Probabilités et Statistique **2011-2012**
Préorientation IMACS 2ème année

Feuille d'exercices 1
Dénombrement, probabilités et probabilités conditionnelles

Exercice 1. On tire au hasard trois cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité pour que la couleur des trois cartes soit trèfle ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins deux cartes de même couleur (pique, coeur, carreau, trèfle) ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un as, un roi et un coeur ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?

Exercice 2. Si l'on considère qu'il y a 365 jours dans une année, quelle est la probabilité de trouver, dans un groupe de n personnes prises au hasard, au moins deux avec le même jour anniversaire?

Exercice 3. Le sultan dit à Ali Baba: "Voici deux urnes, 4 boules blanches et 4 boules noires. Répartis toi-même les boules dans les urnes. Je rendrai ensuite les urnes indiscernables et tu tireras une seule boule d'une seule des urnes. Tu auras la vie sauve si la boule est blanche".

1. Calculer la probabilité que Ali Baba ait la vie sauve dans chacun des cas suivants:
   (a) il place les 4 boules blanches dans une urne et les 4 noires dans l'autre urne;
   (b) il place 2 boules blanches et 2 boules noires dans chaque urne;
   (c) il place 3 boules blanches dans une urne et puis 1 boule blanche et 4 boules noires dans l'autre urne.
2. Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances?

Exercice 4. On suppose qu'à chaque naissance il y a une même probabilité p pour que le bébé soit un garçon, avec $0 < p < 1$. On suppose aussi que les différentes naissances sont indépendantes. On considère les événements A: "le premier enfant est une fille", B: "le deuxième enfant est un garçon" et C: "les deux enfants sont de même sexe".

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants.
2. Montrer que les événements B et C sont indépendants si et seulement si $p = 1/2$.
3. Montrer que pour $p = 1/2$ les événements A et C sont aussi indépendants.
4. Pour p quelconque dans $]0, 1[$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$. Les événements A, B et C sont-ils indépendants en leur ensemble?

Exercice 5. Un système S est constitué de deux sous-systèmes A et B placés en parallèle, le sous-système A étant composé de composants électroniques A_1, A_2 et A_3 placés en série. On suppose que pour $i = 1, 2, 3$, la probabilité que le composant A_i fonctionne au bout d'un an est de 0.9, indépendamment des autres composants. De plus, on admet que la probabilité que le composant B fonctionne au bout d'un an est de 0.95 si le système A fonctionne à ce moment, et de 0.8 sinon. On considère les événements suivants:

- F : "le système S fonctionne au bout d'un an";
- F_X : "le sous-système X fonctionne au bout d'un an", pour $X = A$ ou B.

Calculer les probabilités suivantes: $\mathbb{P}(F_B)$, $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(F_B|F)$ et $\mathbb{P}(F \cap F_A^C)$.

Exercice 6. Un système de communication transmet 3 signaux s_1, s_2 et s_3 avec la même probabilité. La réception est parfois erronnée à cause du bruit. On a trouvé, expérimentalement, que la probabilité de recevoir le signal s_j sachant que le signal s_i ait été émis est donnée par l'entrée (i, j) du tableau suivant:

		Réception		
		s_1	s_2	s_3
Émission	s_1	0.8	0.1	0.1
	s_2	0.05	0.9	0.05
	s_3	0.02	0.08	0.9

1. Calculer la probabilité de recevoir le signal s_2.
2. Calculer la probabilité que le signal s_2 ait été émis, étant donné que le signal s_2 a été reçu.
3. Calculer la probabilité d'avoir une erreur de transmission.
4. Si l'on suppose que les réceptions successives sont indépendantes, quelle est la probabilité de recevoir deux signaux s_2 consécutifs ?