$.
Si $a < 0$, nous considérons $Q_N(X) = (1-X)^N$, de sorte que

$$\varphi_a(Q_N) = (1-a)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty,$$

alors qu'on a aussi $\|Q_N\| = 1$.

■