Probabilités et Statistique **2011-2012**
Préorientation IMACS 2ème année

Feuille d'exercices 2
Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Pour maximiser son profit, une compagnie aérienne décide de vendre 100 billets pour 97 places. On suppose que chaque passager annule sa réservation avec une probabilité de 5% et indépendamment des autres passagers. On note X le nombre d'annulations.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Calculer le nombre moyen d'annulations.
3. Quelle est la probabilité pour que tous les passagers aient une place ?

Exercice 2. Une entreprise commercialise des composants électroniques dont la durée de vie est supposée aléatoire. On considère que, dans des conditions d'utilisation 'normales', le composant a une probabilité p de tomber en panne chaque année. Ce comportement est supposé indépendant d'une année sur l'autre pendant toute sa durée de vie. De même, la valeur de p est supposée inchangée pendant toute la période d'utilisation. On note T l'année à laquelle le composant tombe en panne ($T = 1$ si il tombe en panne au cours de la première année, ...).

1. Quelle est la loi de T ?
2. Calculer la durée de vie moyenne d'un composant électronique.
3. Déterminer $\mathbb{P}(T > 3)$, la probabilité que le composant fonctionne au moins 3 ans.
4. Déterminer $\mathbb{P}(T > 5|T > 2)$, la probabilité que le composant fonctionne plus de 5 ans sachant qu'il est en service depuis 2 ans.
5. Comparer les deux probabilités calculées aux questions précédentes et commenter la modélisation de cette durée de vie.

Exercice 3. On suppose cette fois-ci que le composant s'use au fur et à mesure: la valeur de p évolue cette fois-ci avec le temps. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le composant a cette fois-ci une probabilité $\frac{n-1}{n}$ de tomber en panne à l'année n si il fonctionnait à la fin de l'année $n - 1$.

1. Trouver la loi de T (on vérifiera que la somme des probabilités est bien égale à 1).
2. Calculer la durée de vie moyenne d'un composant.

Exercice 4. On considère un système formé de deux composants électroniques montés en série, de probabilités respectives p et p' de tomber en panne chaque année, indépendamment entre eux et d'une année à une autre. Pour $i = 1, 2$ on note T_i l'année à laquelle le composant i tombe en panne. On appelle T l'année à laquelle le système tombe en panne.

1. Exprimer T en fonction de T_1 et T_2.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité que le système fonctionne au moins k ans.
3. En déduire $\mathbb{P}(T = k)$. Quelle est la loi de T?
4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(T_1 \leq T_2)$ que le premier composant tombe en panne avant le deuxième.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et Y une variable aléatoire indépendante de X et telle que :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2.$$

1. On pose $Z = XY$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
2. Calculer l'espérance de Z et vérifier que l'on a bien $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. Calculer la variance de Z.
4. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Z) = 0$.
5. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Le nombre d'oeufs pondus par une tortue au cours d'une ponte est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que chaque oeuf a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'arriver à éclosion, indépendamment des autres et du nombre d'oeufs pondus. Pour chaque i, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème oeuf est arrivé à éclosion, et 0 sinon. Enfin, on note Y le nombre de bébés tortues issus d'une ponte.

1. Quelle loi suivent les variables aléatoires Y_i?
2. Écrire Y en fonction de X et des Y_i.
3. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = j\}$, pour j entier fixé ?
4. En déduire la loi de Y.

Exercice 7. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs μ et λ. On cherche à déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.

1. Calculer $\mathbb{P}(S = k)$ pour toute valeur possible de k. Quelle loi suit S?
2. Calculer les fonctions caractéristiques de X et Y. En déduire la fonction caractéristique de S et puis sa loi.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{S = n\}$.