Université Paul Sabatier Toulouse 3

Manuscrit

présenté pour l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches

Guillaume Cébron

Probabilités non-commutatives et matrices aléatoires

Soutenue le 1er février 2024,

après avis des rapporteurs

Philippe Biane	Université Gustave-Eiffel
Benoît Collins	Kyoto University (Japon)
Dan Voiculescu	University of California at Berkeley (USA)

devant le jury formé de

Philippe Biane	Université Gustave-Eiffel
Mireille Capitaine	Université Paul Sabatier
Benoît Collins	Kyoto University (Japon)
Alice Guionnet	Ecole Normale Supérieure de Lyon
Ion Nechita	Université Paul Sabatier
Moritz Weber	Universität des Saarlandes (Allemagne)

Remerciements

Un grand merci à Philippe Biane, Benoît Collins et Dan Voiculescu pour la lecture du manuscrit et l'écriture des rapports – c'est un véritable honneur pour moi. Je remercie également les membres du jury : Philippe Biane, Mireille Capitaine, Benoît Collins, Alice Guionnet, Ion Nechita et Moritz Weber. Je suis heureux et reconnaissant qu'ils aient accepté de faire partie du jury. Merci à Jean-Marc Bano pour la gestion des missions du jury et celle liée à la reprographie.

Cette habilitation est aussi l'occasion de remercier chaleureusement mes trois mentors : Thierry Lévy, Roland Speicher et Mireille Capitaine (ce qui correspond respectivement aux périodes de Paris, Sarrebruck et Toulouse). Ce sont trois chercheurs aux styles différents que j'admire et qui ont en grande partie forgé mon identité scientifique.

Je tiens à remercier tous mes co-auteurs auprès de qui j'ai beaucoup appris : Octavio Arizmendi, Benson Au, Marwa Banna, Isabelle Baraquin, Serban Belinschi, Florent Benaych-Georges Charles Bordenave, Mireille Capitaine, Antoine Dahlqvist, Max Fathi, Uwe Franz, Franck Gabriel, Nicolas Gilliers, Ching-Wei Ho, Todd Kemp, Laura Maassen, Tobias Mai, Camille Male, Jean Rochet, Roland Speicher, Michaël Urlich, Sheng Yin, Moritz Weber ; et plus généralement toute la communauté des matrices aléatoires et des probabilités libres. Je suis conscient d'évoluer dans un environnement particulièrement bienveillant, où les relations entre collègues sont simples et amicales. C'est toujours un plaisir pour moi de les retrouver lors des différentes conférences du domaine.

Dans l'enseignement supérieur, les ressources humaines ne s'occupent pas vraiment de gestion de carrière. Celle-ci est organisée de manière spontanée par les collègues et je remercie tous ceux qui y ont contribué par leurs conseils avisés. Je suis particulièrement reconnaissant envers Clément Pellegrini qui a joué un rôle significatif dans mon évolution professionnelle. Les différents jalons de carrière de ces dernières années (projets PEPS, projets CIMI, projet ANR JCJC, PEDR, encadrements doctoraux, HDR) ont tous bénéficié, entre autres, d'une impulsion initiale de Clément Pellegrini. Merci beaucoup, et j'espère pouvoir être d'aussi bon conseil pour les suivants.

Merci à tous mes collègues et à tous mes amis de l'IMT, en particulier à Lorick et Manon, et également à Bastien, Cécilia, Clément, Dominique, Franck, François, Pascal, Pierre, Pierre, Pierre, Laure, Max, Michel, Michel, Mireille, Nicolas, Nicole, Papa A., Philippe, Reda, Serban, Sheng, Slim, Tristan ainsi que tous ceux dont la principale qualité est de me pardonner de ne pas les citer. Merci aussi à Clément Chouard et Pan Kewei de m'avoir fait confiance pour co-encadrer leurs thèses.

Conformément à l'algorithme des remerciements établi par Nicolas Curien (voir l'amusante page 6 de son manuscrit d'HDR), mais néanmoins avec une réelle sincérité, je termine en exprimant ma gratitude à tous mes autres amis ainsi qu'à ma famille. Je remercie nommément les quatre personnes qui partagent mon quotidien : Hannah, Solveig et Yaël, qui auront le plaisir de reconnaître leur prénom dans un document du travail de papa ; et bien entendu Aurore, pour qui il ne s'agit pas seulement d'un remerciement global pour le soutien de tous les jours mais également d'un remerciement local pour chacune des petites actions – comme la relecture de ce manuscrit de mathématiques, preuve s'il en faut d'une abnégation certaine.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est une présentation synthétique d'une partie de mes contributions scientifiques depuis mon doctorat. Mes activités de recherche se situent à l'interface entre les probabilités et les algèbres d'opérateurs. Elles portent plus précisément sur la théorie des matrices aléatoires et la théorie des probabilités libres.

Mes premiers travaux en thèse, sous la direction de Thierry Lévy à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris), concernaient l'étude de processus stochastiques dans des groupes de Lie. J'ai alors été amené à utiliser les probabilités libres, une théorie adaptée pour décrire la limite en grande dimension de matrices aléatoires. Dans ce mémoire, j'ai choisi de ne pas présenter les travaux de mon manuscrit de thèse ainsi que les articles qui les ont suivis de près :

— ceux portant sur les transformations de Segal-Bargmann libres [8 ; 16] ;

— ceux portant sur les processus de Lévy à valeurs dans le groupe unitaire [9 ; 11] ;

— ceux portant sur les fluctuations des distributions de grandes matrices aléatoires [7 ; 17].

Mon intérêt pour les probabilités libres s'est renforcé pendant mon séjour post-doctoral à l'université de Sarrebruck entre 2014 et 2016 dans l'équipe de Roland Speicher, où j'ai pu aussi découvrir la théorie des groupes quantiques auprès de l'équipe de Moritz Weber. Depuis 2016, je suis maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse de l'université Paul Sabatier. Mes plus récentes recherches peuvent se diviser arbitrairement en quatre thématiques liées aux probabilités non-commutatives :

— l'étude de matrices aléatoires anisotropes en grande dimension [3 ; 4 ; 13 ; 15] où l'invariance en loi par l'action du groupe unitaire est remplacée par d'autres invariances plus faibles ;

— le comportement de valeurs propres atypiques dans des modèles de déformation de matrices aléatoires [6 ; 12] ;

— la comparaison quantitative de distributions de variables aléatoires non-commutatives en probabilités libres [2 ; 10 ; 14] ;

— et enfin l'étude de versions non-commutatives de groupes compacts [5 ; 18 ; 19].

Ce sont ces travaux, à l'exception de [6], que je vais présenter plus en détails dans les chapitres qui suivent. Le premier chapitre présente les probabilités libres, les groupes quantiques, les groupes duaux de Voiculescu, la méthode de Stein libre, ainsi que les résultats des articles [2 ; 5 ; 10 ; 14 ; 18 ; 19]. Le deuxième chapitre présente la liberté asymptotique des matrices aléatoires, plusieurs autres indépendances non-commutatives, ainsi que les résultats des articles [3 ; 4 ; 13 ; 12 ; 15]. Le dernier chapitre présente quelques projets de recherche.

Afin de rendre leur compréhension plus accessible et la lecture du mémoire autant que possible auto-contenue, les théorèmes ne sont pas tous énoncés dans la même généralité qu'au sein des 11 articles. De plus, le but principal de ce mémoire étant la présentation de mes propres contributions au domaine, la bibliographie n'a pas la prétention d'être exhaustive.

Chapitre 1

Probabilités non-commutatives

1.1 Probabilités libres

Une *algèbre de von Neumann*, ou W^**-algèbre*, est une $*$-algèbre unitaire d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, et fermée pour la topologie faible. L'étude des algèbres de von Neumann a débuté sous l'impulsion de von Neumann [Von30], et la théorie a ensuite été développée par Murray et von Neumann [MV36 ; MV37 ; Von40 ; MV43] avec pour motivation la théorie des représentations unitaires de groupes et le concept d'observables de la mécanique quantique (voir l'introduction de [MV36]).

Pour étudier les algèbres de von Neumann, on pourrait être tenté de les écrire sous la forme $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ afin d'utiliser des outils probabilistes. En effet, l'ensemble $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires essentiellement bornées sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une W^*-algèbre – l'algèbre $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ agissant sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par multiplication. Mais une algèbre de variables aléatoires est commutative, et une W^*-algèbre qui n'est pas commutative ne pourra donc jamais être écrite sous cette forme. La théorie des probabilités non-commutatives persiste à étudier les W^*-algèbres comme si elles étaient des algèbres de variables aléatoires, mais sans l'espace de probabilités usuel sous-jacent. Pour un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la mesure $\mathbb{P}$ peut être entièrement reconstruite à partir de l'espérance $\mathbb{E} : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{C}$. Cette forme linéaire, éventuellement équipée de ses propriétés analytiques, est la structure de base dans la définition suivante des espaces de probabilités non-commutatifs.

Définition.
Un espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$ *est une algèbre unitaire* $\mathcal{A}$ *munie d'une forme linéaire* $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *telle que* $\tau[1_\mathcal{A}] = 1$. *Si* $\mathcal{A}$ *est une* $*$*-algèbre et* τ *est une forme* $*$*-linéaire et positive,* $(\mathcal{A}, \tau)$ *est appelé* $*$-espace de probabilités non-commutatif. *Enfin,* $(\mathcal{A}, \tau)$ *est un* W^*-espace de probabilités tracial *si, de plus,* $\mathcal{A}$ *est une* W^**-algèbre et* $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *est une* trace normale et fidèle.

Comme on l'a vu, si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités, alors $\left(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{E}\right)$ est un W^*-espace de probabilités tracial. Inversement, parmi les W^*-espaces de probabilités traciaux $(\mathcal{A}, \tau)$, ceux pour lesquels $\mathcal{A}$ est commutative correspondent exactement (à isomorphisme près) aux algèbres de la forme $(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{E})$ pour un certain espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (voir [Sak12, Section 1.18]).

Les éléments d'un espace de probabilités non-commutatif sont appelés *variables (aléatoires) non-commutatives*. Dans un $*$-espace de probabilités non commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$, une variable non-commutative $a \in \mathcal{A}$ est *normale* si $aa^* = a^*a$. Dans ce cas, une mesure de probabilités μ_a à support compact sur $\mathbb{C}$ est appelée *loi* de a si nous avons le transfert suivant : pour tout polynôme P en deux indéterminées,

$$\tau[P(a,a^*)] = \int_{\mathbb{C}} P(z,z^*)\mathrm{d}\mu_a(z). \tag{1.1}$$

L'existence et l'unicité de la loi sont assurées lorsque $(\mathcal{A},\tau)$ est un W^*-espace de probabilités tracial, et la mesure coïncide alors avec la notion usuelle de loi de variables aléatoires dans le cas commutatif. Le concept de loi d'une variable aléatoire se généralise à plusieurs variables non-commutatives comme ceci. Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{A}$ des variables non-commutatives d'un espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A},\tau)$. La *distribution* de $(a_1,\dots,a_n)$ est la forme linéaire définie sur l'algèbre $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ des polynômes en n indéterminées non-commutatives par

$$\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle \ni P \mapsto \tau[P(a_1,\dots,a_n)] \in \mathbb{C}.$$

Dans un $*$-espace de probabilités non-commutatif, la $*$-*distribution* de $a=(a_1,\dots,a_n)$ est la distribution de $(a_1,a_1^*,\dots,a_n,a_n^*)$.

Liberté

La notion de liberté de variables non-commutatives s'enracine dans la notion de liberté algébrique de groupes. Le passage d'un groupe à une algèbre de von Neumann provient d'une construction-clé remontant aux travaux de Murray et von Neumann déjà mentionnés, et que nous allons maintenant détailler.

Soit Γ un groupe dénombrable. Considérons l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ des fonctions de carré sommable sur Γ, dont une base est donnée par les masses de Dirac δ_g, avec $g \in \Gamma$. Le groupe Γ agit sur $\ell^2(\Gamma)$ par la représentation régulière gauche $\Gamma \curvearrowright \ell^2(\Gamma)$ suivante :

$$g \cdot \left(\sum_{h\in G} \alpha_h \delta_h\right) = \sum_{h\in G} \alpha_h \delta_{gh}\ ;$$

ce qui permet de considérer Γ comme inclus dans l'ensemble $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ des opérateurs bornés sur $\ell^2(\Gamma)$. L'algèbre de groupe de Γ est alors la sous-algèbre $\mathbb{C}\Gamma \subset \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ engendrée par Γ, et l'algèbre de von Neumann de Γ est la sous-algèbre de von Neumann $W^*(\Gamma) \subset \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ engendrée par $\mathbb{C}\Gamma$.

Les algèbres du type $W^*(\Gamma)$ sont une source importante d'algèbres de von Neumann. Par exemple, si Γ est un groupe libre engendré par un nombre fini n d'éléments, une question célèbre déjà connue de Murray et von Neumann est de savoir si l'algèbre $W^*(\Gamma)$ dépend du nombre n de générateur ou pas (à isomorphisme près). Cette question, encore non-résolue actuellement, est une des motivations de Voiculescu pour développer la théorie des probabilités libres dans les années 80 (cf. [VSW16, Background and outlook]). À la suite de Voiculescu, nous allons munir les algèbres $W^*(\Gamma)$ d'une structure de probabilités non-commutatives et traduire la liberté au sein des groupes en une notion de liberté pour les algèbres.

En appelant e l'élément neutre du groupe dénombrable Γ que l'on étudie, la forme linéaire τ sur $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ définie par $\tau[B] = \langle B\delta_e, \delta_e\rangle$ permet d'équiper les algèbres $\mathbb{C}\Gamma$ et $W^*(\Gamma)$ d'une structure de probabilités non-commutatives. Plus précisément, $(\mathbb{C}\Gamma,\tau)$ est un $*$-espace de probabilités non-commutatif, et $(W^*(\Gamma),\tau)$ est un W^*-espace de probabilités tracial. La forme linéaire τ détecte les relations du groupe car, pour tout $g \in \Gamma$,

$$\tau[g] = \begin{cases} 1 & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est alors possible d'exprimer la liberté de groupes en utilisant τ. Deux sous-groupes $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$ sont libres entre eux s'il n'existe aucune relation non-triviale entre leurs éléments : tout produit d'éléments non-neutres pris alternativement dans Γ_1 ou Γ_2 est différent de e. Autrement dit, pour tous $g_1, \cdots, g_n$ pris alternativement dans Γ_1 ou Γ_2 et tels que $\tau[g_1] = \ldots = \tau[g_n] = 0$, on a $\tau[g_1 \cdots g_n] = 0$. L'intérêt de cette reformulation est sa linéarité : elle reste vraie en prenant des éléments $g_1, \ldots, g_n$ des algèbres $\mathbb{C}\Gamma_1$ ou $\mathbb{C}\Gamma_2$. Cela conduit Voiculescu [Voi85] à définir une notion de liberté au niveau des algèbres comme suit.

Définition.
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_1$ deux sous-algèbres d'un espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$. Les algèbres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont dites libres *si, pour tous $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geq 1$) pris alternativement dans $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ et tels que $\tau[a_1] = \ldots = \tau[a_n] = 0$, on a $\tau[a_1 \cdots a_n] = 0$.*

Sans surprise, en partant de deux sous-groupes $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$ libres entre eux, on obtient la liberté des algèbres $\mathbb{C}\Gamma_1$ et $\mathbb{C}\Gamma_2$ dans $(\mathbb{C}\Gamma, \tau)$. Par continuité, on a également la liberté des algèbres $W^*(\Gamma_1)$ et $W^*(\Gamma_2)$ dans $(W^*(\Gamma), \tau)$.

Une définition similaire existe pour la liberté d'un nombre fini d'algèbres $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. Cette liberté pour trois algèbres ou plus peut également être exprimée par récurrence : $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ sont *libres* dès lors que $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$ sont libres et que $\mathcal{A}_n$ est libre avec l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$. Enfin, des familles de variables non-commutatives $(a_i)_{i \in I_1}, \ldots, (a_i)_{i \in I_n}$ de $\mathcal{A}$ sont dites *libres* si les algèbres respectives $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ qu'elles engendrent sont libres, et elles sont dites $*$-*libres* si les $*$-algèbres respectives qu'elles engendrent sont libres.

En faisant jouer à la liberté de Voiculescu en probabilités non-commutatives le même rôle que l'indépendance en probabilités, de nombreux résultats de probabilités classiques trouvent des analogues non-commutatifs : théorème central limite libre, loi des événements rares libres, calcul stochastique libre, etc [VDN92 ; NS06 ; MS17]. Le pendant libre de la mesure gaussienne en probabilités libres est alors la *mesure semi-circulaire*, c'est-à-dire la mesure de probabilités sur $[-2, 2]$ de densité

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - t^2}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Une variable normale dont la loi est la mesure semi-circulaire est appelée *variable semi-circulaire*.

Propriété d'Atiyah [2]

Grâce à la forme linéaire $\tau : \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma)) \to \mathbb{C}$ de la section précédente, il est possible de définir une notion de dimension (dite de von Neumann) pour les sous-espaces fermés $V \subset \ell^2(\Gamma)$ par la simple formule $\dim(V) = \tau[p_V] \in [0, 1]$, où $p_V \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ est la projection orthogonale de $\ell^2(\Gamma)$ sur V. En utilisant cette dimension de von Neumann, Atiyah a défini des nombres de Betti L^2 à valeurs non-nécessairement entières pour étudier les surfaces de Riemann fermées non-compactes [Ati76]. Cette notion de nombre de Betti L^2, que nous n'allons pas définir, a par la suite été généralisée avec succès dans plusieurs directions [Dod77 ; Con79 ; CG86 ; Gab02 ; CS05]. Atiyah s'interroge dès le début sur ce que peuvent valoir ces nombres de Betti [Ati76, page 72]. Les problèmes concernant les valeurs possibles des nombres de Betti L^2 dans différentes situations sont maintenant connus sous le nom de *conjectures d'Atiyah*. Ils peuvent se reformuler en terme de rang de matrices, et c'est ce point de vue que nous allons maintenant adopter.

Considérons un W^*-espace de probabilités tracial $(\mathcal{A}, \tau)$ tel que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'opérateurs agissant sur un espace de Hilbert H. Soit $d \in \mathbb{N}$. Une matrice $A \in M_d(\mathcal{A})$ de $d \times d$ variables non-commutatives agit par multiplication à droite sur H^d. Son *rang*, qui coïncide avec la dimension de von Neumann de $\overline{\mathrm{Im}(A)} \subset H^d$, est alors défini par

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\overline{\mathrm{Im}(A)}\right) = \sum_{i=1}^{d} \tau[p_{ii}] \in [0, d],$$

où $(p_{ij})_{i,j=1}^d \in M_d(\mathcal{B}(H))$ est la projection orthogonale de H^d sur $\overline{\mathrm{Im}(A)}$.

Les conjectures d'Atiyah pour un groupe Γ consistent à identifier des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ contenant les valeurs $\mathrm{rg}(A)$ pour certaines matrices $A \in M_d(\mathbb{C}\Gamma)$. Par exemple, considérons un groupe dénombrable Γ et notons $\mathrm{ppcm}(\Gamma)$ le plus petit commun multiple des ordres de ses sous-groupes finis (avec la convention $\mathrm{ppcm}(\Gamma) = 1$ pour les groupes sans torsion). Lorsque $\mathrm{ppcm}(\Gamma) < +\infty$, on dit que Γ satisfait la *conjecture forte d'Atiyah* [Lüc02, Conjecture 10.2] si

$$\left\{ \mathrm{rg}(A) : d \in \mathbb{N}, A \in M_d(\mathbb{C}\Gamma) \right\} \subset \frac{1}{\mathrm{ppcm}(\Gamma)}\mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Pour inclure des variables non-commutatives qui ne proviennent pas forcément de groupes, Shlyakhtenko et Soufranis [SS15] ont introduit la notion similaire suivante.

Définition.
Soit $\mathcal{A}$ un W^*-espace de probabilités tracial, et K un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On dit qu'une sous-algèbre unitaire $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ satisfait la propriété d'Atiyah *avec le groupe K si*

$$\left\{ \mathrm{rg}(A) : d \in \mathbb{N}, A \in M_d(\mathcal{B}) \right\} \subset K.$$

La conjecture forte d'Atiyah pour un groupe Γ signifie donc que $\mathbb{C}\Gamma$ a la propriété d'Atiyah avec le groupe $\frac{1}{\mathrm{ppcm}(\Gamma)}\mathbb{Z}$. Nous savons que la conjecture forte d'Atiyah se comporte bien vis-à-vis des produits libres de groupes (voir par exemple [Rei99, Theorem 7.7]), et il est légitime de se demander si la liberté de Voiculescu au niveau des algèbres conserve également la propriété d'Atiyah. Avec Arizmendi, Speicher et Yin, nous avons pu montrer le résultat suivant.

Théorème A. — [2, Cor. 4.6.]
Soient $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \ldots, a_n$ des variables non-commutatives normales et $*$-libres d'un W^*-espace de probabilités tracial. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on suppose que l'algèbre unitaire engendrée par a_i satisfait la propriété d'Atiyah avec le groupe $\frac{1}{d_i}\mathbb{Z}$.
Alors l'algèbre unitaire engendrée par $a_1, \ldots, a_n$ possède la propriété d'Atiyah avec le groupe $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, où d est le plus petit commun multiple de $d_1, \ldots, d_n$.

Shlyakhtenko et Soufranis avaient également obtenu la propriété d'Atiyah dans la situation ci-dessus [SS15], mais avec le groupe $\frac{1}{d_1 \cdots d_n}\mathbb{Z}$. Nous améliorons ici le dénominateur, en passant du produit au plus petit commun multiple. Le dénominateur $d = \mathrm{ppcm}(d_1, \ldots, d_n)$ est optimal, et permet de retrouver comme cas particulier la conjecture forte d'Atiyah (1.2) pour les produits libres de groupes finis.

Une seconde conséquence de notre résultat concerne les atomes de lois de variables non-commutatives. Pour une variable non-commutative normale, la masse de la loi μ_a de a en un complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est liée au rang de a comme ceci : $\mu_a(\{\lambda\}) = 1 - \mathrm{rg}(a - \lambda \cdot 1_{\mathcal{A}})$; et nous conserverons par la suite la notation $\mu_a(\{\lambda\})$ pour désigner $1 - \mathrm{rg}(a - \lambda \cdot 1_{\mathcal{A}})$ dans les cas où a n'est pas normale. Il est possible de montrer que l'algèbre unitaire engendrée par une variable non-commutative normale a possède la propriété d'Atiyah avec $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ si et seulement si tous les atomes de la loi de a ont leurs masses contenues dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$. Nous en déduisons la conséquence suivante du théorème A.

Corollaire.
Soient $d \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \ldots, a_n$ des variables non-commutatives normales $*$-libres d'un W^*-espace de probabilités tracial. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on suppose que les atomes de la loi de a_i ont leurs masses contenues dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$. Alors, les atomes de la loi d'un polynôme $P(a_1, \ldots, a_n)$ normal en les variables $a_1, \ldots, a_n$ ont également leurs masses contenues dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$.

Pour montrer le théorème A, nous donnons une expression algébrique du rang de polynômes $P(a_1, \dots, a_n)$ en des variables libres $a_1, \dots, a_n$. En principe, cela donne un moyen de calculer les positions et les masses des atomes de la loi de $P(a_1, \dots, a_n)$ connaissant les positions et les masses des atomes des lois respectives de $a_1, \dots, a_n$. Bien que le calcul ne soit pas toujours exploitable, il permet d'étendre la description complète des atomes bien au-delà des deux cas connus de la somme [BV98] et du produit [Bel03] de deux variables libres. Parmi les nouveaux exemples donnés [2] figurent le commutateur et l'anti-commutateur. L'expression algébrique nous permet également de comparer le cas libre à d'autres situations, comme le montre le résultat suivant.

Théorème B. — [2, Th. 1.1.]

Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des variables non-commutatives normales d'un W^*-espace de probabilités tracial. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on suppose que les lois de a_i et b_i sont identiques.

Si $a_1, \dots, a_n$ sont $*$-libres, alors pour tout polynôme P en n indéterminées non-commutatives, et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\mu_{P(a_1,\dots,a_n)}(\{\lambda\}) \leq \mu_{P(b_1,\dots,b_n)}(\{\lambda\}).$$

Autrement dit, parmi les n-tuples de variables non-commutatives normales de lois marginales fixées, les variables libres sont celles qui produisent le moins de masse atomique pour les lois des polynômes. Notons que ce théorème reste vrai en prenant des fonctions rationnelles en des indéterminées non-commutatives à la place des polynômes.

1.2 Versions duales non-commutatives de groupes

De la même manière que les espaces de probabilités non-commutatifs de la section précédente ressemblent à des algèbres de variables aléatoires sans forcément en être, nous étudions dans cette section des versions duales non-commutatives de groupes, c'est-à-dire des algèbres similaires aux algèbres de fonctions sur un groupe, mais non-nécessairement commutatives. Plus particulièrement, l'un des travaux présentés concerne les groupes quantiques de Woronowicz [19], et les deux autres concernent les groupes duaux de Voiculescu [5 ; 18]. Avant de les aborder, attardons-nous d'abord sur la théorie des groupes quantiques.

Considérons un groupe compact G. Ce qui joue le rôle de la mesure uniforme sur G est la mesure de Haar h définie sur la tribu borélienne $\mathcal{F}$ de G : c'est l'unique mesure de probabilités invariante par translation à gauche ou à droite. Comme vu précédemment, l'algèbre des fonctions essentiellement bornées $L^\infty(G,\mathcal{F},h)$ est une W^*-algèbre, et nous voudrions disposer d'un analogue non-commutatif de $L^\infty(G,\mathcal{F},h)$. En fait, les algèbres de von Neumann $W^*(\Gamma)$ introduites à la section précédente sont déjà des versions non-commutatives des algèbres $L^\infty(G,\mathcal{F},h)$. En effet, dans le cas commutatif, $L^\infty(G,\mathcal{F},h)$ et $W^*(\Gamma)$ sont deux manières de décrire une même algèbre de fonctions. Soit G un groupe compact abélien et soit Γ son groupe de caractères $\widehat{G} \subset L^\infty(G,\mathcal{F},h)$. L'égalité $\widehat{G} = \Gamma$ s'étend en un isomorphisme de W^*-algèbre

$$L^\infty(G,\mathcal{F},h) \simeq W^*(\Gamma). \tag{1.3}$$

Inversement, tout groupe dénombrable abélien Γ muni de la topologie discrète est isomorphe au groupe de caractères d'un groupe compact abélien G via la dualité de Pontryagin, ce qui mène au même isomorphisme (1.3) d'algèbres *commutatives*. Avec cette perspective, les algèbres *non-commutatives* $W^*(\Gamma)$ pour Γ dénombrable *non-abélien* deviennent des généralisations non-commutatives des algèbres $L^\infty(G,\mathcal{F},h)$. La structure de groupes quantiques au sens de Woronowicz que nous allons maintenant décrire permet d'englober les algèbres $L^\infty(G,\mathcal{F},h)$ et $W^*(\Gamma)$ au sein d'une même théorie dans les cas abéliens et non-abéliens.

Il existe au moins trois manières de présenter la théorie des groupes quantiques compacts de Woronowicz ; trois manières qui s'avèrent complètement équivalentes pour les questions qui vont nous intéresser. Celle-ci peut être développée dans le cadre des W^*-algèbres [Van14], ce qui inclut naturellement les algèbres de la forme $L^\infty(G,\mathcal{F},h)$ et celles de la forme $W^*(\Gamma)$. Historiquement, c'est le cadre des C^*-algèbres qui est utilisé par Woronowicz [Wor87], suivant le point de vue de Gelfand-Naimark sur les « fonctions continues non-commutatives ». Pour alléger la présentation, nous allons suivre ici une troisième voie purement algébrique [DK94] de la théorie des groupes quantiques compacts. Le passage de l'un à l'autre de ces points de vue se fait par complétion pour des topologies appropriées.

La première étape consiste à comprendre comment se traduisent les axiomes définissant un groupe lorsqu'on passe par dualité de la catégorie des ensembles à la catégorie des fonctions sur cet ensemble. Cette étape est standard et aboutit au concept d'*algèbres de Hopf* : nous obtenons les notions de co-produit, de co-unité et de co-inverse par simple évaluation d'une fonction sur le produit, l'élément neutre et l'inverse d'un groupe – voir (1.4) pour un exemple. On formule ici ces axiomes pour les $*$-algèbres unitaires.

Définition.

Une $*$-algèbre de Hopf *est une* $*$*-algèbre unitaire* $\mathcal{A}$ *de produit* $m : \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, *munie d'un* $*$*-morphisme* $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ *et de deux applications linéaires* $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, *tels que*

— Δ *est un* co-produit co-associatif *:* $(\Delta\otimes \mathrm{Id})\circ\Delta = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta$ *;*

— ε *est une* co-unité *:* $(\varepsilon\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta = \mathrm{Id} = (\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta$ *;*

— S *est un* co-inverse *:* $m\circ(S\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta = \varepsilon 1_{\mathcal{A}} = m\circ(\mathrm{Id}\otimes S)\circ\Delta$.

De manière concrète, considérons un groupe compact G de matrices de dimension $n \times n$, unitaires. Soit $\mathrm{Pol}(G) \subset L^\infty(G, \mathcal{F}, h)$ la $*$-algèbre engendrée par les n^2 fonctions coordonnées $u_{ij}(g) = g_{ij}$. Alors $\mathrm{Pol}(G)$ est une $*$-algèbre de Hopf munie des opérations Δ, ε et S suivantes : pour toute fonction $f \in \mathrm{Pol}(G)$, on a

$$\Delta(f) : (g, h) \to f(g \cdot h), \quad \varepsilon(f) = f(e) \quad \text{et} \quad S(f) : g \to f(g^{-1}). \tag{1.4}$$

Nous pouvons par exemple calculer $\Big(S(u_{ij})\Big)(g) = (g^{-1})_{ij} = u_{ji}(g)^*$. De même, en utilisant les formules habituelles du produit de matrices, nous obtenons la valeur de Δ, ε et S sur les fonctions coordonnées $(u_{ij})_{i,j=1}^n$: pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}, \quad \varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad S(u_{ij}) = u_{ji}^*.$$

Ces formules sont valables pour toute algèbre de fonctions polynomiales d'un groupe compact matriciel. Nous les prendrons comme définition pour l'analogue non-commutatif que sont les *algèbres de GQCM*, appelées *CMQG algebra* dans [DK94].

Définition.
Une algèbre de GQCM *(ou algèbre de groupe quantique compact matriciel) est une $*$-algèbre de Hopf $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S)$ engendrée par n^2 éléments u_{ij} (avec $1 \leq i, j \leq n$) tels $(u_{ij})_{i,j=1}^n$ et $(u_{ij}^*)_{i,j=1}^n$ sont inversibles dans $M_n(\mathcal{A})$ et tels que : pour $1 \leq i, j \leq n$,*

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}, \quad \varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij} \quad \textit{et} \quad S(u_{ij}) = u_{ji}^*. \tag{1.5}$$

Donnons les deux exemples correspondant respectivement à un groupe compact G, et au dual d'un groupe dénombrable Γ :

— Soit G groupe compact matriciel. L'algèbre $\mathrm{Pol}(G) \subset L^\infty(G, \mathcal{F}, h)$ engendrée par les fonctions coordonnées comme définie précédemment est l'algèbre de GQCM associée à G.

— Soit Γ un groupe dénombrable finiment engendrée par $g_1, \ldots, g_n$. On peut interpréter Γ comme étant le dual d'un groupe quantique G, dont l'algèbre de GQCM est l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma \subset W^*(\Gamma)$, engendrée par les n^2 éléments d'une matrice diagonale $(\delta_{ij} g_i)_{i,j=1}^n$. On note alors $\mathbb{C}\Gamma = \mathrm{Pol}(G)$.

De manière générale, un *groupe quantique* G_n est définie par une algèbre de GQCM engendrée par n^2 éléments $(\mathrm{Pol}(G_n), \Delta, \varepsilon, S)$, et on pense à $\mathrm{Pol}(G_n)$ comme à l'algèbre des fonctions polynomiales sur G_n. Il faut garder en tête que si $\mathrm{Pol}(G_n)$ est une algèbre non-commutative, alors G_n n'existe pas en tant qu'ensemble et $\mathrm{Pol}(G_n)$ est une algèbre qui n'est pas une algèbre de fonctions.

Groupes quantiques de partitions spatiales [19]

Certaines algèbres de GQCM sont des quotients de la $*$-algèbre unitaire universelle $\mathrm{Pol}(U_n^+)$ engendrée par n^2 éléments u_{ij} (avec $1 \leq i, j \leq n$) tels que $(u_{ij})_{i,j=1}^n$ et $(u_{ij}^*)_{i,j=1}^n$ soient unitaires dans $M_n(\mathrm{Pol}(U_n^+))$. Cette algèbre $\mathrm{Pol}(U_n^+)$ est l'algèbre de GQCM associée au groupe unitaire libre U_n^+. Ce groupe quantique fait partie d'une série de nouveaux exemples de groupes quantiques compacts introduits par Wang [Wan95]. Son approche par quotient a été largement étendue par Banica et Speicher [BS09] aboutissant à une classe de groupes quantiques appelées *groupes quantiques aisés* (traduction libre de *easy quantum groups*), ou *groupes quantiques de partitions* : l'idée fondamentale est d'utiliser la combinatoire des partitions pour encoder les espaces d'entrelaceurs de groupes quantiques. Avec Weber [19], nous définissons une nouvelle classe de groupes quantiques, appelés *groupes quantiques de partitions spatiales*, qui englobe celle de Banica et Speicher. Nous allons maintenant donner plus de détails sur cette construction dans le cas orthogonal, c'est-à-dire le cas où $u_{ij} = u_{ij}^*$, mais cette section se généralise entièrement au cas unitaire en suivant [Fre17] ou [TW17].

Soit $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de GQCM engendrée par $(u_{ij})_{i,j=1}^n$ telle que $u_{ij} = u_{ij}^*$ pour $1 \leq i, j \leq n$. La k-ième puissance tensorielle $u^{\otimes k} \in M_n(\mathbb{C})^{\otimes k} \otimes \mathcal{A}$ est définie par le produit de Kronecker de la matrice $u = (u_{ij})_{i,j=1}^n$ avec elle-même. Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$, l'espace des *entrelaceurs* de $u^{\otimes k}$ vers $u^{\otimes \ell}$ est l'ensemble des applications linéaires

$$\mathrm{Mor}(k, \ell) = \left\{ T : (\mathbb{C}^n)^{\otimes k} \to (\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell} \text{ linéaire telle que } Tu^{\otimes k} = u^{\otimes \ell} T \right\}.$$

Les espaces d'entrelaceurs de l'algèbre de GQCM consistent alors en la collection d'espaces vectoriels $(\mathrm{Mor}(k, \ell))_{k,\ell \in \mathbb{N}}$. Le théorème de Tannaka-Krein, qui permet de reconstruire un groupe à partir de ses entrelaceurs, a été généralisé par Woronowicz aux groupes quantiques compacts [Wor88]. Bien que les espaces $(\mathrm{Mor}(k, \ell))_{k,\ell \in \mathbb{N}}$ présentés ici suffisent dans le cas orthogonal où $u_{ij} = u_{ij}^*$ (voir [Mal16]), il est nécessaire de considérer des espaces d'entrelaceurs plus généraux dans le cas non-orthogonal [Wor88].

Dualité de Tannaka-Krein-Woronowicz.
Les espaces d'entrelaceurs caractérisent une algèbre de GQCM à isomorphisme près.

Dans le cas de l'algèbre $\mathrm{Pol}(S_n)$ de GQCM associée au groupe symétrique S_n, l'espace d'entrelaceur $\mathrm{Mor}(k, \ell)$ est engendré linéairement par des morphismes T_p indexés par toutes les partitions p de $\{1, \ldots, k+\ell\}$. La définition précise de T_p est donnée plus loin (1.6) dans un cadre plus général. Cette manière de décrire les entrelaceurs du groupe S_n par des partitions remonte aux travaux de Jones [Jon94] et Martin [Mar96]. Suivant Banica et Speicher [BS09], un *groupe quantique de partitions* G_n est une algèbre de GQCM $(\mathrm{Pol}(G_n), \Delta, \varepsilon, S)$ pour laquelle les espaces d'entrelaceurs sont engendrés linéairement par les mêmes morphismes T_p mais indexés par un sous-ensemble éventuellement strict de partitions p. Par définition, les espaces d'entrelaceurs de $\mathrm{Pol}(G_n)$ sont donc contenus dans les espaces d'entrelaceurs de $\mathrm{Pol}(S_n)$. On dit que G_n contient S_n comme sous-groupe, ou encore qu'il est *homogène*. Pour les groupes quantiques de partitions G_n, on a en fait l'inclusion de groupes quantiques

$$S_n \subset G_n \subset U_n^+,$$

ce qui signifie que les espaces d'entrelaceurs de $\mathrm{Pol}(S_n)$ contiennent ceux de $\mathrm{Pol}(G_n)$, et ceux de $\mathrm{Pol}(G_n)$ contiennent ceux de $\mathrm{Pol}(U_n^+)$.

Pour la suite, la dimension n est remplacée par une puissance quelconque n^m (avec $m \geq 1$). Notre travail [19] en collaboration avec Weber consiste à définir des espaces d'entrelaceurs $T : (\mathbb{C}^{n^m})^{\otimes k} \to (\mathbb{C}^{n^m})^{\otimes \ell}$ indexés par des partitions plus générales que celles considérées par Banica et Speicher de telle sorte que les groupes quantiques G_{n^m} associés ne soient pas forcément homogènes, c'est-à-dire que

$$S_{n^m} \not\subset G_{n^m} \subset U_{n^m}^+.$$

Précédemment, une partition de $\{1, \ldots, k+\ell\}$ permettait de définir un entrelaceur de $\mathrm{Mor}(k, \ell)$. Nous raffinons cette correspondance grâce au paramètre supplémentaire $m \geq 1$. Nous définissons les entrelaceurs à partir des partitions de $\{1, \ldots, k+\ell\} \times \{1, \ldots, m\}$, représentées dans l'espace par $k \times m$ points dans un plan supérieur et $\ell \times m$ points dans un plan inférieur, reliés ensemble selon la partition (m désignant la profondeur). Ces partitions sont appelées spatiales, par opposition aux partitions considérées par Banica et Speicher, qui correspondent au cas $m = 1$ et peuvent donc être représentées dans le plan. Considérons la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de

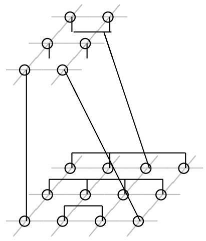
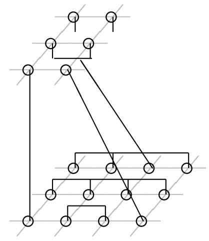
$p =$  $q =$ 

FIGURE 1.1 – Deux exemples de partitions spatiales pour $k = 2$, $\ell = 4$, et $m = 3$.

$\mathbb{C}^n$. Une décoration $i = (i_1, \dots, i_{km}) \in \{1, \dots, n\}^{km}$ des $k \times m$ points du plan supérieur par des indices appartenant à $\{1, \dots, n\}$ permet d'indexer les vecteurs d'une base $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{km}}$ de $(\mathbb{C}^n)^{\otimes km} \simeq (\mathbb{C}^{n^m})^{\otimes k}$. On note alors e_i le vecteur correspondant $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{km}}$. De même, une décoration $j = (j_1, \dots, j_{\ell m}) \in \{1, \dots, n\}^{\ell m}$ des $\ell \times m$ points du plan inférieur permet d'indexer les vecteurs d'une base $e_j = e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{\ell m}}$ de $(\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell m} \simeq (\mathbb{C}^{n^m})^{\otimes \ell}$. Soit p une partition spatiale de $\{1, \dots, k + \ell\} \times \{1, \dots, m\}$ points. À partir de p est définie l'application linéaire $T_p : (\mathbb{C}^{n^m})^{\otimes k} \to (\mathbb{C}^{n^m})^{\otimes \ell}$ suivante : pour tout vecteur de base $e_i \in (\mathbb{C}^{n^m})^{\otimes k}$ associé à une décoration $i \in \{1, \dots, n\}^{km}$ des $k \times m$ points du plan supérieur,

$$T_p(e_i) = \sum_j e_j \tag{1.6}$$

où la somme porte sur les décorations $j \in \{1, \dots, n\}^{\ell m}$ des $\ell \times m$ points du plan inférieur telles que tous les points d'un même bloc de p sont décorés par le même indice.

Dans [19] sont considérées des dimensions $n_1 \cdots n_m$ (avec $n_1, \dots, n_m \geq 1$) au lieu de simples puissances n^m. Nous vérifions la stabilité des morphismes T_p par les opérations naturelles portant sur les entrelaceurs (comme la composition). Certains ensembles de partitions spatiales p correspondent à des familles génératrices T_p d'espaces d'entrelaceurs, et cela nous conduit à définir une nouvelle classe de groupes quantiques comme ceci.

DÉFINITION.
Un groupe quantique de partitions spatiales *est la donnée d'une algèbre de GQCM dont les espaces d'entrelaceurs sont engendrés linéairement par T_p, où p parcourt un sous-ensemble des partitions spatiales.*

Les groupes quantiques ne sont alors pas forcément homogènes. L'utilisation des partitions spatiales permet également d'effectuer certaines opérations sur les groupes quantiques qui feraient naturellement sortir de la classe des groupes quantiques de partitions considérés par Banica et Speicher. Il est par exemple possible de faire le produit encollé de groupes quantiques sans sortir de la classe des groupes quantiques de partitions spatiales. Le *produit encollé* est défini comme ceci [TW17] : si $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n_1}$ et $(v_{kl})_{1 \leq k,l \leq n_2}$ sont les générateurs respectifs de deux algèbres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de GQCM, l'algèbre engendrée par les $(n_1 n_2)^2$ éléments $(u_{ij} v_{kl})_{(1,1) \leq (i,k),(j,l) \leq (n_1,n_2)}$ est l'algèbre de GQCM du produit encollé, direct ou libre selon que l'on travaille dans le produit tensoriel ou libre des algèbres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

THÉORÈME C. — [19]
La classe des groupes quantiques de partitions spatiales est stable par produit encollé (direct et libre) et contient des groupes quantiques non-homogènes.

Pour conclure cette partie concernant les groupes quantiques de partitions spatiales, mentionnons sans plus de détails que cette classe contient également certains groupes quantiques d'automorphismes d'espaces quantiques finis [19, Section 5.5] et les groupes orthogonaux projectifs [Far22].

Groupe unitaire dual [5 ; 18]

Pour motiver l'introduction du groupe unitaire dual, présentons d'abord un analogue libre de la mesure uniforme sur la sphère complexe. Dans le cadre classique, si $v = (v_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur aléatoire uniformément distribué sur la sphère complexe, et donc tel que $\sum_{i=1} |v_i|^2 = 1$, alors la loi de v est invariante par l'action du groupe unitaire. Autrement dit, pour toute matrice aléatoire unitaire $U = (U_{ij})_{i,j=1}^n$ indépendante de v, le vecteur $Uv = (\sum_{k=1}^n U_{ik}v_k)_{i=1}^n$ a la même loi que v. Avec Baraquin, Franz, Maaßen, et Weber, nous avons pu établir l'analogue libre de la mesure uniforme sur la sphère complexe dans le théorème D suivant, où l'indépendance entre U et v est remplacée par la liberté.

Dans un $*$-espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$, rappelons que la $*$-distribution d'un vecteur $v = (v_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}^n$ de variables non-commutatives est la forme linéaire définie sur les polynômes en des indéterminées non-commutatives par

$$\mathbb{C}\langle x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^* \rangle \ni P \mapsto \tau[P(v_1, v_1^*, \ldots, v_n, v_n^*)] \in \mathbb{C}.$$

Si $\sum_{i=1}^n v_i^* v_i = 1$, la $*$-distribution de v est encore définie sur l'algèbre $\mathbb{C}\langle x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^* \rangle$ quotientée par la relation $\sum_{i=1}^n x_i^* x_i = 1$. Cette $*$-algèbre

$$\mathcal{S}_{n-1}^{\mathrm{nc}} = \mathbb{C}\Big\langle x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^* \Big| \sum_{i=1}^n x_i^* x_i = 1 \Big\rangle$$

définie par quotient est une version non-commutative de la sphère complexe.

Théorème D. — [5, corollaire de la Prop. 4.6]
Il existe une unique $*$-distribution $\varphi : \mathcal{S}_{n-1}^{\mathrm{nc}} \to \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante :
pour tout W^*-espace de probabilités tracial $(\mathcal{A}, \tau)$,
tout vecteur $v = (v_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n v_i^* v_i = 1$,
et toute matrice unitaire $U = (U_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathcal{A})$ de variables $*$-libres avec celles de v, si φ est la $*$-distribution de v, alors φ est aussi la $*$-distribution de $Uv = (\sum_{k=1}^n U_{ik}v_k)_{i=1}^n$.

Un vecteur de variables non-commutatives dont la $*$-distribution est la distribution φ du théorème D est alors appelé *vecteur unitaire librement uniforme*. Lorsque la liberté de Voiculescu est remplacée par l'indépendance tensorielle, Banica a obtenu un résultat similaire [Ban15, Proposition 6.3], donnant lieu à une $*$-distribution uniforme sur cette autre sphère non-commutative

$$\mathbb{C}\Big\langle x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^* \Big| \sum_{i=1}^n x_i^* x_i = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* = 1 \Big\rangle.$$

L'étude de la distribution uniforme est rendue possible, dans le cas classique d'un vecteur uniforme sur la sphère complexe comme dans le cas non-commutatif considéré dans [Ban15], par l'action de groupes quantiques : respectivement celle du groupe unitaire classique et celle du groupe unitaire libre U_n^+ défini page 10. Ce qui joue le rôle de l'action d'un groupe quantique dans le cas libre du théorème D est l'action d'un *groupe dual* au sens de Voiculescu [Voi87]. Ici encore, nous n'en présentons que la version algébrique. La définition d'une structure duale de groupe dans la catégorie des $*$-algèbres unitaires reprend par dualité les axiomes correspondant à une structure de groupe (voir plus généralement [BD68, Chapter IV] pour les structures algébriques duales). Nous obtenons quasiment la même définition que celle d'une $*$-algèbre de Hopf $\mathcal{A}$ page 8, mais le co-produit est maintenant à valeurs dans le *produit libre* d'algèbres $\mathcal{A} * \mathcal{A}$ au lieu du produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Définition.
Un groupe dual *(au sens de Voiculescu) est une $*$-algèbre unitaire $\mathcal{A}$, munie de trois $*$-morphisme $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} * \mathcal{A}$, $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ et $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tels que*

— Δ *est un* co-produit co-associatif *:* $(\Delta * \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} * \Delta) \circ \Delta$ *;*

— ε *est une* co-unité *:* $(\varepsilon * \mathrm{Id}) \circ \Delta = \mathrm{Id} = (\mathrm{Id} * \varepsilon) \circ \Delta$ *;*

— S *est un* co-inverse *:* $m \circ (S * \mathrm{Id}) \circ \Delta = \varepsilon 1_{\mathcal{A}} = m \circ (\mathrm{Id} * S) \circ \Delta$

où $m : \mathcal{A} * \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est le $*$-morphisme induit par le produit.

Le groupe dual qui agit sur $\mathcal{S}^{\mathrm{nc}}_{n-1}$ est le *groupe unitaire dual* U^{nc}_n, défini grâce à l'algèbre de Brown suivante : l'algèbre de Brown [Bro81] est la $*$-algèbre unitaire universelle $\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n)$ engendrée par n^2 éléments u_{ij} (avec $1 \leq i, j \leq n$) tels que $(u_{ij})^n_{i,j=1}$ est unitaire dans $M_n(\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n))$. Ici encore, on pense à l'algèbre $\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n)$ comme à une algèbre de fonctions polynomiales sur un objet abstrait U^{nc}_n alors même que $\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n)$ n'est pas une algèbre de fonctions. Le co-produit, la co-unité et le co-inverse du groupe unitaire dual vérifient les mêmes formules que celles valables pour les algèbres de groupes quantiques compacts matriciels, le produit tensoriel étant remplacé par le produit libre (comparer (1.5) avec (1.7) est instructif).

Définition.
Le groupe unitaire dual U^{nc}_n *est le groupe dual* $\Big(\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n), \Delta, \varepsilon, S\Big)$ *tel que : pour* $1 \leq i, j \leq n$*,*

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} v_{kj}, \quad \varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij} \quad \textit{et} \quad S(u_{ij}) = u^*_{ji}, \tag{1.7}$$

où $(u_{ij})^n_{i,j=1}$ et $(v_{ij})^n_{i,j=1}$ sont les générateurs respectifs des deux facteurs du produit libre $\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n) * \mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n)$.

Le groupe dual U^{nc}_n agit sur $\mathcal{S}^{\mathrm{nc}}_{n-1}$ par le $*$-morphisme

$$x_i \mapsto \sum_{k=1}^{n} u_{ik} x_k$$

de l'algèbre $\mathcal{S}^{\mathrm{nc}}_{n-1}$ vers le produit libre $\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n) * \mathcal{S}^{\mathrm{nc}}_{n-1}$. Pour étudier les distributions invariantes par cette action, il est naturel de considérer une mesure uniforme sur U^{nc}_n, une mesure de Haar. Pour les groupes quantiques compacts, l'existence d'une mesure de Haar a été montrée par Woronowicz [Wor87] : pour toute algèbre de GQCM $\mathcal{A}$, il existe une unique *intégrale de Haar*. C'est une forme linéaire unitaire $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que pour toute autre forme linéaire unitaire $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, on a

$$(h \otimes \phi) \circ \Delta = (\phi \otimes h) \circ \Delta = h.$$

On définit une *intégrale de Haar libre* sur U^{nc}_n comme une forme linéaire unitaire $h : \mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n) \to \mathbb{C}$ telle que pour toute autre forme linéaire unitaire $\phi : \mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n) \to \mathbb{C}$, on a

$$(h * \phi) \circ \Delta = (\phi * h) \circ \Delta = h,$$

où $*$ désigne le produit libre de forme linéaire, c'est-à-dire la forme linéaire telle que les deux facteurs du produit $\mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n) * \mathrm{Pol}(U^{\mathrm{nc}}_n)$ sont libres au sens de Voiculescu. Avec Ulrich, nous avons montré qu'une telle intégrale de Haar libre n'existait pas pour $n \geq 2$, ce qui tranche avec la théorie des groupes quantiques [18]. Néanmoins, en se restreignant aux *traces* (c'est-à-dire aux formes linéaires ϕ telle que $\phi(ab) = \phi(ba)$), nous pouvons définir un forme linéaire absorbante. On appelle *trace de Haar libre* sur U_n^{nc} toute trace $h : \text{Pol}(U_n^{\text{nc}}) \to \mathbb{C}$ telle que pour toute autre trace $\phi : \text{Pol}(U_n^{\text{nc}}) \to \mathbb{C}$, on a

$$(h * \phi) \circ \Delta = (\phi * h) \circ \Delta = h.$$

Théorème E. — [18, Th. 2.4]
Pour tout $n \geq 1$, il existe une unique trace de Haar libre sur le groupe unitaire dual U_n^{nc}.

Cette trace de Haar libre est en fait la forme linéaire déjà utilisée dans [McC92] pour étudier l'algèbre de Brown. Même si le lien n'est pas explicite dans ce texte, cette forme linéaire joue un rôle important dans la preuve des théorèmes A et B. Elle nous permet également d'identifier la distribution du théorème D : une colonne $(u_{ij})_{i=1}^n$ du groupe unitaire dual U_n^{nc} muni de sa trace de Haar libre est un vecteur unitaire librement uniforme, c'est-à-dire que sa $*$-distribution est la distribution φ du théorème D.

Les différentes invariances par action de groupes donnent des théorèmes du type de Finetti pour les distributions de suites de variables aléatoires. Par exemple, l'invariance par action du groupe unitaire classique induit des distributions gaussiennes complexes conditionnellement indépendantes [Fre62]. Lorsqu'on passe à l'invariance par action du groupe unitaire libre U_n^+, l'indépendance est remplacée sans surprise par la liberté de Voiculescu, et la distribution qui joue le rôle de la gaussienne complexe est la distribution circulaire [Cur10] au sens suivant : une *variable circulaire* est une variables non-commutative c telle que $\frac{1}{\sqrt{2}}(c + c^*)$ et $-\frac{i}{\sqrt{2}}(c - c^*)$ sont deux variables semi-circulaires libres.

Dans notre travail [5] avec Baraquin, Franz, Maaßen, et Weber, nous avons obtenu le premier résultat du type de Finetti pour l'action d'un groupe dual. On dit qu'une suite de variables non-commutative $(z_i)_{i\geq 1}$ de $(\mathcal{A}, \tau)$ est *invariante par l'action du groupe dual unitaire* si, pour tout $n \geq 1$, la $*$-distribution de $(\sum_{k=1}^n u_{ik} z_k)_{i=1}^n$ dans $(\text{Pol}(U_n^{\text{nc}}) * \mathcal{A}, h * \tau)$ coïncide avec celle de $(z_i)_{i=1}^n$.

Théorème F. — [5, Prop. 5.8]
Soit $(z_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables non-commutatives d'un W^*-espace de probabilités tracial telle que la $*$-distribution de $(z_i)_{i\geq 1}$ est invariante par l'action du groupe dual unitaire.

Alors $(z_i)_{i\geq 1}$ a la même $*$-distribution que $(c_i r)_{i\geq 1}$, où $(c_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables circulaires libres, r est auto-adjoint et $(c_i)_{i\geq 1}$ et r sont $*$-libres entre eux.

Nous obtenons également des versions de ce théorème pour un nombre fini de variables.

1.3 Approximation semi-circulaire – première partie

Correctement renormalisée lorsque la dimension n tend vers l'infini, la première coordonnée d'un vecteur aléatoire $(v_i)_{i=1}^n$ uniformément distribué sur la sphère complexe est asymptotiquement gaussienne. De même, la première coordonnée v_1 d'un vecteur $(v_i)_{i=1}^n$, *unitaire librement uniforme* comme défini par le théorème D dans la section précédente, est asymptotiquement une variable circulaire lorsque la dimension n tend vers l'infini. Dans le premier cas, la convergence est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ pour certaines distances usuelles (voir [DF87] ou encore [Mec06]). Dans le second cas, il est aussi possible d'obtenir une convergence de l'ordre de $\frac{1}{n}$ en utilisant la *méthode de Stein libre*. C'est une version adaptée de la méthode de Stein pour les probabilités libres qui permet d'évaluer à quel point une variable est proche en distribution d'une variable semi-circulaire – ou d'une variable circulaire. Nous présentons dans cette section quelques contributions à cette méthode et nous en donnons une application concernant le théorème du quatrième moment libre.

Méthode de Stein libre [10 ; 14]

La méthode de Stein est un ensemble de technique visant à estimer les distances entre mesures de probabilités. Elle a été inventée par Stein [Ste72] en se basant sur l'intégration par partie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)x \cdot e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \cdot e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

vérifiée par les intégrales gaussiennes et a ensuite été développée dans de nombreuses directions. La version libre qui nous intéresse a été proposée par Fathi et Nelson [FN17], et s'appuie sur l'intégration par partie non-commutative vérifiée par une variable semi-circulaire de loi σ : pour toute fonction polynomiale f,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)x \cdot \mathrm{d}\sigma(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \cdot \mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y).$$

Le rôle de la dérivée est joué ici par le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ car il n'y a qu'une seule variable, mais dans le cas de plusieurs variables, il faut utiliser la notion de dérivée non-commutative. Fathi et Nelson définissent un *noyau de Stein libre* (relativement à la semi-circulaire) d'une variable auto-adjointe a de loi μ_a comme une fonction $A \in L^2(\mu_a \otimes \mu_a)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)x \cdot \mathrm{d}\mu_a(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \cdot \mathrm{d}\mu_a(x)\mathrm{d}\mu_a(y). \tag{1.8}$$

La fonction constante égale à 1 est donc un noyau de Stein libre d'une variable semi-circulaire de loi σ. Une variable auto-adjointe est semi-circulaire si et seulement si elle admet un noyau de Stein libre égal à 1, ce qui motive Fathi et Nelson à introduire la définition suivante pour évaluer la proximité d'une variable a auto-adjointe à une variable semi-circulaire s.

Définition.

Soit a une variable auto-adjointe d'un W^*-espace de probabilités tracial. Sa discrépance de Stein libre *(relativement à une variable semi-circulaire s) est la quantité*

$$\Sigma^*(a|s) := \inf_A \|A-1\|_{L^2(\mu_a\otimes\mu_a)},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des noyaux de Stein libres A de la variable a relativement à la semi-circulaire s.

Nous n'allons pas les définir ici, mais Fathi et Nelson étudient plus généralement des noyaux et discrépances de Stein libres dans le cadre de plusieurs variables, et relativement à une classe de mesures plus grandes : les mesures de Gibbs libres. Les noyaux de Stein libres d'un vecteur $a = (a_1, \ldots, a_k)$ de variables non-commutatives relativement à un vecteur $s = (s_1, \ldots, s_k)$ de variables semi-circulaires libres permettent de manière analogue de définir la discrépance de Stein libre $\Sigma^*(a|s)$ du vecteur a relativement à des variables semi-circulaires libres. Ils obtiennent alors un équivalent libre de l'inégalité HSI de Ledoux, Peccatti et Nourdin [LNP15], qui est une inégalité fonctionnelle raffinant l'inégalité logarithmique de Sobolev. Dans [10], je montre quelques analogues libres d'autres inégalités fonctionnelles de [LNP15], comme l'inégalité WSI libre (raffinement de l'inégalité de Talagrand libre), ou encore l'inégalité WS libre suivante, qui utilise la distance de Kantorovitch W_2 (ou distance de Wasserstein) entre deux variables a et s, donnée par

$$W_2(a, s)^2 \coloneqq \inf_{\pi \in \Pi} \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^2 \, \mathrm{d}\pi(x, y),$$

où Π désigne l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^2$ dont les marginales sont les lois μ_a et μ_s de a et s.

Théorème G. — [10, Prop. 2.7]
Pour toute variable auto-adjointe a d'un W^*-espace de probabilités tracial et toute variable semi-circulaire s, on a

$$W_2(a, s) \leq \Sigma^*(a|s).$$

La version multivariée du théorème G est vraie, à condition d'utiliser la distance de Wasserstein libre définie par Biane et Voiculescu [BV01] pour des vecteurs de variables aléatoires non-commutatives.

Contrairement au cas classique, on peut définir un noyau de Stein libre relativement à une semi-circulaire de manière très générale, sans condition de régularité. Peccati et Speicher ont par exemple remarqué que la fonction $A(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$ est un noyau de Stein libre pour une variable auto-adjointe a appartenant à un W^*-espace de probabilités tracial $(\mathcal{A}, \tau)$ dès lors que $\tau[a] = 0$. Il suffit de remplacer $A(x, y)$ par $\frac{1}{2}(x - y)^2$ dans (1.8) pour s'en convaincre. Avec Fathi et Mai [14], nous donnons une expression explicite d'un noyau de Stein libre dans le cas d'un vecteur $a = (a_1, \ldots, a_k)$ de plus d'une variable non-commutative.

Théorème H. — [14, Th. 1.2]
Soient $a_1, \ldots, a_k$ des variables auto-adjointes d'un W^*-espace de probabilités tracial $(\mathcal{A}, \tau)$. Si $\tau[a_1] = \ldots = \tau[a_k] = 0$, alors il existe un noyau de Stein libre pour $a = (a_1, \ldots, a_k)$ relativement à des variables semi-circulaires libres. En particulier, $\Sigma^*(a|s) < +\infty$.

La formule explicite que nous donnons permet plus généralement de définir des noyaux de Stein libres relativement à n'importe quelle mesure de Gibbs libre. En utilisant le théorème H avec le théorème G, nous obtenons comme corollaire immédiat un taux de convergence en distance de Wasserstein libre pour le théorème central limite libre. Obtenir de telles bornes quantitatives dans le cas classique n'est pas immédiat : puisqu'un noyau de Stein n'existe pas toujours, la discrépance de Stein relativement à la gaussienne n'est pas nécessairement finie.

Avec les mêmes hypothèses, nous donnons dans [14] une deuxième construction d'un noyau de Stein libre via le théorème de représentation de Riesz. Cette construction plus implicite ne donne pas le même noyau de Stein libre que la première construction, montrant ainsi que les noyaux de Stein libres ne sont jamais uniques.

Théorème du quatrième moment libre [10]

Donnons une application du théorème G concernant le théorème du quatrième moment dans les chaos de Wigner.

Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ un W^*-espace de probabilités tracial. Nous allons travailler dans l'espace de Hilbert complexe $L^2(\mathcal{A}, \tau)$ donné par la complétion de $\mathcal{A}$ pour le produit scalaire

$$\langle a, b\rangle_{L^2(\mathcal{A},\tau)} := \tau[a^* b].$$

Soit $\mathcal{S}$ une famille dénombrable de variables semi-circulaires libres dans $(\mathcal{A}, \tau)$. Pour tout entier $n \geq 0$, notons $\mathcal{P}_n$ le *chaos de Wigner d'ordre* n, c'est-à-dire le sous-espace de Hilbert de $L^2(\mathcal{A}, \tau)$ engendré par l'ensemble

$$\{1_{\mathcal{A}}\} \cup \{s_1 \cdots s_k : 1 \leq k \leq n, s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{S}\}$$

de tous les produits de k variables semi-circulaires pour $k \leq n$. On définit le *chaos de Wigner homogène d'ordre* n par

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{P}_n \ominus \mathcal{P}_{n-1} \quad (= \mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_{n-1}^{\perp}).$$

Ce n'est pas immédiat, mais les variables d'un chaos homogène appartiennent à $\mathcal{A}$. Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher [Kem+12] ont montré que la convergence vers une semi-circulaire au sein d'un chaos homogène fixé est équivalente à la convergence du quatrième moment. Plus précisément, si $n \geq 2$, pour toute suite $(a_k)_{k\geq 1}$ appartenant à $\mathcal{H}_n$ et telle que $\tau[a_k^2] = 1$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

— le quatrième moment $\tau[a_k^4]$ converge vers 2 lorsque k tend vers l'infini ;

— la loi de a_k converge vers la loi d'une variable semi-circulaire s lorsque k tend vers l'infini.

De plus, ils fournissent une borne en fonction du quatrième moment dans le cas particulier d'un chaos d'ordre 2 : ils montrent que, si a telle que $\tau[a^2] = 1$ est dans le second chaos homogène $\mathcal{H}_2$, alors

$$d_{\mathcal{C}_2}(a, s) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} \left(\tau[a^4] - 2\right)^{1/2}$$

pour une distance $d_{\mathcal{C}_2}$ ad hoc plus faible que la distance de Wasserstein W_2. Obtenir une borne similaire pour des chaos d'ordres arbitraires, comme dans le cadre commutatif [NP05 ; NP09], est une question qui a été d'abord étudiée par Bourguin et Campese [BC17]. Ils montrent que

$$d_{\mathcal{C}_2}(a, s) \leq \sqrt{C_n} \left(\tau[a^4] - 2\right)^{1/2}$$

pour les variables a telles que $\tau[a^2] = 1$ d'un chaos $\mathcal{H}_n$ (avec $n \geq 2$) qui sont *totalement symétriques*, et pour une constante C_n qui croit linéairement en n. Cette hypothèse de symétrie totale qui ne sera pas définie ici permet de s'affranchir en partie de la non-commutativité, et leur preuve n'est pas adaptable au cas général. Le résultat suivant traite le cas général, et remplace la distance $d_{\mathcal{C}_2}$ par la distance de Wasserstein W_2 qui est plus forte.

Théorème I. — [10, Th. 3.16]
Soit $n \geq 2$. Pour toute variable a appartenant au chaos de Wigner homogène d'ordre n et telle que $\tau[a^2] = 1$, on a

$$W_2(a, s) \leq n^{3/4} \left(\tau[a^4] - 2\right)^{1/4}.$$

De plus, si a est totalement symétrique, on a

$$W_2(a, s) \leq n^{1/2} \left(\tau[a^4] - 2\right)^{1/2}.$$

La preuve consiste à montrer l'inégalité

$$\Sigma^*(a|s) \leq n^{3/4} \left(\tau[a^4] - 2\right)^{1/4}$$

en exhibant un bon noyau de Stein libre pour a à l'aide du calcul de Malliavin libre développé par Biane et Speicher [BS98], puis le théorème G permet de conclure. Le théorème I a été étendu aux convergences de vecteurs multidimensionnels par Diez [Die22].

Chapitre 2

Matrices aléatoires

2.1 Libertés asymptotiques

Quelques années après avoir inventé la théorie des probabilités libres, Voiculescu établit un lien profond entre cette théorie et celle des matrices aléatoires [Voi91]. Plus précisément, la relation de liberté de Voiculescu apparaît asymptotiquement pour des matrices aléatoires dont la dimension tend vers l'infini. Cette *liberté asymptotique* permet l'analyse en grande dimension de matrices dont la base des vecteurs propres est asymptotiquement isotrope – sans direction privilégiée [AGZ10 ; MS17]. Réciproquement, les probabilités libres ont permis de tirer partie du comportement de matrices aléatoires en grande dimension pour montrer de nouveaux résultats en algèbre d'opérateurs [Voi96 ; Ge98].

Pour tout $N \geq 1$, l'algèbre $M_N(\mathbb{C})$ des matrices de taille $N \times N$ munie de la trace normalisée

$$\mathrm{tr}_N : (a_{ij})_{i,j=1}^N \mapsto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{ii}$$

est un espace de probabilités non-commutatif $(M_N(\mathbb{C}), \mathrm{tr}_N)$. Une matrice déterministe $A_N \in M_N(\mathbb{C})$ peut donc être considérée comme une variable aléatoire non-commutative. On peut alors définir la loi μ_{A_N} d'une matrice hermitienne $A_N = A_N^*$ par rapport à tr_N grâce à l'équation (1.1). Elle correspond à sa *mesure empirique spectrale*, c'est-à-dire la mesure de probabilités sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\mu_{A_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i},$$

où $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A_N comptées avec leur ordre de multiplicité. En fin de compte, pour une matrice hermitienne A_N, le calcul de sa distribution

$$\mathbb{C}[x] \ni P \mapsto \mathrm{tr}_N[P(A_N)] \in \mathbb{C}$$

est complètement équivalent au calcul de son spectre.

Considérons deux suites $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) de matrices déterministes hermitiennes. Pour découpler les vecteurs propres de A_N de ceux de B_N, nous allons effectuer au hasard un changement de base orthonormale sur la matrice A_N. Soit $U_N \in M_N(\mathbb{C})$ une matrice unitaire aléatoire uniforme, c'est-à-dire dont la loi est la mesure de Haar sur le groupe unitaire. Le spectre de la matrice $U_N A_N U_N^*$ est le même que celui de A_N, mais ses vecteurs propres sont maintenant aléatoires et uniformément distribués. La liberté asymptotique de Voiculescu nous dit que les variables non-commutatives $U_N A_N U_N^*$ et B_N se comportent comme des variables libres dans le régime de la grande dimension.

Liberté asymptotique de Voiculescu.

Soient $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ *(avec* $N \geq 1$*) deux suites de matrices hermitiennes telles que :*

— *pour tout* $P \in \mathbb{C}\langle x\rangle$*,* $\mathrm{tr}_N[P(A_N)]$ *converge lorsque* N *tend vers l'infini ;*

— *pour tout* $Q \in \mathbb{C}\langle y\rangle$*,* $\mathrm{tr}_N[Q(B_N)]$ *converge lorsque* N *tend vers l'infini.*

Soit $U_N \in M_N(\mathbb{C})$ *(avec* $N \geq 1$*) une suite de matrices unitaires aléatoires uniformes. Alors*

— *pour tout* $P \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$*, on a presque sûrement la convergence*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{tr}_N[P(U_N A_N U_N^*, B_N)] =: \tau[P] \ ;$$

— *de plus,* $\mathbb{C}\langle x\rangle$ *et* $\mathbb{C}\langle y\rangle$ *sont* libres *pour la distribution limite* τ*.*

Un corollaire important de la liberté asymptotique est la description (asymptotique) du spectre de n'importe quel polynôme en $U_N A_N U_N^*$ et B_N en fonction du spectre de A_N et du spectre de B_N grâce à la théorie de probabilités libres.

Pour de nombreux modèles de matrices aléatoires, la convergence moyenne de la trace normalisée est aussi rapide que $O(N^{-2})$ quand N tend vers l'infini. En particulier, cela signifie que les matrices qui sont asymptotiquement libres au sens de Voiculescu sont en fait libres à un terme d'erreur près de l'ordre de N^{-2}, donnant lieu à une occurrence de la *liberté infinitésimale* de Belinschi et Shlyakhtenko [BS12], ou de manière équivalente à la *liberté de type B* de Biane, Goodman et Nica [BGN03]. Par exemple, le résultat pionnier de Thorbjornsen [Tho00], qui montre que la convergence de la distribution moyenne de matrices indépendantes du GUE (ensemble gaussien unitaire) est en $O(N^{-2})$, peut être formulé comme une liberté infinitésimale asymptotique. Les définitions de liberté infinitésimale et de liberté de type B ne sont pas énoncées ici, mais mentionnons que la liberté infinitésimale a été montrée pour des distributions moyennes asymptotiques dans plusieurs situations variées [CS11 ; Shl18 ; DF19 ; Au21]. Pour la distribution moyenne des deux matrices A_N et $U_N B_N U_N^*$ considérées précédemment, la liberté infinitésimale est une conséquence de la théorie générale des *probabilités libres de surfaces* par Borot, Charbonnier, Garcia-Failde, Leid et Shadrin [Bor+21] – c'est en fait le cas particulier de la $(\frac{1}{2}, 1)$-liberté [Bor+21, Theorem 4.28].

Quelle est la conséquence de la liberté infinitésimale pour le spectre de matrices aléatoires ? Shlyakthenko donne une belle interprétation de la liberté infinitésimale pour l'étude de modèles matriciels de perturbations par des matrices de rangs finis [Shl18]. Elle soulève la question précise suivante [CHS18, Problem 4.6] : est-il possible, à partir de cette liberté infinitésimale asymptotique, de retrouver rigoureusement le célèbre phénomène de transition de phase BBP pour les valeurs propres isolées, découvert par Baik, Ben Arous et Péché [BBP05 ; Péc06] ? Plus généralement, est-il possible de retrouver les résultats de Benaych-Georges and Nadakuditi [BN11 ; BN12] et de Belinschi, Bercovici, Capitaine et Février [Bel+17] concernant les valeurs propres au comportement atypique de modèles matriciels de perturbations ?

La prochaine section donne une réponse positive à cette question en s'appuyant sur notre travail [12] joint avec Dahlqvist et Gabriel. Les travaux évoqués jusqu'à présent montrent la liberté infinitésimale pour la distribution *moyenne* des matrices, alors qu'il nous faut en utiliser une version *presque sûre* pour pouvoir l'appliquer réalisation par réalisation. Ce sont Collins, Hasebe et Sakuma [CHS18, Corollary 4.5] qui ont montré la première version presque sûre de la liberté infinitésimale asymptotique lorsqu'interviennent des matrices de rang fini. En utilisant des estimations de concentration classiques, nous généralisons ce résultat [12, Théorème 3.5] et obtenons presque sûrement de la liberté de type B sur certains idéaux en grande dimension dans le cas général de matrices conjuguées uniformément, comme $U_N A_N U_N^*$. Cela ouvre la porte à l'utilisation de la liberté infinitésimale pour montrer des résultats presque sûrs, via la *liberté conditionnelle*, comme nous allons maintenant le voir.

Liberté conditionnelle [12]

L'utilisation de la liberté infinitésimale ou de la liberté asymptotique de type B pour l'étude des valeurs propres isolées passe par un lien inédit avec la *liberté conditionnelle* de Bożejko, Leinert et Speicher. En situation de variables libres d'un espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$, la forme linéaire τ est distributive sur un produit alterné d'éléments centrés par rapport à τ, puisqu'elle s'annule. La liberté conditionnelle, par rapport à un couple de forme linéaire (τ, φ), est la distributivité d'une autre forme linéaire φ sur les produits alternés d'éléments centrés par rapport à τ. Cette indépendance non-commutative a été introduite par Bożejko, Leinert et Speicher [BLS96] dans un contexte d'algèbre d'opérateurs a priori sans lien avec les matrices aléatoires.

Définition.
Un espace de probabilités non-commutatif conditionnel $(\mathcal{A}, \tau, \varphi)$ *est une algèbre unitaire* $\mathcal{A}$ *munie de deux formes linéaires* $\tau, \varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *telles que* $\tau[1_{\mathcal{A}}] = 1$ *et* $\varphi[1_{\mathcal{A}}] = 1$.

Soient $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_1$ *deux sous-algèbres d'un espace de probabilités non-commutatif conditionnel* $(\mathcal{A}, \tau, \varphi)$. *Les algèbres* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *sont dites* conditionnellement libres *si, pour tous* $a_1, \ldots, a_n$ *(*$n \geq 1$*) pris alternativement dans* $\mathcal{A}_1$ *ou* $\mathcal{A}_2$ *et tels que* $\tau[a_1] = \ldots = \tau[a_n] = 0$, *on a*

$$\begin{aligned} \tau(a_1 \cdots a_n) &= 0, \\ \textit{et} \quad \varphi(a_1 \cdots a_n) &= \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n). \end{aligned}$$

Nous montrons que la liberté de type B se réduit à de la liberté conditionnelle dans un espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$ en définissant à partir de τ un état vectoriel φ associé à une projection [12, Proposition 2.12]. Cette nouvelle relation complète le diagramme suivant liant quatre indépendances non-commutatives dans un espace de probabilités non-commutatif : l'*indépendance conditionnelle* et l'*indépendance de type B* déjà évoquées, l'*indépendance monotone cyclique* de Collins, Hasebe et Sakuma [CHS18] et l'*indépendance monotone* de Muraki [Mur01]. Les flèches horizontales représentent des implications lorsqu'on restreint les fonctionnelles à des idéaux où τ est trivial. Les flèches verticales représentent des implications lorsqu'on s'intéresse à la distribution par rapport à un état vectoriel φ associé à une projection.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Liberté de type } B} \arrow[r, Rightarrow, "\text{[CHS18, Proposition 3.10]}"] \arrow[d, Rightarrow, "\text{[12, Proposition 2.12]}"'] & \boxed{\text{Indépendance monotone cyclique}} \arrow[d, Rightarrow, "\text{[12, Proposition 2.16]}"] \\ \boxed{\text{Liberté conditionnelle}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{[Fra06, Proposition 3.1]}"'] & \boxed{\text{Indépendance monotone}} \end{tikzcd}$$

Figure 2.1 – Liens entre quelques indépendances non-commutatives.

Comme la liberté conditionnelle de type B apparaît asymptotiquement pour des matrices conjuguées uniformément comme $U_N A_N U_N^*$, le diagramme ci-dessus permet de produire différentes indépendances asymptotiques pour les matrices aléatoires (en espérance mais aussi presque sûrement). En particulier, nous montrons l'indépendance conditionnelle asymptotique suivante, qui est une extension de la liberté asymptotique de Voiculescu lorsqu'on considère la trace normalisée tr_N et, en outre, un état vectoriel $\langle \cdot v_N, v_N \rangle$.

Théorème J. — [12, Theorem 1.2]
Soient $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) deux suites de matrices hermitiennes et $(v_N)_{N\geq 1}$ une suite de vecteur unitaire de $\mathbb{C}^N$ telles que :

— *pour tout $P \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, $\mathrm{tr}_N[P(A_N)]$ converge lorsque N tend vers l'infini ;*

— *pour tout $Q \in \mathbb{C}\langle y\rangle$, $\mathrm{tr}_N[Q(B_N)]$ et $\langle Q(B_N)v_N, v_N\rangle$ convergent lorsque N tend vers l'infini.*

Soit $U_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) une suite de matrices unitaires aléatoires uniformes. Alors

— *pour tout $P \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$, on a presque sûrement les convergences*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{tr}_N \left[P(U_N A_N U_N^*, B_N)\right] =: \tau[P] \ ,$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle P(U_N A_N U_N^*, B_N)v_N, v_N \right\rangle =: \varphi[P] \ ;$$

— *de plus, $\mathbb{C}\langle x\rangle$ et $\mathbb{C}\langle y\rangle$ sont* conditionnellement libres *pour les distributions limites (τ, φ).*

Au niveau du spectre des matrices, cela donne accès à des informations sur les vecteurs propres et les valeurs propres que le comportement de la mesure empirique spectrale ne permet pas de détecter. En effet, la loi d'une matrice hermitienne $A_N = A_N^* \in M_N(\mathbb{C})$ par rapport à un état vectoriel $\langle \cdot v_N, v_N\rangle$ est la mesure de probabilités $\mu_{A_N}^{v_N}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\mu_{A_N}^{v_N} = \sum_{i=1}^{N} |\langle v_N, u_i\rangle|^2 \cdot \delta_{\lambda_i}.$$

où $u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{C}^N$ est une base orthonormale de vecteurs propres de A_N associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ de A_N.

Prenons le cas particulier de la somme de $U_N A_N U_N^*$ et B_N. La liberté asymptotique de Voiculescu permet de comprendre le comportement *macroscopique* du spectre de $U_N A_N U_N^* + B_N$, en identifiant la limite de la mesure empirique spectrale $\mu_{U_N A_N U_N^* + B_N}$ comme étant une *convolution libre*. Cependant, l'asymptotique de $\mu_{U_N A_N U_N^* + B_N}$ ne permet pas de détecter le comportement individuel des valeurs propres de $U_N A_N U_N^* + B_N$. Suivant une idée de Noiry [Noi21], la mesure $\mu_{U_N A_N U_N^* + B_N}^{v_N}$ donne accès à cette description locale qu'on pourrait qualifier de *microscopique*, à condition de bien choisir v_N. Or, le théorème J permet justement d'identifier la limite des densités locales d'états $\mu_{U_N A_N U_N^* + B_N}^{v_N}$ comme étant des *convolutions libres conditionnelles*. Nous en déduisons une nouvelle preuve conceptuelle [12], complètement basée sur du calcul de moments, des résultats concernant le comportement atypique des valeurs propres de déformation de modèles unitairement invariant, concrétisant ainsi la suggestion de Shlyakthenko [Shl18]. Le corollaire suivant énonce le résultat de Benaych-Georges et Nadakuditi [BN11], mais nous retrouvons aussi la transition de phase BBP [BBP05 ; Péc06] et plus généralement les résultats de Belinschi, Bercovici, Capitaine et Février [Bel+17] pour des déformations de rangs quelconques (voir [CD18] pour une synthèse de ces phénomènes de valeurs propres atypiques).

Corollaire.
Soient $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) deux suites de matrices hermitiennes, $(v_N)_{N\geq 1}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathbb{C}^N$ et $\theta \in \mathbb{R}^*$ une constante telles que :

— *μ_{A_N} converge en moment vers une mesure μ à support compact lorsque N tend vers l'infini ;*

— *B_N est la matrice $\theta \cdot v_N v_N^*$ de rang 1.*

Soit $U_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) une suite de matrices unitaires aléatoires uniformes. Alors

— *$\mu_{U_N A_N U_N^* + B_N}$ converge en moment vers μ lorsque N tend vers l'infini ;*

— *pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ en dehors du support de μ et tel que $\int_{\mathbb{R}} (\rho - x)^{-1} \, \mathrm{d}\mu(x) = \theta^{-1}$, il existe une suite de valeurs propres $(\rho_N)_{N\geq 1}$ de $U_N A_N U_N^* + B_N$ qui a presque sûrement le comportement atypique suivant*

$$\lim_{N\to\infty} \rho_N = \rho.$$

Liberté conditionnelle cyclique [15]

Une propriété intéressante de la liberté conditionnelle est la suivante : d'autres indépendances non-commutatives peuvent être exprimées comme cas particuliers de la liberté conditionnelle dans certaines configurations particulières. Ainsi en est-il de l'*indépendance monotone* de Muraki déjà rencontrée, mais aussi de l'*indépendance booléenne* [Wal73 ; Boż86 ; Sch95 ; SW97]. Sans énoncer leurs définitions, nous pouvons résumer leurs liens comme ceci.

Supposons que $\mathbb{C}\langle x\rangle$ et $\mathbb{C}\langle y\rangle$ soient conditionnellement libres dans l'espace de probabilités non-commutatif conditionnel $(\mathbb{C}\langle x,y\rangle,\tau,\varphi)$. Notons $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les sous-algèbres de $\mathbb{C}\langle x\rangle$ et $\mathbb{C}\langle y\rangle$ composées des polynômes sans constantes. Alors,

— $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont booléens indépendants pour φ dès que τ s'annule sur $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

— $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont monotones indépendants pour φ dès que τ s'annule sur $\mathcal{A}_1$ et vaut φ sur $\mathcal{A}_2$.

Comme la liberté conditionnelle de $\mathbb{C}\langle x\rangle$ et $\mathbb{C}\langle y\rangle$ est une conclusion du théorème J, il est tentant d'en déduire l'indépendance booléenne ou l'indépendance monotone pour des matrices aléatoires dans un régime de grande dimension. Ce n'est pourtant pas possible car le modèle n'offre pas toute la latitude voulue pour le choix de τ et φ. Si les distributions de B_N par rapport à tr_N et $\langle \cdot v_N, v_N\rangle$ peuvent être très différentes, les distributions de $U_NA_NU_N^*$ par rapport à tr_N et $\langle \cdot v_N, v_N\rangle$ sont indistinguables asymptotiquement. Par conséquent, τ et φ coïncident sur $\mathcal{A}_2$. Le théorème J peut donc fournir des situations d'indépendance monotone asymptotique – il suffit que la majorité des valeurs propres de B_N convergent vers 0 – mais certainement pas des situations non-triviales d'indépendance booléenne asymptotique.

Cette limitation nous a conduit avec Gilliers [15] à définir le modèle plus souple suivant. Considérons deux suites $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N\geq 1$) de matrices déterministes hermitiennes, et une suite $v_N\in\mathbb{C}^N$ (avec $N\geq 1$) de vecteurs unitaires. Nous allons effectuer un changement de base aléatoire $A_N\mapsto U_NA_NU_N^*$ de telle sorte que la distribution de $U_NA_NU_N^*$ par rapport à $\langle \cdot v_N, v_N\rangle$ soit celle de A_N. Pour cela, il suffit de prendre $U_N\in M_N(\mathbb{C})$ une matrice unitaire *laissant invariant le vecteur* v_N. L'ensemble des matrices unitaires laissant invariant v_N est un groupe muni d'une mesure de Haar : une *matrice unitaire aléatoire uniforme conditionnée à laisser invariant le vecteur* v_N est une matrice aléatoire distribuée selon cette mesure de Haar. Les conclusions du théorème J restent valables pour $U_NA_NU_N^*$ et B_N, mais nous obtenons des distributions limites (τ,φ) complètement arbitraires. Nous appelons ce modèle le *modèle du vortex* car tout l'espace est en rotation autour de l'axe dirigé par v_N.

Théorème K. — [15, Theorem 4.1.3]
Soient $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N\geq 1$) deux suites de matrices hermitiennes uniformément bornées en norme d'opérateur et $(v_N)_{N\geq 1}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathbb{C}^N$ telles que :

— *pour tout $P\in\mathbb{C}\langle x\rangle$, $\mathrm{tr}_N[P(A_N)]$ et $\langle P(A_N)v_N, v_N\rangle$ convergent lorsque N tend vers l'infini ;*

— *pour tout $Q\in\mathbb{C}\langle y\rangle$, $\mathrm{tr}_N[Q(B_N)]$ et $\langle Q(B_N)v_N, v_N\rangle$ convergent lorsque N tend vers l'infini.*

Soit $U_N\in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N\geq 1$) une suite de matrices unitaires aléatoires uniformes conditionnées à laisser invariant le vecteur v_N. Alors

— *pour tout $P\in\mathbb{C}\langle x,y\rangle$, on a presque sûrement les convergences*

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{tr}_N\left[P(U_NA_NU_N^*,B_N)\right] =: \tau[P] \ ,$$
$$\lim_{N\to\infty}\left\langle P(U_NA_NU_N^*,B_N)v_N, v_N\right\rangle =: \varphi[P] \ ;$$

— *de plus, $\mathbb{C}\langle x\rangle$ et $\mathbb{C}\langle y\rangle$ sont* conditionnellement libres *pour les distributions limites (τ,φ).*

En particulier, si la vaste majorité des valeurs propres de A_N et B_N convergent vers 0, τ s'annule sur $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ et les matrices $U_N A_N U_N^*$ et B_N sont asymptotiquement booléen indépendants par rapport à l'état vectoriel $\langle \cdot v_N, v_N \rangle$. Selon l'asymptotique de tr_N, le modèle du vortex permet donc de faire émerger asymptotiquement la liberté de Voiculescu, l'indépendance booléenne ou l'indépendance monotone pour l'état vectoriel $\langle \cdot v_N, v_N \rangle$.

Un deuxième intérêt du modèle du vortex est la découverte d'une nouvelle indépendance pour la trace tr_N à l'ordre suivant. Dans le modèle classique du théorème J, le terme infinitésimal du développement de la trace fait apparaître naturellement l'*indépendance infinitésimale*, mais aussi l'*indépendance monotone cyclique* (lorsqu'interviennent des matrices de rang fini). Pour décrire ce terme infinitésimal dans le modèle du vortex, nous sommes amenés à définir l'*indépendance conditionnelle cyclique* suivante.

Définition.

Soit $(\mathcal{A}, \tau, \varphi)$ *un espace de probabilités non-commutatif conditionnel et* $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *une forme linéaire traciale, c'est-à-dire que* $\omega(ab) = \omega(ba)$ *pour tous* $a, b \in \mathcal{A}$*. Deux sous-algèbres* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *de* $\mathcal{A}$ *sont dites* cycliquement conditionnellement libres *pour* (τ, φ, ω) *si :*

— $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_1$ *sont conditionnellement libres dans* $(\mathcal{A}, \tau, \varphi)$ *;*

— *pour tous* $a_1, \ldots, a_n$ *(avec* n *un entier pair) pris alternativement dans* $\mathcal{A}_1$ *ou* $\mathcal{A}_2$ *et tels que* $\tau[a_1] = \ldots = \tau[a_n] = 0$*, on a*

$$\omega(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n).$$

En général, $\omega \neq \varphi$ car bien que $\omega(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n) = \varphi(a_1 \cdots a_n)$ lorsque n est pair, on a $\omega(a_1 \cdots a_n) \neq \varphi(a_1 \cdots a_n)$ lorsque n est impair. La valeur de $\omega(a_1 \cdots a_n)$ lorsque n est impair peut être calculée en utilisant la tracialité de ω, et la règle précédente pour n pair.

La liberté conditionnelle cyclique est donc une extension de la liberté conditionnelle. Comme avec la liberté conditionnelle, nous retrouvons pour certaines valeurs particulières de τ quelques autres indépendances non-commutatives : l'*indépendance monotone cyclique* de Collins, Hasebe et Sakuma [CHS18], l'*indépendance booléenne cyclique* d'Arizmendi, Hasebe et Lehner [AHL22] et la *liberté infinitésimale* de Belinschi et Shlyakhtenko [BS12]. Nous résumons ces inclusions d'indépendances dans le diagramme suivant. Chaque indépendance au départ d'une flèche est une généralisation de l'indépendance à l'arrivée de la même flèche.

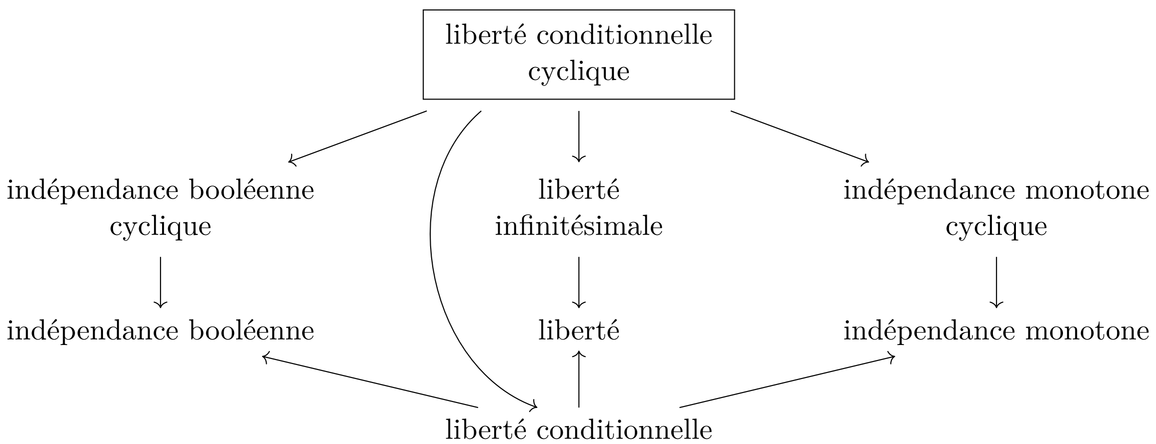


Figure 2.2 – Quelques autres liens entre indépendances non-commutatives.

Pour le modèle du vortex, l'indépendance conditionnelle cyclique permet de décrire la convergence moyenne de tr_N à l'ordre suivant.

Théorème L. — [15, Theorem 4.2.1]
Soient $(A_N)_{N\geq 1}$, $(B_N)_{N\geq 1}$, $(v_N)_{N\geq 1}$, $(U_N)_{N\geq 1}$, $\tau : \mathbb{C}\langle x, y\rangle \to \mathbb{C}$ *et* $\varphi : \mathbb{C}\langle x, y\rangle \to \mathbb{C}$ *comme considérés dans le théorème K. Supposons de plus l'existence de* $\omega : \mathbb{C}\langle x\rangle \cup \mathbb{C}\langle y\rangle \to \mathbb{C}$ *tel que :*

— *pour tout* $P \in \mathbb{C}\langle x\rangle$,

$$\mathrm{tr}_N \left[P(A_N)\right] = \tau[P] + \frac{1}{N}\omega[P] + o\left(\frac{1}{N}\right) \;;$$

— *pour tout* $Q \in \mathbb{C}\langle y\rangle$,

$$\mathrm{tr}_N \left[Q(B_N)\right] = \tau[Q] + \frac{1}{N}\omega[Q] + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Alors la définition de ω *peut être étendue à* $\mathbb{C}\langle x, y\rangle$ *de telle sorte que*

— *pour tout* $P \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}_N \left[P(U_N A_N U_N^*, B_N)\right]\right] = \tau[P] + \frac{1}{N}\omega[P] + o\left(\frac{1}{N}\right) \;;$$

— *de plus,* $\mathbb{C}\langle x\rangle$ *et* $\mathbb{C}\langle y\rangle$ *sont* cycliquement conditionnellement libres *pour les distributions limites* (τ, φ, ω).

La convergence doit être prise au niveau de l'espérance car nous montrons également qu'il reste un aléa asymptotiquement gaussien de l'ordre de $\frac{1}{N}$ qui empêche d'établir une limite presque sûre [15, Proposition 4.3.1].

2.2 Espaces de trafics

Une approche alternative pour développer la théorie des probabilités libres au-delà de son champ d'application habituel est la théorie des *espaces de trafics*. Cette théorie a été constituée par Male [Mal20] comme une extension de la théorie des probabilités libres. La motivation initiale est d'obtenir une version de la liberté asymptotique de Voiculescu pour des matrices soumises à une invariance beaucoup plus faible que précédemment : l'invariance par permutation. Donnons un rapide aperçu des quantités étudiées dans la théorie des espaces de trafics.

La distribution d'une matrice $A_N = (a_{i,j})_{i,j=1}^N$ par rapport à tr_N est donnée par la trace des moments, c'est-à-dire pour $k \geq 1$, par

$$\mathrm{tr}_N[A_N^k] = \frac{1}{N} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1}.$$

Dans la théorie des espaces de trafics, on considère des sommes plus générales de la forme

$$\frac{1}{N} \sum_{i:V \to \{1,\ldots,N\}} a_{i(v_1)i(w_1)} \cdots a_{i(v_k)i(w_k)},$$

où $(v_1, w_1), \ldots, (v_k, w_k)$ sont les arêtes d'un graphe $G = (V, E)$. Pour considérer plusieurs matrices à la fois, il suffit d'étiqueter les arêtes du graphe. Ainsi, un *graphe-test* T en les variables indéterminées x et y est un triplet $T = (V, E, \gamma)$ où (V, E) est un graphe fini connexe et orienté, muni d'un étiquetage $\gamma : E \to \{x, y\}$ des arêtes. L'ensemble des graphes-test en les variables indéterminées x et y est noté $\mathcal{T}\langle x, y\rangle$, avec ses sous-ensembles $\mathcal{T}\langle x\rangle$ et $\mathcal{T}\langle y\rangle$ qui contiennent les graphes-test étiquetés respectivement par la variable x ou la variable y.

Définition.
Soient $A_N = (a_{i,j})_{i,j=1}^N$ et $B_N = (b_{i,j})_{i,j=1}^N$ deux matrices de $M_N(\mathbb{C})$.
La distribution de trafics *de (A_N, B_N) est la donnée, pour tout $T = (V, E, \gamma) \in \mathcal{T}\langle x, y\rangle$, des quantités*

$$\tau_N[T(A_N, B_N)] := \frac{1}{N} \sum_{i:V \to \{1,\ldots,N\}} \prod_{\substack{e=(v,w)\in E \\ \gamma(e)=x}} a_{i(v)i(w)} \cdot \prod_{\substack{e=(v,w)\in E \\ \gamma(e)=y}} b_{i(v)i(w)}.$$

Voici deux exemples dans la figure suivante.

$$\tau_N[T_1(A_N, B_N)] = \mathrm{tr}_N[A_N B_N A_N^t B_N], \qquad \tau_N[T_2(A_N, B_N)] = \mathrm{tr}_N[A_N (B_N \circ A_N) A_N^t B_N].$$

Figure 2.3 – La distribution de trafics de (A_N, B_N) pour deux graphes-test $T_1, T_2 \in \mathcal{T}\langle x, y\rangle$.

Cette définition peut naturellement être étendue pour une famille d'un nombre arbitraire de matrices, et permet de considérer non seulement la trace de polynômes en les matrices, mais aussi la trace d'opérations plus générales, comme les produits de Hadamard $A_N \circ B_N$ de matrices, la transposée de matrices, ou encore d'autres opérations non-usuelles. De telles sommes apparaissent naturellement en théorie des matrices aléatoires (voir [BS10, Appendix A.4] ou [MS12]). Une des motivations pour considérer la distribution de trafics est le calcul asymptotique, pour $P \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$, de la limite de

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}_N\left[P(S_N A_N S_N^*, B_N)\right]\right]$$

lorsque $S_N \in M_N(\mathbb{C})$ est une matrice de *permutation*, c'est-à-dire une matrice unitaire qui agit sur les vecteurs de la base canonique en les permutant. Plus précisément, S_N est une matrice de permutation s'il existe une permutation σ de $\{1, \dots, N\}$ telle que $S_N = (\mathbf{1}_{i=\sigma(j)})_{i,j=1}^N$. La loi d'une matrice de permutation aléatoire uniforme $S_N \in M_N(\mathbb{C})$ est alors la mesure uniforme sur l'ensemble fini de taille $N!$ des matrices de permutations. La liberté asymptotique de Voiculescu n'est pas toujours valable dans ce contexte, et pourtant, Male montre qu'il est possible de calculer la distribution limite de $S_N A_N S_N^*$ et B_N à condition de considérer les distributions de trafics des matrices. Le parallèle avec la liberté asymptotique de Voiculescu présentée page 20 est saisissant, avec une nouvelle relation qui joue le rôle de la liberté : l'*indépendance de trafics* [Mal20].

Indépendance de trafics asymptotique de Male.
Soient $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) deux suites de matrices telle que :

- *pour tout $T \in \mathcal{T}\langle x\rangle$, $\tau_N[T(A_N)]$ converge lorsque N tend vers l'infini ;*
- *pour tout $T \in \mathcal{T}\langle y\rangle$, $\tau_N[T(B_N)]$ converge lorsque N tend vers l'infini.*

Soit $S_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) des matrices de permutations aléatoires uniformes. Alors

- *pour tout $T \in \mathcal{T}\langle x, y\rangle$, on a la convergence*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\tau_N\left[T(S_N A_N S_N^*, B_N)\right]\right] =: \tau[T] \ ;$$

- *la distribution de trafic $\tau : \mathcal{T}\langle x, y\rangle \to \mathbb{C}$ à la limite est entièrement déterminée par sa restriction sur $\mathcal{T}\langle x\rangle \cup \mathcal{T}\langle y\rangle$ grâce à une relation appelée* indépendance de trafics*.*

En particulier, on obtient la convergence de

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}_N\left[P(S_N A_N S_N^*, B_N)\right]\right]$$

pour $P \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$ lorsque N tend vers l'infini. Un résultat similaire à l'indépendance de trafics asymptotique de Male [Mal20] est également prouvé indépendamment par Gabriel [Gab15c]. Dans le cas particulier de l'invariance par le groupe symétrique, le cadre développé par Gabriel [Gab15b ; Gab15c ; Gab15a] est équivalent au cadre des trafics, mais Gabriel développe aussi des aspects qui ne sont pas encore pris en compte pour les trafics, tels que la notion centrale de cumulants.

Au-delà de ce résultat d'indépendance asymptotique, la théorie des espaces de trafics est utile pour l'étude de matrices aléatoires dont la loi est invariante par permutation des vecteurs de la base canonique [MP14 ; Mal17 ; Mal+22 ; Mal21], mais peut également être utilisée pour des modèles plus généraux, comme des invariances par permutations partielles [Cha+23], des matrices à profil de variances [BM21], ou des matrices à bandes [Au21].

Distribution de trafics de matrices unitairement invariantes [13]

Pour les matrices, nous avons vu que la notion de distribution de trafics permet d'étendre la notion de distribution par rapport à tr_N, afin de considérer des traces d'opérations plus diverses que le calcul polynomial. Ces opérations variées reflètent l'action sur $M_N(\mathbb{C})$ d'une opérade indexée par les graphes, ce qui confère à $M_N(\mathbb{C})$ la structure d'*espace de trafics algébrique*. Nous n'allons pas détailler le cadre opéradique utilisé pour définir la notion d'espace de trafics algébrique. Mentionnons seulement que les espaces de trafics algébriques [Mal20] sont des algèbres $\mathcal{B}$ sur une certaine opérade indexée par des graphes, et munies d'une notion compatible de distributions de trafics τ.

Afin de pouvoir développer la théorie des espaces de trafics du point de vue des algèbres d'opérateurs, nous avons avec Male et Dahlqvist [13] introduit une notion naturelle de positivité pour les espaces de trafics munis d'une involution $*$. La structure finale retenue [13, Definition 3.7] pour un *espace de trafics* est donc celle d'un espace de trafics algébrique $(\mathcal{B}, \tau)$ muni d'une involution $*$ et pour lequel la distribution de trafics est positive. Par des arguments de combinatoire sur les graphes, nous montrons qu'il est possible de définir le produit libre d'espaces de trafics, ce qui permet de considérer des suites de variables qui sont indépendantes au sens des trafics.

Théorème M. — [13, Theorem 1.2]
Le produit libre d'espaces de trafics algébrique préserve la positivité. En conséquence, le produit libre d'espaces de trafics est bien défini comme espace de trafic.

La plupart des exemples d'espaces de trafics viennent de la limite en grande dimension de matrices aléatoires : matrices unitaires aléatoires uniformes, matrices de permutation aléatoires uniformes, matrices de Wigner [Mal20], graphes réguliers uniformes [MP14]. Dans le cas de matrices de la forme $U_N A_N U_N^*$, avec U_N une matrice unitaire aléatoire uniforme, la distribution de trafics peut être évaluée grâce au calcul de Weingarten, une méthode en grande partie développée par Collins [Col03 ; CŚ06] pour calculer les moments joints des entrées de U_N. Nous en déduisons le résultat suivant, qui induit la convergence en distribution de trafics de modèles de matrices aléatoires unitairement invariantes à partir de la convergence de la $*$-distribution. Cela donne de nouveaux exemples d'espaces de trafics, car il existe de nombreux ensembles de matrices aléatoires unitairement invariants connus pour converger en $*$-distribution, mais qui n'avaient pas encore été étudiés du point de vue des espaces de trafics.

Théorème N. — [13, Theorem 1.1]
Soit $A_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) une suite de matrices hermitiennes telles que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, $\mathrm{tr}_N[P(A_N)]$ converge lorsque N tend vers l'infini. Soit $U_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) une suite de matrices unitaires aléatoires uniformes.

Alors $(U_N A_N U_N^*)_{N\geq 1}$ converge en distribution de trafics lorsque N tend vers l'infini au sens suivant : pour tout $T \in \mathcal{T}\langle x\rangle$, on a la convergence

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\tau_N[T(U_N A_N U_N^*)]\Big] =: \tau[T].$$

La distribution de trafics $\tau : \mathcal{T}\langle x\rangle \to \mathbb{C}$ à la limite est entièrement déterminée par la distribution limite $P \mapsto \lim_{N\to\infty} \mathrm{tr}_N[P(A_N)]$ de A_N. Plus généralement, le résultat du théorème N reste vrai pour une famille d'un nombre arbitraire de matrices qui possèdent une $*$-distribution jointe limite, et nous avons une formule explicite pour exprimer la distribution de trafics à partir de la $*$-distribution à la limite. Cette formule peut en fait être appliquée à n'importe quel espace de probabilités non-commutatif : partant d'un $*$-espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \varphi)$ quelconque, on peut calculer une distribution de trafics et ainsi définir un espace de trafics algébrique.

Cette construction fournit un objet universel, appelé *espace de trafics enveloppant* $(\mathcal{G}(\mathcal{A}), \tau_\varphi)$, qui permet de faire appel au cadre des espaces de trafics pour l'étude de n'importe quel $*$-espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \varphi)$. Le théorème N peut alors être exprimé comme ceci :

pour des matrices unitairement invariantes, la convergence en $*$-distribution vers un $*$-espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \varphi)$ s'étend en une convergence de la distribution de trafics vers un espace de trafics enveloppant $(\mathcal{G}(\mathcal{A}), \tau_\varphi)$.

Théorème O. — [13, Theorem 1.3]
Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un $*$-espace de probabilités non-commutatif tel que φ est tracial.
Il existe un espace de trafics $(\mathcal{G}(\mathcal{A}), \tau_\varphi)$, dit enveloppant*, qui étend de façon canonique $(\mathcal{A}, \varphi)$ via un plongement $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{A})$. De plus, la liberté de deux sous-algèbres dans $\mathcal{A}$ se traduit par l'indépendance de trafics de ces sous-algèbres dans $(\mathcal{G}(\mathcal{A}), \tau_\varphi)$.*

La difficulté du théorème réside dans la positivité de la distribution de trafics τ_φ ainsi définie. Ultérieurement, Au et Male [AM20] ont montré que l'espace de trafics enveloppant $(\mathcal{G}(\mathcal{A}), \tau_\varphi)$ contient toujours trois sous-algèbres libres au sens de Voiculescu. Via le théorème N, ces trois algèbre libres permettent de retrouver le fait qu'une matrice $U_N A_N U_N^*$ unitairement invariante est asymptotiquement libre avec sa transposée $(U_N A_N U_N^*)^t$ et avec sa diagonale $I_N \circ (U_N A_N U_N^*)$ lorsque N tend vers l'infini [MP16].

Liberté avec amalgamation sur la diagonale [3]

L'indépendance de trafics permet de calculer à l'aide d'outils combinatoires la distribution jointe asymptotique de matrices aléatoires dont la loi est invariante par permutation des vecteurs de la base canonique. L'étape naturelle suivante est de doter cette théorie des espaces de trafics d'outils analytiques afin de transformer les descriptions combinatoires en méthodes numériques. Nos efforts en ce sens se sont concrétisés dans un travail avec Au, Dahlqvist, Gabriel et Male [3] où nous montrons que ces matrices invariantes par permutation sont *asymptotiquement libres*, non pas vis-à-vis de la trace à valeurs scalaires, mais vis-à-vis d'une application linéaire à valeurs opérateurs, comme exprimé dans le théorème P. Le cadre naturel de cette indépendance asymptotique est celui des *probabilités libres à valeurs opérateurs* que nous allons maintenant présenter.

Dès le début du développement de la théorie des probabilités libres, Voiculescu en propose une extension importante en raison de son domaine d'applicabilité plus large : la théorie des probabilités libres à valeurs opérateurs, et son indépendance non-commutative appelée *liberté avec amalgamation* [Voi85 ; Voi95]. La définition est analogue à celle de la liberté présentée page 5, mais la forme linéaire τ est ici remplacée par une application linéaire E qui n'est plus à valeurs scalaires.

Définition.
Un espace de probabilités non-commutatif à valeurs opérateurs $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, E)$ *est une algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une sous-algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et d'une espérance conditionnelle $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, c'est-à-dire une application linéaire telle que :*

— *pour tout $b \in \mathcal{B}$, $E[b] = b$;*

— *pour tous $a \in \mathcal{A}$ et $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, $E[b_1 a b_2] = b_1 E[a] b_2$.*

Deux sous-algèbres $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_2$ de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{B}$ sont dites libres avec amalgamation sur $\mathcal{B}$ *si, pour tous $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geq 1$) pris alternativement dans $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$, on a*

$$E\Big[(a_1 - E[a_1]) \cdots (a_n - E[a_n])\Big] = 0.$$

De même que le produit libre de groupes induit la liberté au niveau des algèbres de groupes, il se trouve que le produit libre amalgamé de groupes induit la liberté avec amalgamation au niveau des algèbres de groupes, ce qui donne une motivation pour ce concept, et du même coup une explication pour sa terminologie. La liberté est le cas particulier de la liberté amalgamée lorsque l'algèbre $\mathcal{B}$ est égale à $\mathbb{C}$. La liberté amalgamée fonctionne essentiellement de la même façon que la liberté, et en particulier permet de reconstruire une distribution jointe (à valeurs opérateurs) à partir des distributions marginales (à valeurs opérateurs).

Dans la situation de matrices aléatoires invariantes en loi par permutation, la sous-algèbre sur laquelle va avoir lieu l'amalgamation est l'algèbre $\mathcal{D}_N \subset M_N(\mathbb{C})$ des matrices diagonales, comme suggéré par certains travaux antérieurs [Shl96 ; BD17] de Shlyakhtenko, Boedihardjo et Dykema. En définissant l'espérance conditionnelle $D : M_N(\mathbb{C}) \to \mathcal{D}_N$ par

$$D : \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{N} \mapsto \left(\delta_{ij} a_{ij}\right)_{i,j=1}^{N},$$

nous obtenons un espace de probabilités non-commutatif $(M_N(\mathbb{C}), \mathcal{D}_N, D)$ à valeurs opérateurs. Pour une matrice A_N, on notera $\mathcal{D}_N\langle A_N\rangle$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{D}_N$ et A_N. Pour un monôme de type $M = b_0 A_N b_1 A_N \cdots A_N b_n \in \mathcal{D}_N\langle A_N\rangle$, on définit n comme étant le degré de M, et $b_0, \ldots, b_n \in \mathcal{D}_N$ comme étant les coefficients de M. Une suite $P_N \in \mathcal{D}_N\langle A_N\rangle$ (avec $N \geq 1$) est dite *uniformément bornée en longueur, degrés et coefficients* s'il existe des décompositions $P_N = M_N(1) + \ldots + M_N(\ell_N)$ en somme finie de monômes $M_N(1), \ldots, M_N(\ell_N) \in \mathcal{D}_N\langle A_N\rangle$, avec une borne (indépendante de N) sur les longueurs ℓ_N, les degrés des monômes et les normes d'opérateurs des coefficients des monômes. Voici ci-dessous une version de notre résultat de liberté asymptotique avec amalgamation sur $\mathcal{D}_N$.

Théorème P. — [3, Theorem 1.3]
Soient $A_N, B_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) deux suites de matrices uniformément bornées en norme d'opérateur et $S_N \in M_N(\mathbb{C})$ (avec $N \geq 1$) des matrices de permutations aléatoires uniformes.

Alors $S_N A_N S_N^*$ et B_N sont asymptotiquement libres avec amalgamation sur $\mathcal{D}_N$ *en probabilité dans $(M_N(\mathbb{C}), \mathcal{D}_N, D)$ au sens suivant : pour $n \geq 1$ fixé, pour tous $P_{N,1}, \ldots, P_{N,n}$ (avec $N \geq 1$) pris alternativement dans $\mathcal{D}_N\langle S_N A_N S_N^*\rangle$ ou $\mathcal{D}_N\langle B_N\rangle$, et uniformément bornés en longueur, degrés et coefficients, la norme $\sqrt{\mathrm{tr}_N[\varepsilon_N \varepsilon_N^*]}$ de la matrice*

$$\varepsilon_N := D\Big[(P_{N,1} - D[P_{N,1}]) \cdots (P_{N,n} - D[P_{N,n}])\Big]$$

converge en probabilité vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Dans le théorème P, les algèbres $\mathcal{D}_N\langle S_N A_N S_N^*\rangle$ et $\mathcal{D}_N\langle B_N\rangle$ seraient libres avec amalgamation sur $\mathcal{D}_N$ si les ε_N s'annulaient à N fixé. Cette liberté avec amalgamation survient donc asymptotiquement, lorsque ε_N devient négligeable. En fin de compte, pour des matrices aléatoires de lois invariantes par permutation des vecteurs de la base canonique, l'indépendance de trafics est remplacée par la liberté avec amalgamation. Cela permet d'utiliser la théorie générale des probabilités libres à valeurs opérateurs, et en particulier ses outils analytiques puissants, pour l'étude du spectre de telles matrices.

Nous avons également une version de cette liberté asymptotique dans l'espace de probabilités non-commutatif des matrices *aléatoires*. En effet, la matrice $S_N A_N S_N^*$ appartient à l'algèbre $M_N(L^\infty)$ des matrices aléatoires à coefficients essentiellement bornées. L'espérance conditionnelle D appliquée à $M_N(L^\infty)$ est à valeurs dans la sous-algèbre $\mathcal{D}_N(L^\infty)$ des matrices diagonales aléatoires à coefficients essentiellement bornées. Nous montrons [3, Theorem 2.3] que $S_N A_N S_N^*$ et B_N sont *asymptotiquement libres avec amalgamation sur* $\mathcal{D}_N(L^\infty)$ dans $(M_N(L^\infty), \mathcal{D}_N(L^\infty), D)$. Ce résultat est plus fort que celui du théorème P, car les coefficients de $P_{N,1}, \ldots, P_{N,n}$ sont alors des éléments de $\mathcal{D}_N(L^\infty)$, et non plus des matrices déterministes.

Nous pouvons également assouplir l'hypothèse sur la norme opérateur, ce qui étend le champ d'application du théorème à des modèles plus généraux, en incluant tous les modèles dont la distribution de trafics est uniformément bornée en la dimension (par exemple les matrices de Wigner avec des moments explosifs, les régimes parcimonieux du modèle d'Erdős-Rényi). Par ailleurs, la liberté amalgamée du théorème P reste valide si les matrices sont multipliées terme à terme par des variables aléatoires indépendantes bornées (par exemple, dans le cas de matrices ayant un profil de variances et dans les modèles de percolation).

Si le théorème P peut s'exprimer en oubliant le formalisme des espaces de trafics, sa preuve repose sur une méthode des moments qui utilise intensément la combinatoire des espaces de trafics et notamment l'étude fine des graphes qui interviennent dans le calcul de la distribution de trafics des matrices $S_N A_N S_N^*$ et B_N.

Dans la figure 2.4, nous illustrons cette liberté amalgamée par six histogrammes. Pour chaque cas sont simulées deux matrices aléatoires X_N et Y_N indépendantes. Les lois pour X_N et Y_N sont choisies parmi les suivantes :

— la loi ER désigne la loi d'une matrice d'adjacence renormalisée d'un graphe d'Erdős-Rényi parcimonieux (comme étudié dans [BBK19]), avec des coefficients diagonaux nuls, et des coefficients hors-diagonaux indépendants (modulo la symétrie de la matrice) distribués selon
$$\frac{Ber - 1/(N-1)}{\sqrt{(1-(N-1)^{-1})}}$$
où Ber est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/(N-1)$;

— la loi Perm désigne la loi d'une matrice symétrique réelle, construite à partir de la matrice de permutations uniforme $S_N \in M_N(\mathbb{C})$ en remplaçant chaque coefficient $S_N(i,j)$ soit par $(S_N(i,j) + S_N(j,i) - 2)$ avec probabilité $1/2$, soit par 0 avec probabilité $1/2$ (sous contrainte de symétrie de la matrice) ;

— pour une matrice D diagonale, la loi FFT_D est celle de la matrice hermitienne
$$S_N F_N D F_N^* S_N^*,$$
où $N \times N$ est la dimension de D, $S_N \in M_N(\mathbb{C})$ est une matrice de permutations uniforme et $F_N \in M_N(\mathbb{C})$ est la matrice de transformée de Fourier discrète considérée dans [DLM15]
$$U_N(j,k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i (j-1)(k-1)} \;;$$

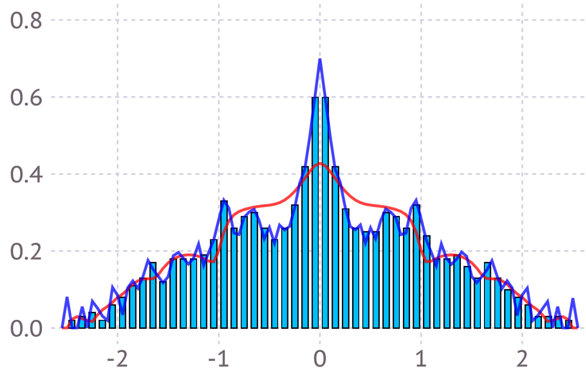
— pour une matrice D diagonale, la loi UBM_D est celle de la matrice hermitienne
$$U_N(T) D U_N(T)^*$$
où $N \times N$ est la dimension de D, $\big(U_N(t)\big)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sur le groupe unitaire de dimension $N \times N$ comme considéré dans [Bia97], et $T = 0,125$.

Pour les lois UBM_D et FFT_D, la matrice diagonale D est prise parmi les matrices de taille $N \times N$ suivantes (avec N paire) :

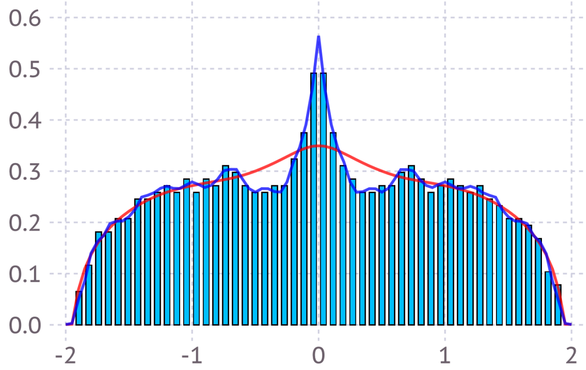
— $D_1 = \mathrm{diag}(+1, -1, +1, -1, \dots, +1, -1)$;

— $D_2 = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$ avec autant de $+1$ que de -1 ;

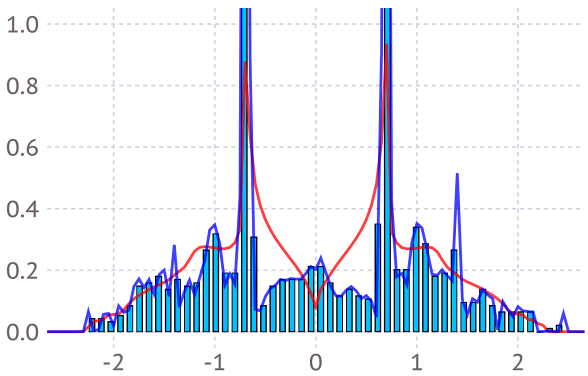
— $D_3 = \sqrt{\frac{3}{14}} \mathrm{diag}\left(-2 + \frac{2}{N}, -2 + \frac{4}{N}, -2 + \frac{6}{N}, \cdots, -1, +1 + \frac{2}{N}, +1 + \frac{4}{N}, +1 + \frac{6}{N}, \dots, +2\right)$.



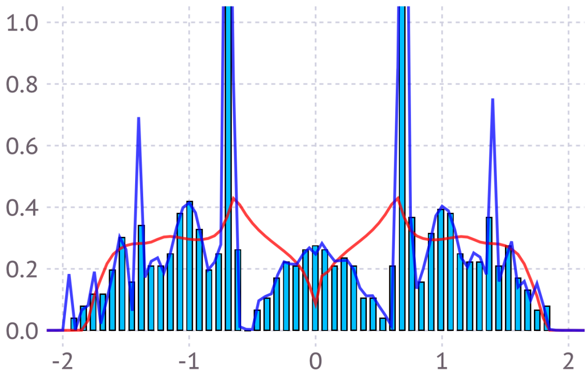
(a) FFT_{D_2} et ER



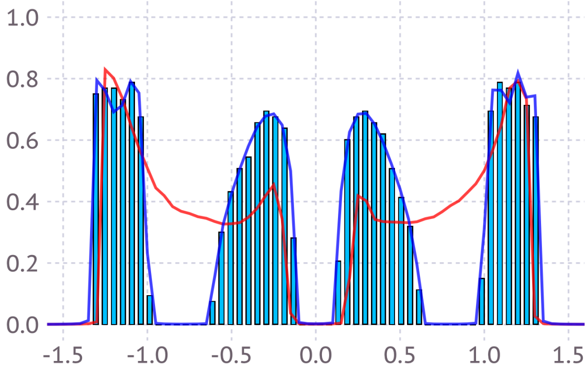
(b) FFT_{D_2} et Perm



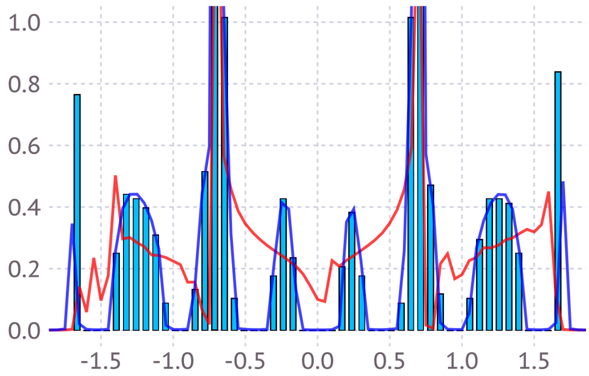
(c) UBM_{D_2} et ER



(d) UBM_{D_2} et Perm



(e) UBM_{D_1} et UBM_{D_3}



(f) UBM_{D_2} et FFT_{D_1}

FIGURE 2.4 – Illustrations numériques pour $N = 1000$.

— Histogramme : distribution spectrale $\mu_{X_N+Y_N}$ de la somme.

— Courbe bleue : convolution libre avec amalgamation sur $\mathcal{D}_N$ de μ_{X_N} avec μ_{Y_N}.

— Courbe rouge : convolution libre de μ_{X_N} avec μ_{Y_N}.

La mesure empirique spectrale $\mu_{X_N+Y_N}$ de la somme est représentée par un histogramme pour une seule réalisation des matrices X_N et Y_N. Pour comparaison, la densité de la convolution libre avec amalgamation sur $\mathcal{D}_N$ est tracée en bleu. Elle correspond à la mesure $\mu_{X_N+Y_N}$ si X_N et Y_N étaient effectivement libres avec amalgamation sur $\mathcal{D}_N$, comme prédit asymptotiquement par le théorème P, et est calculée grâce à l'algorithme de point fixe de Belinschi, Mai, and Speicher [BMS17]. Enfin, pour insister sur le fait que les matrices ne sont pas dans une situation de liberté asymptotique de Voiculescu, la densité de la convolution libre de μ_{X_N} avec μ_{Y_N} est tracée en rouge : elle correspond à la mesure $\mu_{X_N+Y_N}$ si X_N et Y_N étaient juste libres (sans amalgamation).

2.3 Approximation semi-circulaire – seconde partie

De même que la mesure gaussienne est stable par rapport à l'indépendance classique, la mesure semi-circulaire est *stable* par rapport à la liberté de Voiculescu au sens suivant : si S_1 et S_2 sont deux variables semi-circulaires libres, alors $\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + S_2)$ est aussi une variable semi-circulaire. Cette propriété de stabilité explique en grande partie le caractère universel de la mesure semi-circulaire dans la théorie des probabilités libres.

Au niveau des matrices, cela se traduit par l'apparition de la mesure semi-circulaire pour de grandes matrices gaussiennes. En effet, par le résultat de liberté asymptotique de Voiculescu, les lois de matrices stables (pour l'addition de matrices indépendantes) convergent naturellement vers des lois stables (pour la liberté de Voiculescu). C'est une justification possible du célèbre résultat de Wigner [Wig58] ci-après qui stipule que la mesure empirique spectrale d'une matrice hermitienne dont les coefficients sont des gaussiennes indépendantes de variances bien choisies converge vers la mesure semi-circulaire lorsque la dimension de la matrice tend vers l'infini.

Cette section est consacrée à des extensions du théorème de Wigner où la loi limite n'est plus forcément la mesure semi-circulaire, mais plus généralement une variable semi-circulaire *à valeurs opérateurs* comme définie plus loin. C'est l'équivalent de la mesure semi-circulaire dans la théorie des probabilités libres à valeurs opérateurs car une variable semi-circulaire à valeurs opérateurs est stable pour la liberté amalgamée introduite page 29.

Loi du demi-cercle de Wigner

Dans les théorèmes qui vont suivre, les convergences étroites des lois de variables aléatoires seront quantifiées par la proximité de leurs transformées de Cauchy sur le demi-plan supérieur $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Définition.
Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ un W^*-espace de probabilités non-commutatif. Pour toute variable auto-adjointe $a = a^* \in \mathcal{A}$ de loi μ_a, la transformée de Cauchy *de a est la fonction $G_a : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ définie par*

$$G_a(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - x} \mathrm{d}\mu_a(x).$$

Notons que, par transfert, la transformée de Cauchy peut aussi s'écrire

$$G_a(z) = \tau \left[\frac{1}{z - a} \right].$$

La transformée de Cauchy d'une variable a caractérise entièrement sa loi et la formule d'inversion de Stieltjes-Perron permet même de calculer la densité de la loi de a connaissant les valeurs de $G_a(z)$ pour z proche de l'axe réel. Pour une suite de variables non-commutatives $(a_n)_{n\geq 1}$, la convergence étroite des lois $(\mu_{a_n})_{n\geq 1}$ est complètement équivalente à la convergence simple des transformées de Cauchy $(G_{a_n})_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour une matrice $X_N \in M_N(L^\infty)$ à coefficients aléatoires, il peut parfois y avoir une ambiguïté entre la loi de X_N vue comme une variable de $(M_N(L^\infty), \mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_N)$ d'un côté, et la loi de X_N vue comme une variable de $(M_N(\mathbb{C}), \mathrm{tr}_N)$ de l'autre (mesure aléatoire qui correspond à la mesure empirique spectrale et dépend alors de la réalisation de X_N). Pour éviter toute confusion, la transformée de Cauchy G_{X_N} désignera toujours la transformée de Cauchy de X_N vue comme une variable de $(M_N(\mathbb{C}), \mathrm{tr}_N)$, et nous noterons $\mathbb{E}[G_{X_N}]$ son espérance, qui correspond à la transformée de Cauchy de X_N vue comme une variable de $(M_N(L^\infty), \mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_N)$. Énonçons maintenant le résultat de Wigner [Wig58] concernant la convergence de la loi d'une suite de matrices à entrées gaussiennes.

Loi du demi-cercle de Wigner.
Pour tout $N \geq 1$, on considère la matrice symétrique réelle

$$X_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NN} \end{pmatrix}$$

où $(x_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq N}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Soit s une variable semi-circulaire.

Alors, presque sûrement, la loi μ_{X_N} converge étroitement vers la mesure semi-circulaire μ_s lorsque N tend vers l'infini. La convergence étroite de $\mathbb{E}[\mu_{X_N}]$ vers μ_s a également lieu à la vitesse suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}^+$ et tout $N \geq 1$,

$$\left| \mathbb{E}[G_{X_N}(z)] - G_s(z) \right| \leq C \frac{1}{(\mathrm{Im}(z) \wedge 1)^5} \frac{1}{N^2}.$$

L'inégalité entre la transformée de Cauchy de X_N et celle de s est due à Collins, Guionnet et Parraud [CGP22, Corollary 1.3]. C'est une version récente d'une inégalité de Haagerup et Thorbjørnsen [HT05, Theorem 5.7] qui a pour conséquence immédiate la convergence étroite de $\mathbb{E}[\mu_{X_N}]$ vers μ_s. Les inégalités de ce type, où la dépendance en z est explicite, permettent d'étudier plus finement la convergence de la mesure empirique spectrale de X_N, et d'en tirer des conclusions sur les valeurs propres extrémales de μ_{X_N} [CGP22 ; HT05] ou sur la vitesse de convergence de $\mathbb{E}[\mu_{X_N}]$ pour des distances usuelles de mesures, comme la distance de Kolmogorov [Bai93 ; BM20] ou la métrique Lipschitz-bornée [AGZ10 ; CGP22].

Matrices à coefficients échangeables [4]

La loi du demi-cercle de Wigner est un résultat universel : la convergence aura toujours lieu si les variables gaussiennes ci-dessus sont remplacées par des variables indépendantes et identiquement distribuées centrées et réduites. Ce n'est donc pas la loi des entrées qui fait émerger la mesure semi-circulaire, mais l'indépendance entre les coefficients. Chatterjee a même montré que la limite de la distribution spectrale d'une matrice avec des coefficients aléatoires échangeables converge également vers la mesure semi-circulaire [Cha07]. Ce résultat de Chatterjee est le point de départ du travail joint avec Banna [4] présenté ci-dessous, qui traite de matrices dont les coefficients échangeables sont à valeurs opérateurs et non plus scalaires.

Définition.
Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ un espace de probabilités non-commutatif.
Des variables non-commutatives $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ sont dites échangeables *si, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, la $*$-distribution de $a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}$ est la même que celle de $a_1, \ldots, a_n$.*

Voici deux observations motivant l'étude générale de matrices dont les coefficients échangeables sont à valeurs opérateurs.

— Lorsqu'une matrice aléatoire est composée de blocs indépendants et identiquement distribués, les coefficients scalaires de la matrices ne sont ni indépendants ni échangeables. En revanche, on peut voir cette matrice comme composée de blocs échangeables, qui sont autant de coefficients à valeurs matricielles.

— Une matrice dont les entrées sont libres au sens de Voiculescu est une matrice dont les coefficients sont à valeurs opérateurs et échangeables.

Avec Banna [4], nous montrons que de telles matrices sont comparables à des variables semi-circulaires à valeurs opérateurs, et nous donnons des estimées précises sur les transformées de Cauchy correspondantes.

Pour énoncer ce résultat, nous avons besoin d'expliquer ce que nous entendons par variable semi-circulaire à valeurs opérateurs. Une variable semi-circulaire s est caractérisée par sa transformée de Cauchy G_s. Le calcul explicite de G_s donne, pour tout $z \in \mathbb{C}^+$,

$$G_s(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

ce qui montre que G_s satisfait l'équation quadratique suivante : $zG_s(z) = 1 + G_s(z)^2$. Pour les théorèmes qui suivent, une variable semi-circulaire à valeurs opérateurs est une variable d'un espace de probabilités non-commutatif à valeurs opérateurs dont la transformée de Cauchy satisfait une équation similaire.

Définition.

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, E)$ un espace de probabilités non-commutatif à valeurs opérateurs tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des W^*-algèbres. Pour toute variable auto-adjointe $a = a^* \in \mathcal{A}$, la transformée de Cauchy à valeurs opérateurs *de a est la fonction $\mathbf{G}_a : \mathcal{B}^+ = \{b \in \mathcal{B} : \exists \varepsilon > 0, \mathrm{Im}(b) \geq \varepsilon 1_{\mathcal{A}}\} \to \mathcal{B}$ définie par*

$$\mathbf{G}_a(b) = E\left[\frac{1}{b - x}\right].$$

Soit $\eta : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une application linéaire complètement positive. Une variable $s = s^* \in \mathcal{A}$ est dite semi-circulaire à valeurs opérateurs *de variance η si, pour tout $b \in \mathcal{B}^+$,*

$$b \cdot \mathbf{G}_s(b) = 1 + \eta(\mathbf{G}_s(b)) \cdot \mathbf{G}_s(b). \tag{2.1}$$

La définition donnée ci-dessus pour les variables semi-circulaires à valeurs opérateurs est moins stricte que d'habitude (voir [MS17] pour la définition usuelle), mais elle suffit pour les énoncés qui suivent. En effet, nous nous sommes uniquement intéressés aux variables semi-circulaires à valeurs opérateurs s à travers leur loi μ_s par rapport à un état $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

La transformée de Cauchy scalaire G_s de s, qui détermine la loi μ_s via la formule de Stieltjes-Perron, peut être obtenue à partir de la transformée de Cauchy à valeurs opérateurs $\mathbf{G}_s$ par la relation suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}^+$,

$$G_s(z) = \tau[\mathbf{G}_s(z 1_{\mathcal{A}})],$$

où $\mathbf{G}_s$ est déterminée par la relation (2.1). À partir de cette relation (2.1), on peut écrire l'équation de point fixe

$$\mathbf{G}_s(b) = \frac{1}{b - \eta(\mathbf{G}_s(b))},$$

ce qui permet de calculer numériquement la valeur de $\mathbf{G}_s$ par un algorithme de point fixe [HFS07], et donne donc accès à une estimée de la loi de s dans tous les exemples qui vont suivre.

Dans le théorème suivant, nous comparons la transformée de Cauchy G_{X_N} d'une matrice X_N à coefficients échangeables et à valeurs dans un espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$ avec la transformée de Cauchy G_s d'une variable semi-circulaire s à valeurs opérateurs. La loi de la matrice $X_N \in M_N(\mathcal{A})$ est calculée par rapport à l'état

$$\mathrm{tr}_N \otimes \tau : M_N(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A} \simeq M_N(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}.$$

L'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ dans laquelle vivent les coefficients est une *intégrale directe de facteurs de dimensions bornées.* Nous n'allons pas détailler cette hypothèse technique indispensable, mais cela inclut par exemple toutes les algèbres $(M_d(L^\infty), \mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_d)$ de matrices à coefficients aléatoires essentiellement bornés. Par ailleurs, pour une variable $a \in \mathcal{A}$, la norme d'opérateur de a au sein de $\mathcal{A}$ sera désignée par $\|a\|$.

THÉORÈME Q. — [4, Theorem 3.6]
Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ *un* W^**-espace de probabilités tracial tel que* $\mathcal{A}$ *une intégrale directe de facteurs de dimensions inférieures à* d. *Soit* $(x_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ *une famille de* n *variables échangeables de* $\mathcal{A}$ *(avec* $n = N^2$*). Soit* $X_N \in M_N(\mathcal{A})$ *la matrice de taille* $N \times N$ *et de coefficients*

$$X_N(i,j) = \frac{1}{\sqrt{2N}}(x_{ij} + x_{ji}^*) \in \mathcal{A}.$$

Considérons la fonction de covariance $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *donnée par*

$$\eta(b) = \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\bar{x}_{ij} b \bar{x}_{ij}^* + \bar{x}_{ij}^* b \bar{x}_{ij}\Big).$$

où $\bar{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^N x_{ij}$. *Soit* $\mathcal{B}$ *la plus petite sous-algèbre de von Neumann de* $\mathcal{A}$ *invariante pour* η *et soit* s *une variable semi-circulaire à valeurs opérateurs de variance* $\eta|_{\mathcal{B}}$.

Alors il existe une constante $C > 0$ *telle que, pour tout* $z \in \mathbb{C}^+$ *et tout* $N \geq 1$,

$$\Big|G_{X_N}(z) - G_s(z)\Big| \leq Cd^2 \frac{(|z| \vee \|x_{11}\| \vee 1)^4}{(\mathrm{Im}(z) \wedge 1)^6} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Un ingrédient clé de notre preuve concerne une structure d'indépendance cachée derrière l'échangeabilité. Nous démontrons que les sommes d'opérateurs échangeables sont proches en distribution de l'espérance de sommes d'opérateurs *gaussiens* indépendants, en utilisant comme Chatterjee [Cha07] la méthode de Lindeberg et de l'interpolation gaussienne. Cette première étape, qui consiste à remplacer une famille d'opérateurs par une famille d'opérateurs aléatoires peut sembler surprenante ou artificielle, mais c'est une conséquence du fait que l'échangeabilité est un concept lié à l'indépendance classique (par exemple via des théorèmes de type de Finetti) contrairement à d'autres notions d'invariance, telles que les invariances par action de groupes quantiques ou de groupes duaux (par exemple page 14) qui sont liées à la liberté de Voiculescu. On montre ensuite que la distribution de ces matrices à coefficients à valeurs opérateurs gaussiens est proche de celle d'une distribution semi-circulaire à valeurs opérateurs en utilisant des techniques proches de celles de Haagerup et Thorbjørnsen [HT05].

L'intérêt du théorème Q réside dans sa généralité : en fixant $(\mathcal{A}, \tau) = (M_d(L^\infty), \mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_d)$, nous retrouvons plusieurs résultats existants de convergence pour des matrices par blocs. En effet, la matrice aléatoire X_N du théorème Q est alors de la forme

$$X_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix},$$

où A_{ij} sont des matrices aléatoires de taille $d \times d$. C'est donc une matrice aléatoire de taille $dN \times dN$. L'état $\mathrm{tr}_N \otimes \tau$ utilisé dans le théorème Q correspond alors à l'espérance de la trace normalisée $\mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_{dN}$ sur les matrices aléatoires de taille $dN \times dN$. Nous obtenons donc des estimées concernant la transformée de Cauchy $\mathbb{E}[G_{X_N}]$ de X_N pour l'état $\mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_{dN}$, ce qui correspond à l'espérance de la transformée de Cauchy G_{X_N} de X_N.

Voici trois corollaires qui sont les conséquences les plus immédiates du théorème Q – il s'agit essentiellement de décomposer les matrices de la bonne façon afin d'être en mesure d'appliquer le théorème Q, et d'utiliser encore une fois la méthode de Lindeberg pour alléger l'hypothèse sur les variables essentiellement bornées. Dans chacun des résultats suivants, la proximité avec une variable semi-circulaire s à valeurs opérateurs est quantifiée non-asymptotiquement. La convergence étroite de $\mathbb{E}[\mu_{X_N}]$ vers la mesure μ_s en est une conséquence immédiate pour une suite de matrice $(X_N)_{N\geq 1}$.

Commençons par une version quantitative d'un résultat de Girko [Gir98] concernant des matrices de Wigner par blocs indépendants et identiquement distribués.

Corollaire.
Soit $\{A_{ij} = (a_{kl}^{(ij)})_{k,l=1}^d \in M_d(\mathbb{C}) : 1 \leq i,j \leq N\}$ *une famille de* N^2 *matrices aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de taille* $d \times d$ *fixée, et telles que* $\mathbb{E}[|a_{kl}^{(ij)}|^3] < \infty$. *Soit* $X_N \in M_{Nd}(\mathbb{C})$ *la matrice aléatoire de taille* $dN \times dN$ *composée des* N^2 *blocs*

$$X_N(i,j) = \frac{1}{\sqrt{2N}}(A_{ij} + A_{ji}^*) \in M_d(\mathbb{C}).$$

Soit s *une variable semi-circulaire à valeurs opérateurs de variance* $\eta : M_d(\mathbb{C}) \to M_d(\mathbb{C})$ *donnée par* $\eta(B) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\Big[(A_{11} - \mathbb{E}[A_{11}])B(A_{11} - \mathbb{E}[A_{11}])^*\Big] + \mathbb{E}\Big[(A_{11} - \mathbb{E}[A_{11}])^* B(A_{11} - \mathbb{E}[A_{11}])\Big]\right)$.

Alors il existe une constante $C > 0$ *ne dépendant que de la distribution de* A_{11} *telle que, pour tout* $z \in \mathbb{C}^+$ *et tout* $N \geq 1$,

$$\Big|\mathbb{E}[G_{X_N}(z)] - G_s(z)\Big| \leq C\frac{(|z| \vee 1)^4}{(\mathrm{Im}(z) \wedge 1)^6}\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Nous considérons maintenant des matrices qui ont une structure par blocs corrélés, mais où les variables au sein de chaque bloc sont indépendantes et identiquement distribuées. Cela étend un résultat de Far, Oraby, Bryc et Speicher [Far+08] à des distributions matricielles non-nécessairement gaussiennes, et en donne une estimée quantitative. C'est pour ainsi dire une version du corollaire précédent, où le découpage de la matrice $X_N \in M_{dN}(\mathbb{C})$ se fait en décomposant en d^2 blocs de taille $N \times N$ au lieu de N^2 blocs de taille $d \times d$.

Corollaire.
Soit $d \geq 1$ *fixé. Soit* $X_N \in M_{dN}(\mathbb{C})$ *la matrice aléatoire de taille* $dN \times dN$ *donnée par*

$$X_N = \frac{1}{\sqrt{d}}\begin{pmatrix} A^{(11)} & \cdots & A^{(1d)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(d1)} & \cdots & A^{(dd)} \end{pmatrix},$$

où, pour tous $1 \leq j \leq i \leq d$, $A^{(ji)} = (A^{(ij)})^*$ *et* $A^{(ij)} = (\frac{1}{\sqrt{N}}a_{rp}^{(ij)})_{r,p=1}^N \in M_N(\mathbb{C})$ *sont des matrices aléatoires à coefficients indépendants et identiquement distribués au dessus de la diagonale, et telles que, pour tous* $1 \leq i,j,k,l \leq d$:

— $\mathrm{Cov}(a_{rp}^{(ij)}, a_{qs}^{(kl)}) = \delta_{pq}\delta_{rs}\sigma(i,j;k,l)$ *avec* σ *telle que* $\sigma(i,j;k,l) = \overline{\sigma(k,l;i,j)}$;

— $\mathbb{E}[|a_{11}^{(ij)}|^3] < \infty$.

Soit s *une variable semi-circulaire à valeurs opérateurs de variance* $\eta : M_d(\mathbb{C}) \to M_d(\mathbb{C})$ *donnée par*

$$\eta(B)_{ij} = \frac{1}{d}\sum_{k,l=1}^d \sigma(i,k;l,j)B_{kl}.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ *ne dépendant que de la distribution de* $(a_{11}^{(ij)})_{i,j=1}^d$ *telle que, pour tout* $z \in \mathbb{C}^+$ *et tout* $N \geq 1$,

$$\Big|\mathbb{E}[G_{X_N}(z)] - G_s(z)\Big| \leq C\frac{(|z| \vee 1)^4}{(\mathrm{Im}(z) \wedge 1)^6}\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Passons à une famille de modèles qui ont été étudiés par l'équipe d'Erdős sous le nom de matrices de Kronecker [Alt+19 ; EKS19], avec des coefficients matriciels, une répétition possible des blocs, et où de la corrélation peut en partie être ajoutée entre les matrices. Même si la vitesse de convergence apparaît ici plus faible que dans les travaux existants, nous pouvons nous permettre une corrélation plus générale, et nous réduisons l'hypothèse sur les moments à une hypothèse de moment d'ordre 3 borné.

Corollaire.
Soit $d \geq 1$ et $L \geq 1$ fixés. Soit $X_N \in M_{dN}(\mathbb{C})$ la matrice aléatoire de taille $dN \times dN$ donnée par la somme de produits de Kronecker

$$X_N = \sum_{k=1}^{L} (\beta_k \otimes Y_k + \beta_k^* \otimes Y_k^*),$$

où les $\beta_k \in M_d(\mathbb{C})$ sont des matrices déterministes et les $Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}}(y_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^N \in M_d(\mathbb{C})$ sont des matrices aléatoires telles que :

- *les N^2 familles $\{y_{ij}^{(1)}, \dots, y_{ij}^{(L)}\}$ (avec $1 \leq i, j \leq N$) sont indépendantes et identiquement distribuées ;*
- *$Cov(y_{ij}^{(k)}, \overline{y_{pr}^{(l)}}) = \delta_{ip}\delta_{jr}\sigma(k,l)$ avec σ telle que $\sigma(k,l) = \overline{\sigma(l,k)}$;*
- *$\mathbb{E}[|y_{ij}^{(k)}|^3] < \infty$.*

Soit s une variable semi-circulaire à valeurs opérateurs de variance $\eta : M_d(\mathbb{C}) \to M_d(\mathbb{C})$ donnée par

$$\eta(B) = \frac{1}{L^2} \sum_{k,l=1}^{L} \Big(\sigma(k,l)\beta_k B \beta_l^* + \overline{\sigma(k,l)}\beta_k^* B \beta_l \Big).$$

Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de la distribution de $\{y_{11}^{(1)}, \dots, y_{11}^{(L)}\}$ et de $\{\beta_1, \dots, \beta_L\}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}^+$ et tout $N \geq 1$,

$$\Big| \mathbb{E}[G_{X_N}(z)] - G_s(z) \Big| \leq C \frac{(|z| \vee 1)^4}{(\mathrm{Im}(z) \wedge 1)^6} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Au-delà de ces trois situations, nous avons montré avec Banna [4] que notre travail s'applique également pour des modèles de matrices circulantes aléatoires comme étudiées par Oraby [Ora07], des modèles de type Wishart par blocs [Far+08] ou encore des modèles de matrices à coefficients libres au sens de Voiculescu [Liu18 ; NSS02 ; Rya98].

Chapitre 3

Perspectives

Dans ce dernier chapitre sont présentées quelques questions qui m'intéressent en lien avec les travaux présentés dans les chapitres précédents, à la demande de la Commission des Habilitations. Certains problèmes sont en cours d'investigation, dans différents projets en collaboration avec mes collègues Arizmendi, Capitaine, Fathi, Franz, Gilliers, Kemp, Mingo, Nikitopoulos, Skalski, Ulrich et Yin. D'autres problèmes pourront faire l'objet de futurs projets, ou de futurs encadrements de thèse. Je les ai divisés arbitrairement en trois axes.

3.1 Symétries non-commutatives

Groupes quantiques

Concernant les groupes quantiques, une question qui me suit depuis quelques temps concerne certains processus stochastiques quantiques analogues aux processus stochastiques à valeurs dans des groupes de Lie matriciels. Plus précisément, il existe une notion de *processus de Lévy quantiques*, parmi lesquels les processus gaussiens sont identifiés comme ceux ayant un générateur de type quadratique – notion due à Schürmann [Sch06]. Il est attendu que le caractère gaussien d'un processus soit reflété par une propriété topologique, comme c'est le cas pour un processus sur un groupe de Lie classique.

Prenons un processus aléatoire matriciel $X = (X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $M_N(\mathbb{C})$. Le pas d'une subdivision $P = \{0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ est

$$|P| = \max_{1\leq k\leq n}(t_k - t_{k-1}),$$

et la variation d'ordre p de X sur un intervalle $[0,t]$, si elle existe, est la limite (disons en espérance)

$$\lim_{|P_n|\to 0} \sum_{t_k\in P_n} \|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\|_{HS}^p \tag{3.1}$$

le long de n'importe quelle suite de subdivisions $(P_n)_{n\geq 1}$ de $[0;t]$ telle que la suite de pas $|P_n|$ tende vers 0, où $\|\cdot\|_{HS}^2$ est la norme de Hilbert-Schmidt d'une matrice. Il n'est pas compliqué de montrer que, parmi les processus de Lévy à valeurs dans un groupe de Lie compact matriciel, les mouvements browniens sont ceux dont la variation d'ordre 4 s'annule, et les processus déterministes – les dérives – sont ceux dont la variation d'ordre 2 s'annule.

Pour une notion bien choisie de variation, une telle caractérisation devrait exister pour les processus de Lévy sur les groupes quantiques compacts matriciels. Ce serait la première caractérisation topologique des processus gaussiens parmi les processus de Lévy quantiques.

Une question subsidiaire, qui est intéressante aussi bien pour les processus de Lévy quantiques que pour les processus de Lévy classiques, consiste à étudier la vitesse de convergence de la limite (3.1), et de mettre à jour des fluctuations stochastiques gaussiennes lorsque cette limite est nulle, dans l'esprit des théorèmes de Jacod [Jac07] pour les variations des processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Bien entendu, la caractérisation topologique usuelle du mouvement brownien classique parmi les processus de Lévy reste la continuité presque sûre de ses trajectoires. Dans le cas d'espaces de probabilités non-commutatifs, la notion de convergence presque sûre peut aussi être développée en adoptant le point de vue du théorème d'Egoroff (voir [Jaj06]), et l'étape suivante consisterait à montrer que les processus de Lévy quantiques ayant des trajectoires presque sûrement continues (au sens non-commutatif du terme) sont les processus gaussiens. Pour cela sont déjà développés quelques outils non-commutatifs, comme par exemple un critère de continuité de Kolmogorov [GŁ85] pour des processus à valeurs dans des algèbres de von Neumann.

Groupes duaux

Comme nous l'avons vu dans la section 1.2, une des raisons pour laquelle l'étude des groupes duaux de Voiculescu est moins développée que l'étude des groupes quantiques est la suivante : au contraire des groupes quantiques, il n'existe pas systématiquement d'état de Haar pour les groupes duaux. Concernant le groupe dual unitaire, le théorème E montre qu'il existe une *trace de Haar absorbante* dans la classe des états traciaux. La théorie d'existence d'états absorbants pour des sous-classes d'états est balbutiante, et il serait intéressant de développer à terme une théorie plus générale des traces de Haar pour les groupes duaux.

Une première étape consiste à établir l'existence d'une trace de Haar pour d'autres groupes duaux. Le cas du groupe dual bi-stochastique $\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}}$ me semble atteignable à moyen terme. Son algèbre $\mathrm{Pol}(\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}})$ est similaire à l'algèbre de Brown $\mathrm{Pol}(U_n^{\mathrm{nc}})$ définie page 13. C'est la $*$-algèbre unitaire universelle engendrée par n^2 éléments u_{ij} (avec $1 \leq i,j \leq n$) tels que $(u_{ij})_{i,j=1}^n$ est unitaire dans $M_n(\mathrm{Pol}(\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}}))$, mais avec la relation supplémentaire suivante : pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_k u_{ik} = \sum_k u_{ki} = 1.$$

Le groupe dual bi-stochastique $\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}}$ est alors le groupe dual $\Big(\mathrm{Pol}(\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}}), \Delta, \varepsilon, S\Big)$ tel que : pour $1 \leq i,j \leq n$,

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} v_{kj}, \quad \varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad S(u_{ij}) = u_{ji}^*,$$

où $(u_{ij})_{i,j=1}^n$ et $(v_{ij})_{i,j=1}^n$ sont les générateurs respectifs des deux facteurs du produit libre $\mathrm{Pol}(\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}}) * \mathrm{Pol}(\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}})$. En s'inspirant de la preuve du théorème E, les cumulants libres d'une trace de Haar doivent pouvoir être définis pour $\mathcal{B}_n^{\mathrm{nc}}$, ce qui constituerait le deuxième exemple d'existence de trace de Haar.

Une autre direction dans l'étude des états absorbants est la suivante : concernant le groupe dual unitaire, peut-on trouver un état de Haar absorbant dans des classes d'états satisfaisant certaines conditions KMS précises ? Plus précisément, si $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est un automorphisme d'un groupe dual $\Big(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S\Big)$, un état $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ est dit σ-KMS si

$$\phi(ab) = \phi(b\sigma(a))$$

pour tout $a, b \in \mathcal{A}$. Pour un automorphisme σ donné, on peut considérer la classe des états σ-KMS. Les états traciaux correspondent au cas particulier des états id-KMS. Comme pour les états traciaux, on peut questionner l'existence d'états absorbants pour la convolution libre au sein d'une classe d'états σ-KMS donnée. Certains automorphismes naturels du groupe unitaire dual U_n^{nc} semblent donner naissance à de tels états absorbants, ce qui encore une fois tranche avec le cas des groupes quantiques pour lesquels il n'y a pas besoin de considérer séparément chaque classe d'états σ-KMS.

Finissons par une question à court terme qui a déjà été évoquée dans le premier chapitre : il est possible d'obtenir une version quantitative du théorème F de type de Finetti concernant le groupe dual unitaire en utilisant la méthode de Stein libre de la section 1.3. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ une suite de variables non-commutatives d'un W^*-espace de probabilités tracial, normalisée telle que $\tau(z_i^* z_i) = 1$, et telle que sa $*$-distribution est invariante par l'action du groupe dual unitaire. Alors, pour k fixé, la distance de Wasserstein non-commutative au sens de Biane et Voiculescu [BV01] entre le vecteur $(z_1, \ldots, z_k)$ et un vecteur de k variables circulaires libres est de l'ordre de

$$\sqrt{Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^* z_i\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

(il est possible de donner une expression explicite). En particulier, pour k fixé, on obtient une convergence en $O(1/n)$ des k premières coordonnées $(\sqrt{n}u_1, \ldots, \sqrt{n}u_k)$ renormalisée d'un vecteur unitaire librement uniforme $(u_1, \ldots, u_n)$. La limite est un vecteur de variables circulaires libres. C'est l'analogue libre du célèbre résultat de Borel, qui identifie une limite gaussienne pour les coordonnées renormalisées d'un point uniformément tiré sur la sphère.

3.2 Indépendances non-commutatives

Entropie booléenne

Le théorème K montre qu'il est possible, pour le modèle du vortex, d'obtenir asymptotiquement l'indépendance booléenne. Plus précisément, l'indépendance booléenne apparaît pour des modèles de matrices aléatoires ayant une majorité de valeurs propres nulles. Cela correspond au troisième volet du triptyque *indépendance statistique classique / indépendance libre / indépendance booléenne* mis en avant par Speicher comme regroupant les trois seules indépendances universelles pour les espaces de probabilités non-commutatifs. Ce résultat ouvre la possibilité de définir une notion d'*entropie booléenne*. De la même manière que l'entropie libre est définie par Voiculescu comme une fonction de taux pour une décroissance exponentielle de probabilité [Voi94], la fonction de taux apparaissant pour des matrices du modèle du vortex est le candidat idéal pour l'entropie booléenne.

Pour une seule matrice, il s'agit d'un problème de grandes déviations pour une matrice de Wigner gaussienne conditionnée à avoir un grand nombre de valeurs propres nulles. Les valeurs propres non-nulles sont alors soumises à une interaction plus faible que la force de répulsion apportées par les valeurs propres nulles. On s'attend à ce que la mesure empirique des valeurs propres non-nulles se stabilise en deux points symétriques autour de 0, que cette convergence soit accompagnée d'un principe de grandes déviations. La fonction de taux correspondante serait minimisée par la mesure de Bernoulli symétrique, ce qui en fait un candidat adapté pour jouer le rôle d'entropie booléenne : la mesure de Bernoulli symétrique étant la mesure qui joue le rôle de la semi-circulaire pour l'indépendance booléenne.

Le problème à plusieurs variables est plus ambitieux : il consiste à quantifier la décroissance exponentielle de probabilité pour plusieurs matrices de Wigner gaussiennes conditionnées comme ci-dessus, qui interagissent entre elles grâce à la symétrie du modèle du vortex. Contrairement à l'entropie libre, la distribution avec laquelle sont calculées les déviations est la distribution d'un état vectoriel, et non pas celle de la trace normalisée. La fonction de taux apparaissant devrait être minimisée pour des variables de Bernoulli sous indépendance booléenne, et pose les questions subsidiaires suivantes : additivité de cette fonctionnelle sous indépendance booléenne, inégalités fonctionnelles de type Talagrand ou log-Sobolev pour cette entropie booléenne, comparaison avec l'approche intrinsèque sans micro-états, etc.

Libertés asymptotiques

Lorsque, comme dans le théorème L, on s'intéresse à l'ordre suivant dans l'asymptotique du modèle du vortex, on est amené à définir une version cyclique de l'indépendance conditionnelle page 24. Nous avons déjà commencé à étudier l'indépendance conditionnelle cyclique en explorant une notion de cumulants qui lui est adaptée. Dans le but de définir ces cumulants qui permettent de linéariser l'indépendance conditionnelle cyclique, nous mettons à jour une version multilinéaire de la transformation inverse de Markov-Krein (voir [Ker97] pour la version classique) qui pourrait se révéler intéressante dans d'autres situations. Puisque l'indépendance booléenne cyclique est un cas particulier de l'indépendance conditionnelle cyclique, on retrouve sans surprise les cumulants d'Arizmendi, Hasebe et Lehner [AHL22] comme cas particulier.

Un cas particulier de cette indépendance conditionnelle cyclique est la liberté infinitésimale, valide pour des matrices unitairement invariantes. Si la liberté asymptotique de Voiculescu est encore valable dans le cas de matrices indépendantes orthogonalement invariantes, ce n'est pas toujours le cas de la liberté infinitésimale. Pour décrire l'ordre infinitésimal dans le cas orthogonal, il faut définir une nouvelle indépendance. En utilisant le calcul de Weingarten, on se rend compte qu'interviennent les distributions des matrices et de leurs transposées. La relation qui apparaît, et qu'on pourrait appeler *liberté infinitésimale réelle* (par opposition au cas complexe), est donc une indépendance pour des espaces de probabilités non-commutatifs $(\mathcal{A}, \tau)$ munis d'une notion de transposée $a \mapsto a^t$. La combinatoire associée, qui permet de définir une bonne notion de cumulants, semble faire intervenir les partitions non-croisées en anneaux [MN04] comme pour la liberté de second-ordre [MS06].

Bien entendu, un espace de trafic est un exemple d'espace de probabilités non-commutatif muni d'une notion de transposée $a \mapsto a^t$, et le théorème N devrait être vrai pour une suite de matrices orthogonalement invariantes qui convergent *avec leurs transposées* en distribution non-commutative : de telles matrices convergeraient également en distribution de trafics. La relation entre la distribution de trafics et la distribution non-commutative initiale nous permettrait de définir un espace de trafics de manière canonique à partir de n'importe quel espace de probabilités non-commutatif $(\mathcal{A}, \tau)$ muni d'une notion de transposée $a \mapsto a^t$, comme dans le théorème O.

Enfin, de même que le théorème P montre asymptotiquement la liberté avec amalgamation pour des matrices aléatoires dont la loi est invariante par permutation des vecteurs de la base canonique, il est plausible qu'une version conditionnelle de la liberté avec amalgamation puisse être montrée pour ces modèles, en utilisant des outils de la théorie des trafics. Plus précisément, une matrice de permutation laisse invariant le vecteur $v_N = (1/\sqrt{N}, \ldots, 1/\sqrt{N})^t$. On peut, comme dans le théorème K, étudier la limite de la distribution des matrices pour l'état vectoriel $\langle \cdot v_N, v_N \rangle$. En théorie des trafics, cet état est appelé *anti-trace*, et se calcule grâce à la distribution de trafics. Par exemple, pour une matrice $A_N = (a_{i,j})_{i,j=1}^N$, les moments sont donnés par

$$\langle A_N^k v_N, v_N \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i_1, \ldots, i_{k+1}=1}^{N} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}} = \tau_N[T(A_N)],$$

où T est le graphe-test

$$T \ : \ \circ \xrightarrow{x} \circ \xrightarrow{x} \circ \cdots \circ \xrightarrow{x} \circ.$$

Pour des produits alternés de matrices indépendantes et invariantes par permutation, l'anti-trace devrait se factoriser (au moins en espérance) lorsque les facteurs ont une diagonale nulle.

Ce serait donc asymptotiquement une *liberté conditionnelle avec amalgamation sur la diagonale* par rapport à D et $\langle \cdot v_N, v_N \rangle$. Un tel résultat, au carrefour des sections 2.1 et 2.2, permettrait d'obtenir une information microscopique (sur les valeurs propres atypiques par exemple) pour le spectre de modèles matriciels anisotropes, comme ceux apparaissant dans les modèles non-linéaires de réseaux de neurones.

3.3 Équations différentielles stochastiques en grande dimension

Les deux problèmes présentés maintenant sont davantage liés à mes travaux de thèse, et utilisent donc des notions qui n'ont pas été définies dans les chapitres précédents. Je serai par conséquent davantage élusif, et renvoie au manuscrit de thèse pour plus de détails.

Solution d'EDS

En partant d'un mouvement brownien $(X_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace des matrices hermitiennes de $M_N(\mathbb{C})$, il est possible de construire d'autres processus matriciels dans $M_N(\mathbb{C})$, solutions d'équations différentielles stochastiques multilinéaires de la forme suivante

$$\mathrm{d}Y_t = f(Y_t) \cdot \mathrm{d}X_t \cdot g(Y_t) + h(Y_t)\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

pour f, g, h des fonctions scalaires bien choisies appliquées à la matrice Y_t par un calcul fonctionnel. Une telle formule se lit coordonnée par coordonnée, c'est-à-dire que pour tout $1 \leq i, j \leq N$, on a l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}Y_t(i,j) = \sum_{k,l} [f(Y_t)](i,k) \cdot \mathrm{d}X_t(k,l) \cdot [g(Y_t)](l,j) + [h(Y_t)](i,j)\mathrm{d}t.$$

Il est possible de donner également un sens aux équations différentielles stochastiques dirigées par un *mouvement brownien libre* $(x_t)_{t\geq 0}$ à travers le calcul stochastique libre, développé en particulier par Biane et Speicher [BS98]. Les processus $(y_t)_{t\geq 0}$ solutions d'équations de la forme

$$\mathrm{d}y_t = f(y_t) \cdot \mathrm{d}x_t \cdot g(y_t) + h(y_t)\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

sont des processus à valeurs opérateurs dans un espace de probabilités non-commutatif.

Il est souvent remarqué qu'un objet matriciel aléatoire converge en grande dimension vers son analogue non-commutatif. La convergence de la distribution non-commutative du processus directeur $(X_t)_{t\geq 0}$ vers $(x_t)_{t\geq 0}$ en grande dimension ouvre la voie à la question suivante : les conditions d'existence et d'unicité posées, la solution $(Y_t)_{t\geq 0}$ de l'équation (3.2) converge-t-elle en distribution non-commutative vers la solution $(y_t)_{t\geq 0}$ de l'équation (3.3) lorsque N tend vers l'infini ? On attend une réponse positive à cette question, mais pour le moment, seuls quelques cas particuliers ont été résolus. Ce résultat est par exemple vrai pour le mouvement brownien unitaire, solution de $\mathrm{d}Y_t = iY_t \cdot \mathrm{d}X_t - \frac{1}{2}Y_t\mathrm{d}t$, qui converge vers le mouvement brownien unitaire libre, solution de $\mathrm{d}y_t = iy_t \cdot \mathrm{d}x_t - \frac{1}{2}y_t\mathrm{d}t$, d'après un résultat de Biane [Bia97]. La résolution de ce problème dans le cas du mouvement brownien sur le groupe linéaire est une de mes contributions [8], et on y reviendra dans la prochaine section.

On voudrait bien obtenir une preuve générale en utilisant un argument de continuité : si la solution $(Y_t)_{t\geq 0}$ de l'équation (3.2) dépend continument de $(X_t)_{t\geq 0}$, la convergence de $(X_t)_{t\geq 0}$ entraînerait automatiquement la convergence de $(Y_t)_{t\geq 0}$. Mais la *fonctionnelle d'Itô*, fonction solution $(X_t)_{t\geq 0} \mapsto (Y_t)_{t\geq 0}$, n'est pas une fonction continue sur l'espace où $(X_t)_{t\geq 0}$ se réalise. Nous sommes en route pour obtenir un résultat global, pour des équations plus générales que celles de la forme (3.2), où les fonctions f, g et h peuvent aussi bien être des fonctions scalaires que des fonctions $\mathcal{C}^2$ non-commutatives de Nikitopoulos [Nik22], ou encore des fonctions $\mathcal{C}^2$ non-commutatives à trace introduites par Jekel, Li et Shlyakhtenko [JLS22].

Mouvement brownien sur le groupe linéaire

Pour finir, revenons sur la convergence en grande dimension du mouvement brownien sur le groupe linéaire. Pour chaque entier N, considérons un mouvement brownien $(Z_t)_{t\geq 0}$ dans $M_N(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que les coefficients de la matrice sont des mouvements browniens complexes indépendants, de variance proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Le mouvement brownien $(G_t)_{t\geq 0}$ sur le groupe linéaire peut être défini à partir de $(Z_t)_{t\geq 0}$ en résolvant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\mathrm{d}G_t = G_t \cdot \mathrm{d}Z_t.$$

De manière analogue, à partir d'un mouvement brownien circulaire $(c_t)_{t\geq 0}$ dans un W^*-espace de probabilités tracial $(\mathcal{A}, \tau)$, on définit le processus $(g_t)_{t\geq 0}$ en résolvant l'équation différentielle stochastique libre suivante :

$$\mathrm{d}g_t = g_t \cdot \mathrm{d}c_t.$$

Le processus $(g_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $(\mathcal{A}, \tau)$ est la limite non-commutative de $(G_t)_{t\geq 0}$ en grande dimension. En effet, pour tout $t \geq 0$ et tout $*$-polynôme P, on a la convergence presque sûre suivante :

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{tr}_N[P(G_t)] = \tau[P(g_t)]. \tag{3.4}$$

Ce résultat est en fait une des contributions scientifiques de mon doctorat. C'est une conséquence de la convergence [8, Theorem 4.6] car la variance décroît en $O(1/N^2)$. La convergence est également vraie pour un $*$-polynôme non-commutatif de $(G_t)_{t\geq 0}$ pris en plusieurs temps.

La question suivante se pose depuis 2013 : peut-on renforcer la convergence de la distribution non-commutative du mouvement brownien sur le groupe linéaire en une *convergence forte* de la distribution ? Le terme de convergence forte est ici celui utilisé en théorie des matrices aléatoires (voir [CM14]). Il consiste à se demander si nous avons, en plus de la convergence de l'équation (3.4), la convergence presque sûre des normes d'opérateurs

$$\lim_{N\to\infty} \|P(G_t)\| = \|P(g_t)\|,$$

et de même pour un $*$-polynôme non-commutatif de $(G_t)_{t\geq 0}$ pris en plusieurs temps. Il semble que tous les outils existent maintenant pour écrire une preuve de ce résultat, ce qui parachève la convergence du mouvement brownien sur le groupe linéaire en grande dimension, et par la même occasion ce mémoire.

Index

Bibliographie

Production scientifique

[1] O. Arizmendi, G. Cébron et G. Nicolas – Combinatorics of cyclic-conditional freeness. *arXiv preprint 2311.13178* (2023).

[2] O. Arizmendi, G. Cébron, R. Speicher et S. Yin – Universality of free random variables : atoms for non-commutative rational functions. *Advances in Mathematics* (À paraître).

[3] B. Au, G. Cébron, A. Dahlqvist, F. Gabriel et C. Male – Freeness over the diagonal for large random matrices. *The Annals of Probability* 49.1 (2021).

[4] M. Banna et G. Cébron – Operator-valued matrices with free or exchangeable entries. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 59.1 (2023).

[5] I. Baraquin, G. Cébron, U. Franz, L. Maassen et M. Weber – De Finetti Theorems for the unitary dual group. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications* 18.67 (2022).

[6] S. Belinschi, C. Bordenave, M. Capitaine et G. Cébron – Outlier eigenvalues for non-Hermitian polynomials in independent iid matrices and deterministic matrices. *Electronic Journal of Probability* 26 (2021).

[7] F. Benaych-Georges, G. Cébron et J. Rochet – Fluctuation of matrix entries and application to outliers of elliptic matrices. *Canadian Journal of Mathematics* 70.1 (2018).

[8] G. Cébron – Free convolution operators and free Hall transform. *Journal of Functional Analysis* 265.11 (2013).

[9] G. Cébron – Matricial model for the free multiplicative convolution. *The Annals of Probability* 44.4 (2016).

[10] G. Cébron – A quantitative fourth moment theorem in free probability theory. *Advances in Mathematics* 380 (2021).

[11] G. Cébron, A. Dahlqvist et F. Gabriel – The generalized master fields. *Journal of Geometry and Physics* 119 (2017).

[12] G. Cébron, A. Dahlqvist et F. Gabriel – Freeness of type B and conditional freeness for random matrices. *Indiana University Mathematics Journal* (À paraître).

[13] G. Cébron, A. Dahlqvist et C. Male – Traffic distributions and independence II : universal constructions for traffic spaces. *Documenta Mathematica* (À paraître).

[14] G. Cébron, M. Fathi et T. Mai – A note on existence of free Stein kernels. *Proceedings of the American Mathematical Society* 148.4 (2020).

[15] G. Cébron et N. Gilliers – Asymptotic cyclic-conditional freeness of random matrices. *Random Matrices : Theory and Applications* DOI :10.1142/S2010326323500144 (À paraître).

[16] G. Cébron et C.-W. Ho – Segal-Bargmann transform : the q-deformation. *Letters in Mathematical Physics* 108.7 (2018).

[17] G. Cébron et T. Kemp – Fluctuations of Brownian motions on $\mathbb{GL}_N$. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 58.1 (2022).

[18] G. Cébron et M. Ulrich – Haar states and Lévy processes on the unitary dual group. *Journal of Functional Analysis* 270.7 (2016).

[19] G. Cébron et M. Weber – Quantum groups based on spatial partitions. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* 32.4 (2023).

Références

[Alt+19] J. Alt, L. Erdős, T. Krüger et Y. Nemish – Location of the spectrum of Kronecker random matrices. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 55.2 (2019), p. 661-696.

[AGZ10] G. W. Anderson, A. Guionnet et O. Zeitouni – *An introduction to random matrices.* 118. Cambridge university press, 2010.

[AHL22] O. Arizmendi, T. Hasebe et F. Lehner – Cyclic independence : Boolean and monotone. *arXiv preprint arXiv :2204.00072* (2022).

[Ati76] M. F. Atiyah – Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. *Astérisque* 32.33 (1976), p. 43-72.

[Au21] B. Au – Finite-Rank Perturbations of Random Band Matrices via Infinitesimal Free Probability. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 74.9 (2021), p. 1855-1895.

[AM20] B. Au et C. Male – Rigid structures in the universal enveloping traffic space. *arXiv preprint arXiv :2011.05472* (2020).

[Bai93] Z. D. Bai – Convergence rate of expected spectral distributions of large random matrices. Part I. Wigner matrices. *The Annals of Probability* (1993), p. 625-648.

[BS10] Z. Bai et J. W. Silverstein – *Spectral analysis of large dimensional random matrices.* T. 20. Springer, 2010.

[BBP05] J. Baik, G. Ben Arous et S. Péché – Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices. *Ann. Probab.* 33.5 (2005), p. 1643-1697.

[Ban15] T. Banica – Liberations and twists of real and complex spheres. *Journal of Geometry and Physics* 96 (2015), p. 1-25.

[BS09] T. Banica et R. Speicher – Liberation of orthogonal Lie groups. *Advances in Mathematics* 222.4 (2009), p. 1461-1501.

[BM20] M. Banna et T. Mai – Hölder continuity of cumulative distribution functions for noncommutative polynomials under finite free Fisher information. *Journal of Functional Analysis* 279.8 (2020), p. 108710.

[BMS17] S. T. Belinschi, T. Mai et R. Speicher – Analytic subordination theory of operator-valued free additive convolution and the solution of a general random matrix problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2017.732 (2017), p. 21-53.

[Bel+17] S. T. Belinschi, H. Bercovici, M. Capitaine et M. Février – Outliers in the spectrum of large deformed unitarily invariant models. *Ann. Probab.* 45.6A (nov. 2017), p. 3571-3625.

[BS12] S. T. Belinschi et D. Shlyakhtenko – Free probability of type B : analytic interpretation and applications. *American Journal of Mathematics* 134.1 (2012), p. 193-234.

[Bel03] S. T. Belinschi – The atoms of the free multiplicative convolution of two probability distributions. *Integral Equations and Operator Theory* 46.4 (2003), p. 377-386.

[BBK19] F. Benaych-Georges, C. Bordenave et A. Knowles – Largest eigenvalues of sparse inhomogeneous Erdős–Rényi graphs. *The Annals of Probability* 47.3 (2019), p. 1653-1676.

[BN11] F. Benaych-Georges et R. R. Nadakuditi – The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices. *Adv. Math.* 227.1 (2011), p. 494-521.

[BN12] F. Benaych-Georges et R. R. Nadakuditi – The singular values and vectors of low rank perturbations of large rectangular random matrices. *J. Multivariate Anal.* 111 (2012), p. 120-135.

[BV98] H. Bercovici et D. Voiculescu – Regularity questions for free convolution. In : *Nonselfadjoint operator algebras, operator theory, and related topics.* Springer, 1998, p. 37-47.

[BS98] P. Biane et R. Speicher – Stochastic calculus with respect to free Brownian motion and analysis on Wigner space. *Probab Theory Related Fields* 112.3 (1998), p. 373-409.

[Bia97] P. Biane – Free brownian motion, free stochastic calculus and random matrice, in free probability theory. *Fields Inst. Commun.* 12 (1997), p. 1-19.

[BGN03] P. Biane, F. Goodman et A. Nica – Non-crossing cumulants of type B. *Transactions of the American Mathematical Society* 355.6 (2003), p. 2263-2303.

[BV01] P. Biane et D. Voiculescu – A free probability analogue of the Wasserstein metric on the trace-state space. *Geometric & Functional Analysis GAFA* 11.6 (2001), p. 1125-1138.

[BM21] J. Bigot et C. Male – Freeness over the diagonal and outliers detection in deformed random matrices with a variance profile. *Information and Inference : A Journal of the IMA* 10.3 (2021), p. 863-919.

[BD17] M. Boedihardjo et K. Dykema – Asymptotic $*$-moments of some random Vandermonde matrices. *Advances in Mathematics* 318 (2017), p. 1-45.

[Bor+21] G. Borot, S. Charbonnier, E. Garcia-Failde, F. Leid et S. Shadrin – Analytic theory of higher order free cumulants. *arXiv preprint arXiv :2112.12184* (2021).

[BC17] S. Bourguin et S. Campese – Free quantitative Fourth Moment Theorems on Wigner space. *International Mathematics Research Notices* (2017), rnx036.

[Boż86] M. Bożejko – Positive definite functions on the free group and the noncommutative Riesz product. *Boll. Un. Mat. Ital. A (6)* 5.1 (1986), p. 13-21.

[BLS96] M. Bożejko, M. Leinert et R. Speicher – Convolution and limit theorems for conditionally free random variables. *Pacific Journal of Mathematics* 175.2 (1996), p. 357-388.

[Bro81] L. G. Brown – Ext of certain free product C*-algebras. *Journal of Operator Theory* (1981), p. 135-141.

[BD68] I. Bucur et A. Deleanu – *Introduction to the Theory of Categories and Functors*. T. 19. John Wiley & Sons, 1968.

[CD18] M. Capitaine et C. Donati-Martin – Spectrum of deformed random matrices and free probability. In : *Advanced Topics in Random Matrices*. Sous la dir. de F. Benaych-Georges, D. Chafaï, S. Péché et B. de Tilière. T. 53. Panoramas et synthèses, 2018.

[Cha+23] I. Charlesworth, R. de Santiago, B. Hayes, D. Jekel, S. K. Elayavalli et B. Nelson – Strong 1-boundedness, L^2-Betti numbers, algebraic soficity, and graph products. *arXiv preprint arXiv :2305.19463* (2023).

[Cha07] S. Chatterjee – A generalization of the Lindeberg principle. *Ann. Probab.* 34.6 (2007), p. 2061-2076.

[CG86] J. Cheeger et M. Gromov – L^2-cohomology and group cohomology. *Topology* 25.2 (1986), p. 189-215.

[Col03] B. Collins – Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary-groups, the itzykson-zuber integral, and free probability. *International Mathematics Research Notices* 2003.17 (2003), p. 953-982.

[CGP22] B. Collins, A. Guionnet et F. Parraud – On the operator norm of non-commutative polynomials in deterministic matrices and iid GUE matrices. *Cambridge Journal of Mathematics* 10.1 (2022), p. 195-260.

[CHS18] B. Collins, T. Hasebe et N. Sakuma – Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 70.3 (2018), p. 1111-1150.

[CM14] B. Collins et C. Male – The strong asymptotic freeness of Haar and deterministic matrices. In : *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. T. 47. 1. Societe Mathematique de France. 2014, p. 147-163.

[CŚ06] B. Collins et P. Śniady – Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. *Communications in Mathematical Physics* 264.3 (2006), p. 773-795.

[Con79] A. Connes – Sur la théorie non commutative de l'intégration. In : *Algebres d'opérateurs*. Springer, 1979, p. 19-143.

[CS05] A. Connes et D. Shlyakhtenko – L^2-homology for von Neumann algebras. *J. Reine Angew. Math.* 586 (2005).

[Cur10] S. Curran – Quantum rotatability. *Transactions of the American Mathematical Society* 362.9 (2010), p. 4831-4851.

[CS11] S. Curran et R. Speicher – Asymptotic Infinitesimal Freeness with Amalgamation for Haar Quantum Unitary Random Matrices. *Communications in Mathematical Physics* 301.3 (2011), p. 627-659.

[DF19] S. Dallaporta et M. Fevrier – Fluctuations Of Linear Spectral Statistics Of Deformed Wigner Matrices. *arXiv preprint arXiv :1903.11324* (2019).

[DLM15] M. Desgroseilliers, O. Lévêque et C. Male – Managing expectations : Freeness and the Fourier matrix. In : *Twelfth International Symposium on Wireless Communication Systems.* 2015.

[DF87] P. Diaconis et D. Freedman – A dozen de Finetti-style results in search of a theory. In : *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques.* T. 23. S2. 1987, p. 397-423.

[Die22] C.-P. Diez – Free Malliavin-Stein-Dirichlet method : multidimensional semicircular approximations and chaos of a quantum Markov operator. *arXiv preprint arXiv :2211.07595* (2022).

[DK94] M. S. Dijkhuizen et T. H. Koornwinder – CQG algebras : a direct algebraic approach to compact quantum groups. *Letters in Mathematical Physics* 32.4 (1994), p. 315-330.

[Dod77] J. Dodziuk – de Rham-Hodge theory for L2-cohomology of infinite coverings. *Topology* 16.2 (1977), p. 157-165.

[EKS19] L. Erdős, T. Krüger et D. Schröder – Random matrices with slow correlation decay. In : *Forum of Mathematics, Sigma.* T. 7. Cambridge University Press. 2019, e8.

[Far+08] R. R. Far, T. Oraby, W. Bryc et R. Speicher – On slow-fading MIMO systems with nonseparable correlation. *IEEE Transactions on Information Theory* 54.2 (2008), p. 544-553.

[Far22] N. Faross – Spatial Pair Partitions and Applications to Finite Quantum Spaces. *Master thesis* (2022).

[FN17] M. Fathi et B. Nelson – Free Stein kernels and an improvement of the free logarithmic Sobolev inequality. *Advances in Mathematics* 317 (2017), p. 193-223.

[Fra06] U. Franz – Multiplicative monotone convolutions, in "Quantum Probability". *Banach Center Publications* 73 (2006), p. 153-166.

[Fre62] D. A. Freedman – Invariants under mixing which generalize de Finetti's theorem. *The Annals of Mathematical Statistics* 33.3 (1962), p. 916-923.

[Fre17] A. Freslon – On the partition approach to Schur-Weyl duality and free quantum groups. *Transformation groups* 22.3 (2017), p. 707-751.

[Gab02] D. Gaboriau – Invariants ℓ^2 de relations d'équivalence et de groupes. *Publications mathématiques de l'IHÉS* 95 (2002), p. 93-150.

[Gab15a] F. Gabriel – A combinatorial theory of random matrices III : random walks on $S(N)$, ramified coverings and the $S(\infty)$ Yang-Mills measure. *arXiv preprint arXiv :1510.01046* (2015).

[Gab15b] F. Gabriel – Combinatorial theory of permutation-invariant random matrices I : Partitions, geometry and renormalization. *arXiv preprint arXiv :1503.02792* (2015).

[Gab15c] F. Gabriel – Combinatorial theory of permutation-invariant random matrices II : cumulants, freeness and Levy processes. *arXiv preprint arXiv :1507.02465* (2015).

[Ge98] L. Ge – Applications of free entropy to finite von Neumann algebras, II. *Annals of Mathematics* 147.1 (1998), p. 143-157.

[Gir98] V. L. Girko – *An introduction to statistical analysis of random arrays.* Vsp, Utrecht, 1998.

[GŁ85] S. Goldstein et A. Łuczak – Continuity of non-commutative stochastic processes. *Probab. Math. Statist* 6 (1985), p. 83-88.

[HT05] U. Haagerup et S. Thorbjørnsen – A new application of random matrices : $Ext(C^*_{red}(F_2))$ is not a group. *Annals of Mathematics* (2005), p. 711-775.

[HFS07] J. W. Helton, R. R. Far et R. Speicher – Operator-valued semicircular elements : solving a quadratic matrix equation with positivity constraints. *International Mathematics Research Notices* 2007.9 (2007).

[Jac07] J. Jacod – Asymptotic properties of power variations of Lévy processes. *ESAIM : Probability and Statistics* 11 (2007), p. 173-196.

[Jaj06] R. Jajte – *Strong limit theorems in noncommutative L2-spaces*. Springer, 2006.

[JLS22] D. Jekel, W. Li et D. Shlyakhtenko – Tracial smooth functions of non-commuting variables and the free Wasserstein manifold. *Dissertationes Mathematicae* 580 (2022), p. 1-150.

[Jon94] V. F. Jones – The Potts model and the symmetric group. *Subfactors (Kyuzeso, 1993)* (1994), p. 259-267.

[Kem+12] T. Kemp, I. Nourdin, G. Peccati et R. Speicher – Wigner chaos and the fourth moment. *Ann. Probab.* 40.4 (2012), p. 1577-1635.

[Ker97] S. Kerov – Interlacing measures. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2* 181 (1997), p. 35-84.

[LNP15] M. Ledoux, I. Nourdin et G. Peccati – Stein's method, logarithmic Sobolev and transport inequalities. *Geometric and Functional Analysis* 25 (2015), p. 256-306.

[Liu18] W. Liu – Operator valued random matrices with free and asymptotic freeness. *arXiv preprint arXiv :1806.04848* (2018).

[Lüc02] W. Lück – *L^2-invariants : theory and applications to geometry and K-theory*. T. 44. Springer, 2002.

[Mal16] S. Malacarne – Woronowicz's Tannaka-Krein duality and free orthogonal quantum groups. *arXiv preprint arXiv :1602.04807* (2016).

[Mal+22] C. Male, J. A. Mingo, S. Péché et R. Speicher – Joint global fluctuations of complex Wigner and deterministic matrices. *Random Matrices : Theory and Applications* 11.02 (2022), p. 2250015.

[Mal17] C. Male – The limiting distributions of large heavy Wigner and arbitrary random matrices. *Journal of Functional Analysis* 272.1 (2017), p. 1-46.

[Mal20] C. Male – *Traffic distributions and independence : permutation invariant random matrices and the three notions of independence*. T. 267. 1300. American mathematical society, 2020.

[Mal21] C. Male – Freeness over the diagonal and global fluctuations of complex Wigner matrices. *arXiv preprint arXiv :2104.06157* (2021).

[MP14] C. Male et S. Péché – Uniform regular weighted graphs with large degree : Wigner's law, asymptotic freeness and graphons limit. *arXiv preprint arXiv :1410.8126* (2014).

[Mar96] P. Martin – The structure of the partition algebras. *Journal of Algebra* 183.2 (1996), p. 319-358.

[McC92] K. McClanahan – C^*-algebras generated by elements of a unitary matrix. *Journal of functional analysis* 107.2 (1992), p. 439-457.

[Mec06] E. Meckes – *An infinitesimal version of Stein's method of exchangeable pairs*. Stanford University, 2006.

[MN04] J. A. Mingo et A. Nica – Annular noncrossing permutations and partitions, and second-order asymptotics for random matrices. *International Mathematics Research Notices* 2004.28 (2004), p. 1413-1460.

[MP16] J. A. Mingo et M. Popa – Freeness and the transposes of unitarily invariant random matrices. *Journal of Functional Analysis* 271.4 (2016), p. 883-921.

[MS06] J. A. Mingo et R. Speicher – Second order freeness and fluctuations of random matrices : I. Gaussian and Wishart matrices and cyclic Fock spaces. *Journal of Functional Analysis* 235.1 (2006), p. 226-270.

[MS12] J. A. Mingo et R. Speicher – Sharp bounds for sums associated to graphs of matrices. *Journal of Functional Analysis* 262.5 (2012), p. 2272-2288.

[MS17] J. A. Mingo et R. Speicher – *Free probability and random matrices*. T. 35. Springer, 2017.

[Mur01] N. Muraki – Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* 4.01 (2001), p. 39-58.

[MV36] F. J. Murray et J. Von Neumann – On rings of operators. *Annals of Mathematics* (1936), p. 116-229.

[MV37] F. J. Murray et J. Von Neumann – On rings of operators. II. *Transactions of the American Mathematical Society* 41.2 (1937), p. 208-248.

[MV43] F. J. Murray et J. Von Neumann – On rings of operators. IV. *Annals of Mathematics* (1943), p. 716-808.

[NSS02] A. Nica, D. Shlyakhtenko et R. Speicher – R-cyclic families of matrices in free probability. *Journal of Functional Analysis* 188.1 (2002), p. 227-271.

[NS06] A. Nica et R. Speicher – *Lectures on the combinatorics of free probability*. T. 13. Cambridge University Press, 2006.

[Nik22] E. A. Nikitopoulos – Itô's formula for noncommutative C^2 functions of free Itô processes. *Documenta Mathematica* 27 (2022), p. 1447-1507.

[Noi21] N. Noiry – Spectral measures of spiked random matrices. *Journal of Theoretical Probability* 34.2 (2021), p. 923-952.

[NP09] I. Nourdin et G. Peccati – Stein's method on Wiener chaos. *Probab. Theory Relat. Fields* 145.1-2 (2009), p. 75-118.

[NP05] D. Nualart et G. Peccati – Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann. Probab.* 33.1 (2005), p. 177-193.

[Ora07] T. Oraby – The spectral laws of Hermitian block-matrices with large random blocks. *Electron. Commun. Probab.* 12 (2007), p. 465-476.

[Péc06] S. Péché – The largest eigenvalue of small rank perturbations of Hermitian random matrices. *Probab. Theory Related Fields* 134.1 (2006), p. 127-173.

[Rei99] H. Reich – Group von Neumann algebras and related algebras. Thèse de doct. University of Göttingen, 1999.

[Rya98] Ø. Ryan – On the limit distributions of random matrices with independent or free entries. *Communications in Mathematical Physics* 193 (1998), p. 595-626.

[Sak12] S. Sakai – *C*-algebras and W*-algebras*. Springer Science & Business Media, 2012.

[Sch95] M. Schürmann – Direct sums of tensor products and non-commutative independence. *Journal of Functional Analysis* 133.1 (1995), p. 1-9.

[Sch06] M. Schürmann – *White noise on bialgebras*. Springer, 2006.

[Shl18] D. Shlyakhtenko – Free probability of type B and asymptotics of finite-rank perturbations of random matrices. *Indiana University Mathematics Journal* 67.7 (2018).

[Shl96] D. Shlyakhtenko – Random Gaussian band matrices and freeness with amalgamation. *International Mathematics Research Notices* 1996.20 (1996), p. 1013-1025.

[SS15] D. Shlyakhtenko et P. Skoufranis – Freely independent random variables with non-atomic distributions. *Transactions of the American Mathematical Society* 367.9 (2015), p. 6267-6291.

[SW97] R. Speicher et R. Woroudy – Boolean convolution. *Fields Inst Commun.* 12 (1997), p. 267-279.

[Ste72] C. Stein – A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In : *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* 1972, p. 583-602.

[TW17] P. Tarrago et M. Weber – Unitary easy quantum groups : the free case and the group case. *International Mathematics Research Notices* 2017.18 (2017), p. 5710-5750.

[Tho00] S. Thorbjørnsen – Mixed Moments of Voiculescu's Gaussian Random Matrices. *Journal of Functional Analysis* 176.2 (2000), p. 213-246.

[Van14] A. Van Daele – Locally compact quantum groups. A von Neumann algebra approach. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications* 10 (2014), p. 082.

[Voi85] D. Voiculescu – Symmetries of some reduced free product C*-algebras. In : *Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory*. Springer, 1985, p. 556-588.

[Voi87] D. Voiculescu – Dual algebraic structures on operator algebras related to free products. *Journal of Operator Theory* (1987), p. 85-98.

[Voi91] D. Voiculescu – Limit laws for random matrices and free products. *Inventiones mathematicae* 104.1 (1991), p. 201-220.

[Voi94] D. Voiculescu – The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, II. *Inventiones mathematicae* 118.1 (1994), p. 411-440.

[Voi95] D. Voiculescu – Operations on certain non-commutative operator-valued random variables. *Astérisque* 232.1 (1995), p. 243-275.

[Voi96] D. Voiculescu – The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory III : The absence of Cartan subalgebras. *Geometric & Functional Analysis GAFA* 6.1 (1996), p. 172-199.

[VDN92] D. Voiculescu, K. Dykema et A. Nica – *Free random variables*. 1. American Mathematical Soc., 1992.

[VSW16] D. Voiculescu, N. Stammeier et M. Weber – *Free probability and operator algebras*. European Mathematical Society, 2016.

[Von30] J. Von Neumann – Zur algebra der funktionaloperationen und theorie der normalen operatoren. *Mathematische Annalen* 102.1 (1930), p. 370-427.

[Von40] J. Von Neumann – On rings of operators. III. *Annals of Mathematics* (1940), p. 94-161.

[Wal73] W. von Waldenfels – *An approach to the theory of pressure broadening of spectral lines*. Springer, 1973.

[Wan95] S. Wang – Free products of compact quantum groups. *Communications in Mathematical Physics* 167.3 (1995), p. 671-692.

[Wig58] E. P. Wigner – On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics* (1958), p. 325-327.

[Wor87] S. L. Woronowicz – Compact matrix pseudogroups. *Communications in Mathematical Physics* 111.4 (1987), p. 613-665.

[Wor88] S. L. Woronowicz – Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. *Inventiones mathematicae* 93.1 (1988), p. 35-76.