Probabilités et Statistique **2011-2012**
Préorientation IMACS 2ème année

Feuille d'exercices 4
Vecteurs aléatoires

Exercice 1. Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et ε une variable aléatoire indépendante de Z telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. On pose $X = \varepsilon Z$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X et la covariance $\mathrm{Cov}(X, Z)$.
2. Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de celle de Z. En déduire la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > 1,\ X > 1)$. Les variables X et Z sont-elles indépendantes?

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi jointe a pour densité

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \mathcal{D}, \end{cases}$$

où $\mathcal{D}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $\mathcal{D} = \{(x, y) : y \geq x \geq 0\}$.

1. Vérifier que $f_{X,Y}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$ et $\mathbb{P}(2X \leq Y)$.
3. Déterminer les lois marginales de X et Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes?
4. Pour toute valeur y possible, déterminer la densité et l'espérance conditionnelles de X sachant $\{Y = y\}$.
5. Pour toute valeur x possible, déterminer la densité et l'espérance conditionnelles de Y sachant $\{X = x\}$.

Exercice 3. Un système électronique est formé de deux composants montés en série. Pour $i = 1, 2$, on note T_i la durée de vie du composant i. On suppose que ces durées de vie sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. On appelle T la durée de vie du système.

1. Exprimer T en fonction de T_1 et T_2.
2. Déterminer la fonction de répartition de T et en déduire sa loi.
3. Calculer $\mathbb{P}(T_1 \leq T_2)$. Que représente cette probabilité?

Exercice 4. Entre 8h et 9h un système de communication doit recevoir n signaux $s_1, \dots, s_n$, mais pas forcément dans cette ordre. On note U_i l'instant auquel le signal s_i est réceptionné. On suppose que les variables aléatoires $U_1, \dots, U_n$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit S et T les instants de reception du premier et respectivement dernier signal.

1. Exprimer S et T en fonction des variables aléatoires U_i.
2. Pour $t \in [0, 1]$, soit Y_t le nombre de signaux réceptionnés avant l'instant t. Quelle est la loi de Y_t?
3. Pour $t \in [0, 1]$, exprimer $\mathbb{P}(S \leq t)$ et $\mathbb{P}(T \leq t)$ à l'aide de la variable aléatoire Y_t et puis calculer ces probabilités.
4. En déduire les densités de probabilité et les espérances des variables aléatoires S et T.

Exercice 5. Coefficient de corrélation linéaire
Soit (X, Y) un couple aléatoire tel que $Y = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. On considère ε une variable aléatoire modélisant un bruit d'observation, supposée indépendante de X et d'espérance nulle. On note $Y' = Y + \varepsilon$ la variable aléatoire représentant la variante de Y en présence du bruit. On suppose de plus que X et ε admettent une variance.

On souhaite déterminer, en fonction du bruit ε, le comportement du coefficient de corrélation

$$\rho(X, Y') = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y')}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y')}}.$$

1. Combien vaut $\rho(X, Y)$?
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y')$. Que remarquez-vous?
3. Calculer $\rho(X, Y')$.
4. Pour $n \geq 1$, considérons $Y_n = Y + \frac{1}{n}\varepsilon$. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que Y_n tend vers Y en probabilité lorsque n tend vers l'infini.
5. Calculer $\rho(X, Y_n)$ pour tout $n \geq 1$ et déterminer sa limite lorsque $n \to \infty$.