Probabilités et Statistique **2011-2012**
Préorientation IMACS 2ème année

Feuille d'exercices 5
Convergence et théorèmes limites

Exercice 1. Il est fréquent que le nombre de réservations pour un vol soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement à l'embarquement. Pour profiter de ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. On considère que les comportements des passagers sont indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est de 10%.

Pour chaque vol, on note n le nombre de réservations prises par la compagnie et S_n le nombre de passagers se présentant effectivement à l'embarquement.

1. Donner la loi exacte de la variable aléatoire S_n.
2. Avec quelle loi peut-on approcher la loi de S_n?
3. Déterminer la valeur maximale de n pour que le risque d'avoir des passagers sans place soit inférieur à 1%.

Exercice 2. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec, pour tout n, X_n de loi uniforme sur $[0, \frac{1}{n}]$.

1. Calculer, pour tout n, la fonction caractéristique de X_n.
2. Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi et déterminer la loi limite.
3. Soit $Y_n = nX_n$, pour tout $n \geq 1$. Quelle est la loi de Y_n?
4. Soit $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers une limite que l'on précisera.
5. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
6. Montrer que, pour n grand, S_n suit approximativement une loi normale dont on donnera les paramètres.

Exercice 3. Soit $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$X_n = n \min(U_1, \dots, U_n).$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X_n, pour tout n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_n$.
3. Montrer que si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $1 - U$ suit la même loi.
4. Étudier la convergence en loi de la suite $Y_n = n\,(1 - \max(U_1, \dots, U_n))$.

Exercice 4. On veut montrer, de façon probabiliste, la convergence suivante:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1, alors pour tout n,

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

2. À l'aide du théorème central limite, montrer la convergence énoncée.