Université de Rennes 1 — **2008-2009**
UFR Mathématiques — **Licence L3 – ALNU**

Feuille d'exercices de TD n°3

Rappel des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Méthode de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\{b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}\} \quad i.e. \quad x^{(k+1)} = \begin{cases} D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b \\ (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b \end{cases}$$

Méthode de Jacobi avec relaxation (S.O.R Jacobi)

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\{b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}\} \quad i.e. \quad x^{(k+1)} = (I - \omega D^{-1}A)x^k + \omega D^{-1}b\,,$$

Méthode de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big\{b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\Big\} \quad i.e. \quad x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b\,,$$

Méthode de Gauss-Seidel avec relaxation (S.O.R Gauss-Seidel)

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\Big\{b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\Big\}$$
$$i.e. \quad x^{(k+1)} = (D-\omega E)^{-1}\Big((1-\omega)D + \omega F\Big)x^k + \omega(D-\omega E)^{-1}b$$

Exercice 1. On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $b \in \mathbb{R}^3$, on s'intéresse aux deux systèmes linéaires $Ax = b$ et $Bx = b$.

1) Montrer que, pour $Ax = b$, la méthode de Jacobi converge mais que la méthode de Gauss-Seidel ne converge pas.

2) Montrer que, pour $Bx = b$, la méthode de Gauss-Seidel converge mais que la méthode de Jacobi ne converge pas.

$\boxed{\textbf{Exercice 2.}}$ Soit A une matrice hermitienne définie positive. On considère la décomposition régulière $A = M - N$ où M est une matrice inversible.

1) Montrer que $(M^* + N)$ est hermitienne.

2) On suppose de plus que $(M^* + N)$ est aussi définie positive ; on considère la norme vectorielle définie par $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ pour tout vecteur x et on désigne par $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|_A$.

a) Vérifier que $\|\cdot\|_A$ définit bien une norme.

b) Montrer que pour tout vecteur v tel que $\|v\|_A = 1$, on a

$$\|M^{-1}Nv\|_A^2 = 1 - ((M^* + N)w, w) \quad \text{où } w = M^{-1}Av\ .$$

Indication : On commencera par remarquer que $N = M - A$.

c) Montrer que $\rho(M^{-1}N) < 1$. Qu'en déduit-on ?

$\boxed{\textbf{Exercice 3.}}$ On considère une matrice de taille $n \times n$ définie par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

où, pour $1 \le i, j \le p$, $A_{i,j}$ est une matrice de taille $n_i \times n_j$, avec $n_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$.

1) Définir une méthode de Jacobi par blocs appliquée à A.

2) Sous quelle condition nécessaire et suffisante cette méthode est-elle bien définie ?

3) Quel est le coût en nombre d'opérations de cette méthode lorsque tous les blocs diagonaux sont de même taille et admettent une décomposition de Cholesky ?

$\boxed{\textbf{Exercice 4.}}$ Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice à diagonale strictement dominante, c'est à dire :

$$\forall i = 1, \cdots, n \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ .$$

Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le système $Ax = b$ et on note $\mathcal{J}$ la matrice d'itération de Jacobi, $\mathcal{L}_1$ la matrice d'itération de Gauss-Seidel et $\mathcal{L}_\omega$ la matrice d'itération de la méthode de relaxation.

1) Montrer que $\rho(\mathcal{J}) < 1$ et $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$. Que peut-on dire des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel ?

2-a) Si $0 < \omega \le 1$, montrer que $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$. Que peut-on en déduire ? Il est à noter que ce résultat ne prouve pas que la méthode diverge pour $\omega > 1$. Au contraire, dans certains cas, comme on le verra dans un exercice ultérieur, le meilleur choix de ω vérifie $\omega > 1$.

b) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Vérifier que A est à diagonale strictement dominante.
Etablir la convergence de la méthode de relaxation pour $0 < \omega < 2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5.}}$ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice tridiagonale symétrique $A_\alpha = \left(a_{ij}^{(\alpha)}\right)_{1\le i,j\le n}$, définie par :

$$\begin{cases} a_{ii}^{(\alpha)} = \alpha & i = 1, \cdots, n \\ a_{i\,i+1}^{(\alpha)} = -1 & i = 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

1) Montrer que les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ sont $\lambda_k = \alpha + 2\beta \cos \frac{k\pi}{n+1}$, pour $k = 1, \cdots, n$ où $A_{\alpha,\beta} = \left(a_{ij}^{(\alpha,\beta)}\right)_{1\le i,j\le n}$ est tridiagonale symétrique définie par :

$$\begin{cases} a_{ii}^{(\alpha,\beta)} = \alpha & i = 1, \cdots, n \\ a_{i\,i+1}^{(\alpha,\beta)} = \beta & i = 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

2) Indiquer quels critères permettent d'affirmer que chacune des conditions suivantes est nécessaire pour que A_α soit définie positive :
a) $\alpha > 0$.
b) $\alpha \ge 1$.
c) $\alpha > 1$, pour $n = 2$.
d) $\alpha > \sqrt{2}$, pour $n = 3$.

3) Montrer que si $\alpha \ge 2$ alors la matrice A_α est définie positive.
On se place désormais, dans tout ce qui suit, dans cette situation, et on se propose de résoudre le système linéaire : soit b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$A_\alpha u_\alpha = b \qquad (S_\alpha)$$

Montrer que le système (S_α) admet une solution et une seule.
A l'aide des disques de Gershgorin, montrer que :

$$\mathrm{Cond}_2(A_\alpha) \le \frac{\alpha+2}{\alpha-2} \qquad \text{pour } \alpha > 2\,.$$

Pour quelles valeurs de α le système (S_α) est-il bien conditionné ?

4) On souhaite résoudre le système (S_α) par la méthode de Gauss, sans stratégie particulière des pivots. Indiquer l'allure de la matrice du système triangularisé que l'on est amené à résoudre : On indiquera, en particulier, par une formule de récurrence, comment sont obtenus les éléments diagonaux.

5) Résoudre effectivement par la méthode de Cholesky, le système (S_4), lorsque $n = 4$, $b = (1, 1, 1, 1)^T$.

6) On veut résoudre le système (S_α) par la méthode itérative de Jacobi. Soit $\mathcal{J}(A_\alpha)$ la matrice de Jacobi associée à A_α, en dimension n quelconque. Montrer que :

$$\rho(\mathcal{J}(A_\alpha)) \le \frac{2}{\alpha}\,.$$

En déduire que l'algorithme de Jacobi converge pour $\alpha > 2$ et que, partant du vecteur $u_0 = 0$ pour initialiser le processus itératif, on a à la $k^{\text{ème}}$ itération :

$$\frac{\|u_\alpha - u_k\|_2}{\|u_\alpha\|_2} \le \left(\frac{2}{\alpha}\right)^k ,$$

où u_α désigne la solution exacte de (S_α). Quel est l'intérêt d'une telle estimation ?

7) On suppose connaître n vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$, tels que :

$$(A_\alpha v_i, v_j) = \delta_{ij} \ , \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \, ,$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que u_α, solution de (S_α), peut s'exprimer simplement en fonction de b, et des $(v_i)_{1 \le i \le n}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 6.}}$ On se propose de démontrer des résultats de comparaison des méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation dans le cas des matrices tridiagonales. Dans tout l'exercice, A désignera une matrice tridiagonale ; $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_\omega$ désigneront respectivement les matrices de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation associées à A, avec $0 < \omega < 2$.

1) Soient $\mu \neq 0$ et A_μ une matrice tridiagonale de la forme

$$A_\mu = \begin{pmatrix} b_1 & \mu^{-1} c_1 & & 0 \\ \mu a_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mu^{-1} c_{n-1} \\ 0 & & \mu a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Montrer que le déterminant de A_μ est indépendant de μ.
Indication : On considèrera A_μ, A_1 et $Q = diag(\mu, \mu^2, \cdots, \mu^n)$.

2-a) Vérifier que

$$P_{\mathcal{J}}(\lambda) = \det(-D^{-1}) \det(\lambda D - E - F)$$

et

$$P_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \det(E - D)^{-1} \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F) \, .$$

b) Montrer que $\rho(\mathcal{J})^2 = \rho(\mathcal{L}_1)$. Conclusion ?
Indication : Considérer $\mu = \frac{1}{\lambda}$ et $A_\mu = \lambda^2 D - \mu \lambda^2 E - \frac{1}{\mu} F$.

3) On suppose désormais que A est tridiagonale hermitienne définie positive.

a) Que peut-on dire de la convergence des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation ?

b) Montrer que

$$P_{\mathcal{L}_\omega}(\lambda^2) = \det(E - \frac{D}{\omega})^{-1} \det(\frac{\lambda^2 + \omega - 1}{\omega} D - \lambda^2 E - F) \, .$$

c) Etablir l'équivalence :

$$\left. \begin{array}{c} \lambda \neq 0 \\ \\ \lambda^2 \in \sigma(\mathcal{L}_\omega) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} \lambda \neq 0 \\ \\ \frac{\lambda^2 + \omega - 1}{\lambda \omega} \in \sigma(\mathcal{J}) \end{array} \right. .$$

d) Montrer que

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_{\alpha \in \sigma(\mathcal{J})} |\mu^+(\alpha)| \, ,$$

avec

$$|\mu^+(\alpha)| = \left| \frac{1}{2}(\alpha^2 \omega^2 - 2\omega + 2) + \frac{\alpha \omega}{2} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 - 4(\omega - 1)} \right| \, .$$

e) Soit ω_{opt} défini par $\rho(\mathcal{L}_{\omega_{opt}}) = \min\limits_{0 < \omega < 2} \rho(\mathcal{L}_\omega)$. En étudiant la fonction en **3-d)**, établir que :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathcal{J})^2}} \quad \textit{et} \quad \rho(\mathcal{L}_{\omega_{opt}}) = \omega_{opt} - 1 \, .$$

$\boxed{\textbf{Exercice 7.}}$ Méthode du gradient conjugué (Hestenes–Stiefel, 1952)

On considère une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, symétrique et définie positive, un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$ et on note $\big(\bullet, \bullet\big)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$

1) Montrer que la résolution du système linéaire $Ax = b$ équivaut à résoudre le problème de minimisation

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} J(x) \quad \text{où} \quad J(x) = \frac{1}{2}\big(Ax, x\big) - \big(b, x\big)$$

Description de l'algorithme

Initialisation : On se donne $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $p^{(0)} = Ax^{(0)} - b$.

On suppose connus l'état $x^{(k)}$ ainsi que la direction de descente $p^{(k)}$. L'état $x^{(k+1)}$ au pas suivant est issu de l'état $x^{(k)}$ via un incrément proportionnel à la direction de descente $p^{(k)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k\, p^{(k)} \tag{1}$$

de façon à minimiser la fonctionnelle J sur la droite de direction $p^{(k)}$ et passant par $x^{(k)}$:

$$J(x^{(k+1)}) \leq J(x^{(k)} + \alpha\, p^{(k)}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

On notera $r^{(k)}$ le gradient de J (ou résidu de $Ax - b$) au point $x^{(k)}$, soit $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b$.

2) Calculer α_k en fonction de $r^{(k)}$ et $p^{(k)}$.

3) Montrer que l'on a $\big(r^{(k+1)}, p^{(k)}\big) = 0$ (4)

La nouvelle direction de descente $p^{(k+1)}$ est cherchée sous la forme

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_{k+1}\, p^{(k)} \tag{5}$$

de la sorte que $p^{(k)}$ et $p^{(k+1)}$ soient $A-$conjugués, autrement dit que $p^{(k+1)}$ soit orthogonal à la direction $p^{(k)}$ pour le produit scalaire associé à la matrice A, c'est-à-dire

$$\big(p^{(k+1)}, A\, p^{(k)}\big) = 0 \tag{6}$$

4) Calculer la valeur de β_{k+1} en fonction de $r^{(k+1)}$, $p^{(k)}$.

L'algorithme converge au plus en d étapes

5) Remarquer que si les gradients successifs $r^{(\ell)}$, $\ell = 0, \ldots, k-1$ sont non nuls et si $r^{(k)} = 0$, alors l'état $x^{(k)}$ est solution du système linéaire.

6) On suppose dans cette question que les gradients successifs $r^{(\ell)}$ sont non nuls jusqu'à l'étape $m \geq 1$ inclusivement. Etablir les relations d'orthogonalité :

$$\begin{aligned}
\big(r^{(k)}, p^{(\ell)}\big) &= 0\,, \quad \text{pour} \quad 0 \leq \ell < k \leq m && (i)\\
\alpha_k &\neq 0\,, \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq m && (ii)\\
\big(r^{(k)}, r^{(\ell)}\big) &= 0\,, \quad \text{pour} \quad 0 \leq \ell < k \leq m && (iii)\\
\big(p^{(k)}, A\, p^{(\ell)}\big) &= 0\,, \quad \text{pour} \quad 0 \leq \ell < k \leq m && (iv)
\end{aligned}$$

On pourra raisonner par récurrence sur k, pour l'ensemble des 4 relations et les établir dans l'ordre où elles apparaissent.

7) Montrer que l'algorithme converge en au plus d itérations.

Autres propriétés

8) Montrer que l'on a

$$\left(r^{(k)}, p^{(k)}\right) = \|r^{(k)}\|^2 \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{\left\|r^{(k)}\right\|^2}{\left\|r^{(k-1)}\right\|^2} \,;$$

et qu'ainsi l'algorithme s'écrit :

Algorithme du gradient conjugué

Initialisation :	$x^{(0)}$ *donné,* ε *donné*	
	$r^{(0)} = b - A \cdot x^{(0)}$	*(résidu initial)*
	$p^{(0)} = r^{(0)}$	*(direction de descente initiale)*
	$\theta_0 = (p^{(0)}, r^{(0)})$	($(.,.)$ *représente le produit scalaire)*
Itérations : $k \geq 0$	$\alpha_k = \theta_k / (A \cdot p^{(k)}\,,\, p^{(k)})$	*(taux dans la direction de descente)*
	$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k\, p^{(k)}$	*(mise à jour de la solution)*
	$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k\, A \cdot p^{(k)}$	*(résidu à l'itération* $k+1$*)*
	Arrêt des itérations : $\|r^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$?	
	$\theta_{k+1} = (r^{(k+1)}\,,\, r^{(k+1)})$	
	$\beta_{k+1} = \theta_{k+1} / \theta_k$	
	$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_{k+1}\, p^{(k)}$	*(nouvelle direction de descente)*