EDO/EDP - Examen du 2 Mai 2019
Avec son corrigé
Aucun document autorisé - Durée : 3h

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs autonome régulier.
   (a) Donner la définition d'un **point d'équilibre** x^* de l'équation $x' = f(x)$.
   (b) Donner les définitions de la **stabilité** et de la **stabilité asymptotique** d'un tel point d'équilibre.
2. Pour $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, déterminer explicitement la solution $(t, x, y) \mapsto u(t, x, y)$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u - \partial_y u = 0, & \forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x, y) = u_0(x, y), & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

3. Donner la définition de l'espace de Sobolev $H^1(0, 1)$ et démontrer que c'est un espace de Hilbert.

Corrigé :

1. Voir le cours.
2. La solution est donnée par : $u(t, x, y) = u_0(x - t, y + t)$. Voir le cours pour les calculs (transport à vitesse constante !).
3. Voir le cours.

■

Exercice 2

Soient $A, B, X_0 \in M_d(\mathbb{R})$ trois matrices carrées.

1. Déterminer explicitement la solution $t \mapsto X(t) \in M_d(\mathbb{R})$ du problème de Cauchy matriciel suivant:

$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

2. Même question pour le problème suivant:

$$\begin{cases} X' = XB, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

   On pourra étudier l'équation vérifiée par la transposée de X.
3. Même question pour le problème suivant:

$$\begin{cases} X' = AX + XB, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Corrigé :

1. La solution est donnée dans le cours grâce à l'exponentielle de matrice

$$X(t) = e^{tA} X_0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Si vous êtes gênés par le fait que la solution est matricielle et non pas vectorielle, vous pouvez raisonner colonne par colonne.
2. Regardons l'équation vérifiée par la transposée ${}^t X$ qui s'écrit

$$({}^t X)' = ({}^t B)({}^t X),$$

et donc d'après la première question

$$ {}^tX(t) = \left(e^{t\,{}^tB}\right) {}^tX_0, $$

ce qui donne, en transposant à nouveau,

$$ X(t) = X_0 e^{tB}. $$

3. On regarde l'équation vérifiée par la quantité $Z(t) = e^{-tA}X(t)$ qui est

$$ Z'(t) = e^{-tA}X'(t) - e^{-tA}AX(t) = e^{-tA}X(t)B = Z(t)B, $$

avec $Z(0) = X_0$. On applique alors le résultat de la question précédente pour obtenir $Z(t) = X_0e^{tB}$ et donc la formule

$$ X(t) = e^{tA}X_0e^{tB}. $$

On pouvait aussi constater que les endomorphismes de $M_d(\mathbb{R})$ donnés par $a : X \mapsto AX$ et $b : X \mapsto XB$ commutent et donc que l'endomorphisme exponentiel $e^{t(a+b)}$ est égal à la composée de $e^{ta} \circ e^{tb}$ (on peut choisir une base de $M_d(\mathbb{R})$ pour s'en convaincre). Autrement dit, la solution du problème général est la composée (et non pas la somme !) des deux résultats obtenus précédemment c'est-à-dire

$$ X(t) = e^{tA}X_0e^{tB}. $$

■

Exercice 3 (Problème aux limites non-linéaires)

Soit $f : (x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to f(x, u) \in \mathbb{R}$ une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à la variable u. On fait les hypothèses suivantes:

$$ \text{il existe } C > 0 \text{ tel que } \; |f(x, u)| \leqslant C|u|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}, $$

$$ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \;\; u \mapsto f(x, u) \text{ est croissante.} $$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixés dans tout l'exercice. On s'intéresse au problème aux limites suivant

$$ \begin{cases} -u'' + f(x, u) = 0, \;\; \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = \alpha, \\ u(1) = \beta. \end{cases} \tag{1} $$

1. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on considère le problème suivant

$$ \begin{cases} -u'' + f(x, u) = 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = \alpha, \\ u'(0) = \gamma. \end{cases} \tag{2} $$

   (a) Justifier l'existence d'une unique solution maximale, notée u_γ, de (2).

   (b) Montrer que pour une certaine constante $M > 0$, on a

$$ |u_\gamma(x)| + |u'_\gamma(x)| \leqslant (|\alpha| + |\gamma|) + M \int_0^x (|u_\gamma(t)| + |u'_\gamma(t)|)\, dt, \;\; \forall x \geqslant 0. $$

   En déduire que cette solution est (au moins) définie sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Soient deux réels vérifiant $\gamma_1 > \gamma_2$.

   (a) Montrer que la fonction $\varphi = (u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})'(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})$ est strictement positive sur $]0, 1]$. Pour cela, on pourra étudier la monotonie de φ sur $[0, 1]$.

   (b) En déduire que $(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})' > 0$ sur $[0, 1]$, puis que $(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2}) > 0$ sur $]0, 1]$ et enfin que $(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})'' \geqslant 0$ sur $[0, 1]$.

   (c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $u_{\gamma_1}(x) - u_{\gamma_2}(x) \geqslant (\gamma_1 - \gamma_2)x$.

3. Montrer que l'application $\gamma \in \mathbb{R} \mapsto u_\gamma(1) \in \mathbb{R}$, est strictement croissante, continue et bijective.

4. En déduire que le problème (1) admet une unique solution.

Corrigé :

1. (a) Il s'agit d'un problème de Cauchy que l'on peut mettre sous la forme d'un système 2×2

$$U'(x) = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}'(x) = \begin{pmatrix} u' \\ f(x,u) \end{pmatrix} = F(x,U),$$

où le champ de vecteurs $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ est continu et localement lipschitzien dans la variable U grâce à l'hypothèse sur f. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence et l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy définie sur un intervalle ouvert J contenant 0.

(b) On commence par écrire

$$u_\gamma(x) = \alpha + \int_0^x u'_\gamma(t)\,dt,$$

et donc pour $x \in J$, $x \geqslant 0$ on a

$$|u_\gamma(x)| \leqslant |\alpha| + \int_0^x |u'_\gamma(t)|\,dt.$$

On intègre maintenant l'équation pour obtenir

$$u'_\gamma(x) = \gamma + \int_0^x u''_\gamma(t)\,dt = \gamma + \int_0^x f(t, u_\gamma(t))\,dt,$$

puis on utilise l'hypothèse de sous-linéarité de f pour obtenir toujours pour $x \in J$, $x \geqslant 0$,

$$|u'_\gamma(x)| \leqslant |\gamma| + C\int_0^x |u_\gamma(t)|\,dt.$$

En combinant les deux inégalités, on obtient le résultat demandé avec $M = \max(1, C)$.

On peut maintenant appliquer le lemme de Gronwall pour obtenir

$$|u_\gamma(x)| + |u'_\gamma(x)| \leqslant (|\alpha| + |\beta|)e^{Mx}, \ \ \forall x \geqslant 0, x \in J.$$

Ceci prouve que u_γ et u'_γ ne peuvent pas exploser en temps positif fini et donc, par le théorème d'explosion en temps fini, que $[0, +\infty[\subset J$.

2. (a) Calculons la dérivée de φ en utilisant l'équation vérifiée par les deux fonctions u_{γ_1} et u_{γ_2}

$$\varphi' = (u'_{\gamma_1} - u'_{\gamma_2})^2 + (f(x, u_{\gamma_1}) - f(x, u_{\gamma_2}))(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2}).$$

Le premier terme est clairement positif ou nul, et le second l'est également d'après la monotonie de $f(x,.)$. Donc la fonction φ est croissante sur $[0, +\infty[$ et de plus $\varphi'(0) \geqslant (\gamma_1 - \gamma_2)^2 > 0$ et donc $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ pour tout $x > 0$.

Attention, *a priori* rien ne permet de dire à ce stade que φ est strictement croissante.

(b) D'après la question précédente, $u'_{\gamma_1} - u'_{\gamma_2}$ ne peut s'annuler sur $]0, 1]$ et comme cette quantité est continue et strictement positive en 0, elle est nécessairement strictement positive sur $[0, 1]$.

Comme $\varphi > 0$ sur $]0, 1]$, on déduit immédiatement que $u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2} > 0$ sur $]0, 1]$.

Enfin, on utilise l'équation pour obtenir

$$(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})'' = f(x, u_{\gamma_1}) - f(x, u_{\gamma_2}) \geqslant 0,$$

par monotonie de f.

(c) D'après la question précédente $(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})'$ est croissante et vaut $\gamma_1 - \gamma_2$ en 0 donc on a

$$(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})'(x) \geqslant \gamma_1 - \gamma_2, \ \ \forall x \in [0, 1].$$

Par intégration entre 0 et x (et comme $u_{\gamma_1}(0) = u_{\gamma_2}(0)$) on obtient le résultat.

3. La continuité de l'application vient du théorème de continuité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux données initiales que l'on a vu en cours.

Notons $\Psi : \gamma \in \mathbb{R} \mapsto u_\gamma(1) \in \mathbb{R}$.

La question précédente montre que

$$\Psi(\gamma_1) - \Psi(\gamma_2) \geqslant \gamma_1 - \gamma_2, \text{ pour tous } \gamma_1 > \gamma_2, \tag{$\star$}$$

et donc on a bien obtenu que Ψ est strictement croissante (en particulier elle est injective).

Par ailleurs, si on fixe γ_2 et qu'on fait tendre γ_1 vers $+\infty$ dans $(\star)$ on obtient

$$\lim_{\gamma\to+\infty} \Psi(\gamma) = +\infty.$$

De même on fixe γ_1 et on fait tendre γ_2 vers $-\infty$ dans $(\star)$ pour obtenir

$$\lim_{\gamma\to-\infty} \Psi(\gamma) = -\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que Ψ est surjective sur $\mathbb{R}$ et donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4. D'après ce qui précède, il existe une unique valeur de γ_0 telle que $\Psi(\gamma_0) = u_{\gamma_0}(1) = \beta$.
Cette fonction u_{γ_0} est clairement, par construction, une solution du problème aux limites étudié. Si maintenant u est une solution quelconque de ce problème aux limites, alors elle est bien entendu aussi solution du problème de Cauchy pour le paramètre $\gamma = u'(0)$ autrement dit on a nécessairement

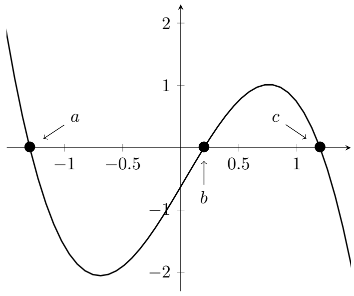
$$\Psi(u'(0)) = \beta,$$

et par injectivité de Ψ, cela implique $u'(0) = \gamma_0$ et donc u est nécessairement égal à u_{γ_0}, ce qui montre l'unicité.

■

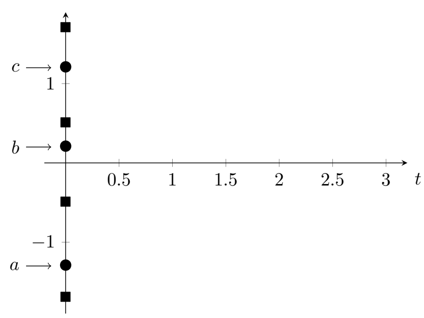
Exercice 4

On se donne une fonction régulière $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ dont le graphe est représenté sur la figure ci-dessous



On considère l'équation différentielle $x' = f(x)$.

1. Quels sont les points d'équilibre de cette équation différentielle ? Que peut-on dire de leur stabilité (ou stabilité asymptotique) locale ?
2. On considère une donnée initiale $a < x_0 < b$.
   (a) Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy associé à cette donnée initiale est globale.
   (b) Montrer que cette solution a des limites quand $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$ que l'on déterminera.
3. Que deviennent ces résultats si on suppose $x_0 < a$, $b < x_0 < c$ ou encore $x_0 > c$? Dans chaque cas, vous vous contenterez d'expliquer en quelques phrases ce qui diffère (ou pas) avec le cas précédent.
4. Reproduire et compléter le graphe ci-contre sur lequel vous tracerez l'allure des solutions (en temps $t \geqslant 0$) de l'équation pour les différentes données initiales indiquées par des ● et des ■.



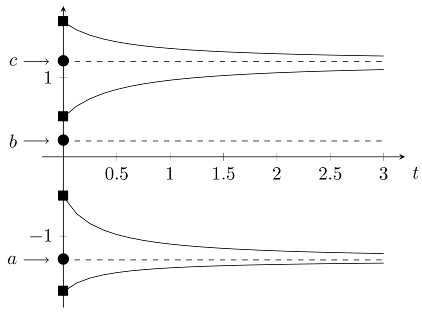
Corrigé :

1. Les points d'équilibre sont les zéros de f, c'est-à-dire a, b et c. D'après le critère spectral de stabilité vu en cours, les points a et c sont localement asymptotiquement stables car $f'(a)$ et $f'(c)$ sont strictement négatifs. En revanche $f'(b) > 0$ et donc le point b est instable.
2. (a) Par la propriété d'unicité dans Cauchy-Lipschitz, la solution maximale de ce problème de Cauchy ne peut jamais prendre la valeur a ou la valeur b qui sont des points d'équilibre de l'équation. Donc cette solution ne peut exploser en temps fini et est donc forcément globale d'après le théorème du cours.

(b) Dans l'intervalle $]a, b[$ la fonction f est négative donc la solution $t \mapsto x(t)$ est strictement décroissante et bornée sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des limites en $\pm\infty$.

Soit $\alpha = \lim_{t\to+\infty} x(t)$. Cette limite est dans l'intervalle $[a, b[$. Par ailleurs, d'après l'équation et la continuité de f on a que $\lim_{t\to+\infty} x'(t)$ existe et vaut $f(\alpha)$. D'après le lemme du cours, on a nécessairement $f(\alpha) = 0$ or la seule racine de f dans $[a, b[$ est a, on en déduit donc que $x(t) \to a$ quand $t \to +\infty$. De la même façon on montre que $x(t) \to b$ quand $t \to -\infty$.

3. — Si $x_0 < a$, la solution maximale prend ses valeurs dans $]-\infty, a[$. La fonction f étant positive sur cet intervalle, on en déduit que x est strictement croissante sur son intervalle de définition. Comme elle est majorée (par a) elle ne peut exploser en temps fini positif et donc elle est bien définie sur $[0, +\infty[$ et a a comme limite en $+\infty$. En temps négatif en revanche, on ne peut rien dire, la solution peut éventuellement exploser en temps fini mais dans tous les cas elle converge vers $-\infty$ quand t tend vers la borne inférieure de son intervalle de définition.
   — Si $b < x_0 < c$: la solution est globale, strictement croissante et tend vers b (resp. c) quand t tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).
   — Si $x_0 > c$: la solution est globale en temps positif, strictement décroissante, vérifie $\lim_{t\to+\infty} x(t) = c$ et tend vers $+\infty$ quand t tend vers la borne inférieure de son intervalle de définition.
4. Le graphique qui résume les propriétés précédentes est donc le suivant



■

Exercice 5

Soit $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. On considère le problème de transport suivant:

$$\begin{cases} \partial_t u + c(x)\partial_x u = 0, & \forall t \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

1. Pour tout $s, x_0 \in \mathbb{R}$, rappeler le problème de Cauchy qui définit la courbe caractéristique $t \mapsto X(t, s, x_0)$ associée à la vitesse c.
2. Dans cette question et la suivante on prend $c(x) = 1 + x$. Calculer explicitement $X(t, s, x_0)$.
3. En déduire la formule explicite qui donne la solution $u(t, x)$ de (3) en fonction de u_0, t et x.

Corrigé :

1. D'après le cours, les courbes caractéristiques sont définies à l'aide du problème de Cauchy suivant suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t, s, x_0) = c(X(t, s, x_0)), \\ X(s, s, x_0) = x_0. \end{cases}$$

2. Un calcul immédiat donne

$$X(t, s, x_0) = -1 + (x_0 + 1)e^{t-s}.$$

3. On sait d'après le cours que pour le problème considéré, la solution u est constante le long des caractéristiques (on le montre en dérivant la fonction $t \mapsto u(t, X(t, s, x_0))$). On a donc

$$u(t, X(t, 0, x_0)) = u_0(x_0), \quad \forall t, x_0.$$

Si on fixe t et x, on va donc chercher x_0 tel que $X(t, 0, x_0) = x$. Celui-ci n'est autre que $x_0 = X(0, t, x) = -1 + (x + 1)e^{-t}$.
On obtient donc

$$u(t, x) = u_0\left(-1 + (x + 1)e^{-t}\right).$$

■

Exercice 6

Notations et rappels :

— Pour toute fonction g intégrable sur $]0,1[$, on note sa moyenne par

$$m(g) := \int_0^1 g.$$

— On notera $H^1_m(0,1) = \{v \in H^1(0,1),\ \ m(v) = 0\}$ l'espace des fonctions H^1 à moyenne nulle dont on rappelle que c'est un espace de Hilbert pour la norme H^1 et que l'on dispose de l'inégalité de Poincaré suivante: il existe $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leqslant C\|v'\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall v \in H^1_m(0,1).$$

— Le produit cartésien $H = H_1 \times H_2$ de deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 est encore un espace de Hilbert si on le munit de la norme (hilbertienne !)

$$\|(u_1,u_2)\|_H := \sqrt{\|u_1\|^2_{H_1} + \|u_2\|^2_{H_2}}, \quad \forall (u_1,u_2) \in H_1 \times H_2.$$

Soit $f \in L^2(0,1)$ telle que $m(f) = 0$. Le but de l'exercice est la résolution, pour différents choix de conditions aux limites, du système de deux équations couplées suivant:

$$\begin{cases} -u_2'' + u_1 = f, & \text{dans }]0,1[, \\ -u_1'' - u_2 = 0, & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{4}$$

Dans tout l'exercice, on notera pour $u = (u_1,u_2) \in H^1(0,1) \times H^1(0,1)$ et $v = (v_1,v_2) \in H^1(0,1) \times H^1(0,1)$

$$a(u,v) := \int_0^1 u_1'v_1' + \int_0^1 u_2'v_2' + \int_0^1 u_1v_2 - \int_0^1 u_2v_1, \tag{5}$$

$$L(v) := \int_0^1 fv_2. \tag{6}$$

1. **Conditions de Neumann:**
   On va chercher dans cette question une solution de (4) avec les conditions au bord suivantes

$$\begin{cases} u_1'(0) = u_1'(1) = 0, \\ u_2'(0) = u_2'(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

   (a) Si (u_1,u_2) est solution de (4) et (7), démontrer de façon formelle (i.e. sans s'occuper de questions de régularité ou d'analyse fonctionnelle pour le moment) que l'on a nécessairement

$$m(u_2) = 0, \text{ et } m(u_1) = 0.$$

(b) On va donc chercher la solution du problème dans l'espace $H := H^1_m(0,1) \times H^1_m(0,1)$.

i. Démontrer qu'il existe un unique $u = (u_1, u_2) \in H$ qui vérifie

$$a(u,v) = L(v), \ \ \forall v = (v_1, v_2) \in H,$$

où a et L sont définis en (5) et (6).

ii. Démontrer que u_1 et u_2 vérifient le problème (4) au sens des distributions, sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient les conditions aux limites (7).

2. **Conditions mixtes:**
On va maintenant chercher des solutions de (4) avec les conditions au bord mixtes suivantes

$$\begin{cases} u_1(0) = u_1(1) = 0, \\ u_2'(0) = u_2'(1) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

(a) Si (u_1, u_2) est solution de (4) et (8), démontrer de façon formelle que

$$m(u_1) = 0.$$

(b) Cette fois on ne peut plus rien déduire sur $m(u_2)$, qui n'a aucune raison d'être nul donc on ne peut pas *a priori* chercher u_2 dans l'espace $H^1_m(0,1)$. Il faut donc s'y prendre autrement.
On fixe une fois pour toutes une fonction $\theta \in \mathcal{C}^\infty_c(0,1)$ telle que $m(\theta) = 1$ et on définit les espaces

$$H^1_{0,m}(0,1) = \{v \in H^1(0,1), \ \ v(0) = v(1) = 0, \ \text{ et } m(v) = 0\},$$

$$H^1_{m,\theta}(0,1) = \{v \in H^1(0,1), \ \ m(\theta v) = 0\},$$

dont on admet que ce sont des sous-espaces fermés de $H^1(0,1)$ (donc des espaces de Hilbert) et que l'inégalité de Poincaré est toujours valable dans ces espaces.
On va travailler maintenant dans l'espace $H := H^1_{0,m}(0,1) \times H^1_{m,\theta}(0,1)$.

i. Montrer qu'il existe une unique solution notée $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in H$ au problème

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = L(\tilde{v}), \ \ \forall \tilde{v} \in H,$$

où a et L sont définis en (5) et (6).

ii. Pour tout $(v_1, v_2) \in H^1_0(0,1) \times H^1(0,1)$ on pose

$$\tilde{v}_1 := v_1 - m(v_1)\theta, \ \text{ et } \ \tilde{v}_2 = v_2 - m(v_2\theta).$$

Montrer que $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in H$.

iii. On pose maintenant $u_1 = \tilde{u}_1$ et $u_2 = \tilde{u}_2 + m(u_1'\theta')$. Montrer que $u = (u_1, u_2)$ vérifie

$$a(u,v) = L(v), \ \ \forall v = (v_1, v_2) \in H^1_0(0,1) \times H^1(0,1).$$

iv. Montrer que u_1 et u_2 satisfont le problème (4) au sens des distributions, sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient les conditions aux limites (8).

Corrigé :

1. (a) Si on intègre la première équation sur $]0,1[$ et qu'on utilise les conditions aux limites sur u_2', on obtient

$$m(u_1) = m(f) = 0.$$

De la même façon on intègre la deuxième équation sur $]0,1[$ et on trouve

$$m(u_2) = 0.$$

(b) i. On va appliquer le théorème de Lax-Milgram. L'espace H est bien un espace de Hilbert et il est clair que a et L sont des applications continues. Pour $u = (u_1, u_2) \in H$, on observe que les termes sans dérivées dans $a(u,u)$ se compensent exactement et donc que

$$a(u,u) = \int_0^1 |u_1'|^2 + \int_0^1 |u_2'|^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré dans $H^1_m(0,1)$ on a bien

$$a(u,u) \geqslant \alpha(\|u_1\|^2_{H^1} + \|u_2\|^2_{H^1}),$$

et donc la coercivité de a.

Le théorème de Lax-Milgram peut s'appliquer et nous assure bien l'existence et l'unicité de la solution u du problème proposé.

ii. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$. On pose $\tilde{\varphi} = \varphi - m(\varphi)$ qui est un élément de $H^1_m(0,1)$.

— On prend pour commencer $v = (\tilde{\varphi}, 0)$ comme fonction test dans le problème variationnel. On obtient l'égalité

$$\int_0^1 u_1'\tilde{\varphi}' - \int_0^1 u_2\tilde{\varphi} = 0.$$

Remplaçant $\tilde{\varphi}$ par sa définition on trouve

$$\int_0^1 u_1'\varphi' - \int_0^1 u_2\varphi + m(u_2)m(\varphi) = 0,$$

et comme $u_2 \in H^1_m$ on a $m(u_2) = 0$ et donc finalement

$$\int_0^1 u_1'\varphi' = \int_0^1 u_2\varphi.$$

Ceci étant valable pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$, on a montré que $u_1' \in H^1(0,1)$ (et donc en particulier que $u_1' \in \mathcal{C}^0([0,1])$, i.e. $u_1 \in \mathcal{C}^1([0,1])$) et que, au sens des distributions, on a

$$u_1'' = -u_2. \tag{$\star$}$$

— Prenons maintenant $v = (0, \tilde{\varphi})$ comme fonction test. On obtient

$$\int_0^1 u_2'\tilde{\varphi}' + \int_0^1 u_1\tilde{\varphi} = \int_0^1 f\tilde{\varphi}.$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, utilisant le fait que $m(u_1) = 0$ et $m(f) = 0$ par hypothèse, on obtient que u_2' est dans $H^1(0,1)$ et que

$$-u_2'' + u_1 = f, \tag{$\star\star$}$$

au sens des distributions. Cela implique que u_2' est continue et donc que u_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

— Maintenant que l'on sait que u_1' et u_2' sont dans H^1, pour tout $v = (v_1, v_2) \in H$ on peut intégrer par parties pour obtenir

$$\int_0^1 (-u_1'' - u_2)v_1 + \int_0^1 (-u_2'' + u_1)v_2$$
$$= -u_1'(1)v_1(1) + u_1'(0)v_1(0) - u_2'(1)v_2(1) + u_2'(0)v_2(0) + \int_0^1 u_1'v_1' + \int_0^1 u_2'v_2' - \int_0^1 u_2v_1 + \int_0^1 u_1v_2.$$

En utilisant les deux équations ($\star$) et ($\star\star$) et la définition de a et L, on a finalement obtenu

$$L(v) = -u_1'(1)v_1(1) + u_1'(0)v_1(0) - u_2'(1)v_2(1) + u_2'(0)v_2(0) + a(u,v).$$

Or, la formulation variationnelle qu'on a résolu nous donne que $a(u,v) = L(v)$, on en déduit donc que l'égalité

$$-u_1'(1)v_1(1) + u_1'(0)v_1(0) - u_2'(1)v_2(1) + u_2'(0)v_2(0) = 0,$$

doit être satisfaite pour tout $v = (v_1, v_2) \in H$.

— On commence par prendre $v_2 = 0$ puis v_1 **à moyenne nulle**, vérifiant $v_1(0) = 1$ et $v_1(1) = 0$ comme par exemple

$$v_1(x) = (1-x)(4 - 3(x+1)),$$

ce qui fournit

$$u_1'(0) = 0.$$

De la même façon, en changeant de choix de v_1, on va trouver $u_1'(1) = 0$.

— On prend maintenant $v_1 = 0$ puis v_2 convenable pour obtenir $u_2'(0) = u_2'(1) = 0$.

2. (a) C'est le même calcul que dans la première question. On ne peut rien dire de $m(u_2)$ car on ne sait rien *a priori* des valeurs de u_1' au bord du domaine, donc $\int_0^1 u_1''$ n'a aucune raison d'être nulle.

   (b) i. On peut à nouveau appliquer le théorème de Lax-Milgram du fait que l'inégalité de Poincaré est encore valable dans les deux espaces considérés.

   ii. Comme v_1 et θ sont dans $H_0^1(0,1)$, il est clair que $\tilde{v}_1$ est également nul au bord. Par ailleurs, on a

$$m(\tilde{v}_1) = m(v_1) - m(v_1)m(\theta) = 0,$$

car $m(\theta) = 1$. Donc $\tilde{v}_1$ est bien dans $H^1_{0,m}(0,1)$.
On peut maintenant calculer

$$m(\theta\tilde{v}_2) = m(\theta v_2) - m(v_2\theta)m(\theta) = 0,$$

toujours en utilisant que $m(\theta) = 1$. Ceci prouve bien que $\tilde{v}_2$ est dans $H^1_{m,\theta}(0,1)$.

   iii. On fait le calcul suivant, en utilisant d'abord les définitions de $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ puis celles de $\tilde{v}_1$ et $\tilde{v}_2$

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_0^1 \left(u_1'v_1' + u_2'v_2' + u_1v_2 - u_2v_1\right) \\
&= \int_0^1 \left(\tilde{u}_1'v_1' + \tilde{u}_2'v_2' + \tilde{u}_1v_2 - \left(\tilde{u}_2 + m(u_1'\theta')\right)v_1\right) \\
&= \int_0^1 \left(\tilde{u}_1'(\tilde{v}_1' + m(v_1)\theta') + \tilde{u}_2'\tilde{v}_2' + \tilde{u}_1\left(\tilde{v}_2 + m(v_2\theta)\right) - \left(\tilde{u}_2 + m(u_1'\theta')\right)\left(\tilde{v}_1 + m(v_1)\theta\right)\right) \\
&= a(\tilde{u},\tilde{v}) + m(v_1)m(\tilde{u}_1'\theta') + m(\tilde{u}_1)m(v_2\theta) \\
&\quad - m(\tilde{u}_2\theta)m(v_1) - m(u_1'\theta')m(\tilde{v}_1) - m(u_1'\theta')m(v_1)m(\theta).
\end{aligned}$$

On utilise alors que $m(\theta) = 1$, que $u_1' = \tilde{u}_1'$ et que, par définition des espaces choisis, on a

$$m(\tilde{v}_1) = m(\tilde{u}_1) = m(\tilde{u}_2\theta) = 0,$$

ce qui permet à la fin d'obtenir simplement l'égalité

$$a(u,v) = a(\tilde{u},\tilde{v}).$$

De la même façon, on a

$$L(\tilde{v}) = \int_0^1 f\tilde{v}_2 = \int_0^1 f(v_2 - m(v_2\theta)) = L(v) - m(f)m(v_2\theta) = L(v),$$

car $m(f) = 0$.
In fine, l'égalité $a(\tilde{u},\tilde{v}) = L(\tilde{v})$ obtenue par le théorème de Lax-Milgram, implique l'égalité

$$a(u,v) = L(v).$$

   iv. Cette fois on peut directement prendre des fonctions tests $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ dans la formulation obtenue dans la question précédente et obtenir le fait que u_1' et u_2' sont dans $H^1(0,1)$ et vérifient les deux équations attendues au sens des distributions. La condition aux limites de Dirichlet sur u_1 est immédiate car, par construction, $u_1 \in H_0^1(0,1)$ et elle est donc nulle au bord.
Pour la condition de Neumann sur u_2, on procède exactement comme dans la première partie en intégrant par parties et en comparant à la formulation variationnelle.

■