Probabilités et Statistique **2011-2012**
Préorientation IMACS 2ème année

Feuille d'exercices 3
Variables aléatoires continues

Exercice 1. Loi uniforme
Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ telle que, pour tout intervalle inclu dans $[0,1]$, la probabilité que U appartienne à cet intervalle est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.

1. Déterminer la fonction de répartition de U, sa densité de probabilité, son espérance et sa variance.
2. Les mêmes questions pour la loi uniforme sur un intervalle quelconque $[a,b]$.
3. Soit U de loi uniforme sur $[0,1]$ et $X = -\frac{\ln(U)}{\lambda}$, avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de X.

Exercice 2. On suppose que la durée de vie T (exprimée en minutes) d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour déterminer l'espérance de vie d'un composant, on teste un grand nombre de composants et l'on obtient le résultat suivant : 2% des composants ont une durée de vie inférieure à 161 heures et 37 minutes. Déterminer l'espérance de vie d'un composant électronique.
2. Déterminer le nombre t_0 tel que $\mathbb{P}(T \geq t_0) = 0,85$.
3. Sachant que le composant était encore en fonction à la date t_0, quelle est la probabilité qu'il le soit encore à la date $t_1 = 5000$ heures ? Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3. Loi logistique
Soit X une variable aléatoire ayant pour densité la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+ke^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que le graphique de f_X est symétrique autour de l'axe Oy.
2. Déterminer la constante k pour que f_X soit bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la fonction de répartition de X, sa médiane et son espérance.
4. Donner une explication pour ces valeurs de la médiane et de l'espérance.

Exercice 4. Loi de Cauchy
Soit X une variable aléatoire de densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \frac{c}{1+x^2}.$$

1. Montrer que f_X est une fonction paire et déterminer la constante c pour que f_X soit effectivement une densité de probabilité.
2. Pour quelles valeurs de k la variable aléatoire X admet-elle un moment d'ordre k?

Exercice 5. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite, de densité donnée par

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que f_Z est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la médiane, l'espérance et la variance de Z.
3. Montrer que la fonction caractéristique Z est donnée par

$$\phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Déduire des questions précédentes la médiane, l'espérance, la variance et la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi normale de paramètres m et $\sigma^2 > 0$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. On pose $Y = X^2$.

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
2. Exprimer la fonction de répartition de Y à l'aide de la fonction de répartition de X.
3. En déduire la densité de probabilité de Y.

Exercice 7. Un ascenseur peut porter une charge de 500 kg. On admet que le poids (en kilogrammes) d'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur peut être représenté par une variable aléatoire X de loi normale de paramètres m et σ^2, avec $m = 75$ kg et $\sigma = 4$ kg. Quel est le nombre maximal de personnes que l'on peut autoriser à monter ensemble dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-6} ?

On donne pour Z de loi normale centrée réduite: $\mathbb{P}(Z > 4,75) = 10^{-6}$.