Correction CC1 de MAS 1 et 2

24 avril 2012

Exc. 1

(1) a) $\forall \ i = 1, \dots, N-1$,

$p_{i,i+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i)$

$= \mathbb{P}$(l'individu choisi pour avoir 2 descendants est de type A et le 2ème individu choisi est a)

$$= \frac{i(1+s)}{i(1+s) + N - i} \times \frac{N-i}{N} = \boxed{\frac{i(N-i)(1+s)}{N(N+is)}}.$$

la cte de proportionnalité

$p_{i,i-1} = \mathbb{P}$(le premier ind. choisi est de type a et le 2ème de type A)

$$= \frac{N-i}{i(1+s)+N-i} \times \frac{i}{N} = \boxed{\frac{i(N-i)}{N(N+is)}}.$$

On a bien $\underline{p_{i,i+1} = (1+s)\, p_{i,i-1}}$

b) $P = (p_{ij})_{0 \le i,j \le N}$

- pour chaque $1 \le i \le N-1$ on a :
  - $p_{i,i-1} = \dfrac{i(N-i)}{N(N+is)}$
  - $p_{i,i+1} = \dfrac{i(N-i)}{N(N+is)}(1+s)$
  - $p_{i,i} = 1 - p_{i,i-1} - p_{i,i+1}$
    $= \dfrac{i^2(1+s) + (N-i)^2}{N(N+is)}$
  - $p_{ij} = 0, \ \forall \ |i-j| > 1$

- pour $i=0$: $p_{00} = 1$
- pour $i=N$: $p_{NN} = 1$

) $\underline{0 \text{ et } N \text{ sont des états absorbants}}$

c) $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n)$

car chaîne de Markov

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = i) = (i-1)\, p_{i,i-1} \overset{2}{+} i\, p_{ii} + (i+1)\, p_{i,i+1}$$

$$= (\cancel{i}-1)\, p_{i,i-1} + i\left(1 - \cancel{p_{i,i-1}} - (1+s)\, p_{i,i-1}\right) + (i+1)(1+s)\, p_{i,i-1}$$

$$= -p_{i,i-1} + i - \cancel{i(1+s)\, p_{i,i-1}} + \cancel{i(1+s)\, p_{i,i-1}} + (1+s)\, p_{i,i-1}$$

$$= i + s\, p_{i,i-1} \ \underline{\geq i}, \quad \forall\, i = 1, \dots, N-1$$

- pour $i=0$: $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = 0) = 0$
- pour $i = N$: $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = N) = N$.

↳ $\forall\, i = 0, \dots, N$ on a $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = i) \geq i$

↳ $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n) \geq X_n \implies (X_n)_n$ <u>sous-martingale</u>.

d) $(X_n)_n$ sous-martingale <u>bornée</u> (par N)

↳ $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} X_\infty$.

avec $X_\infty \in \{0, N\}$
(les états absorbants).

e) $g_0 = \mathbb{P}(X_\infty = N \mid X_0 = 0) = 0$

$g_N = \mathbb{P}(X_\infty = N \mid X_0 = N) = 1$.

Par la propriété de Markov on a :

$$\underline{g_i} = p_{i,i-1} \times \mathbb{P}(X_\infty = N \mid X_1 = i-1, X_0 = i) + p_{ii} \times \mathbb{P}(X_\infty = N \mid X_1 = i, X_0 = i) + p_{i,i+1} \times \mathbb{P}(X_\infty = N \mid X_1 = i+1, X_0 = i)$$

formule des probas totales

la propr. de Markov

$$= \underline{p_{i,i-1}\, g_{i-1} + p_{ii}\, g_i + p_{i,i+1}\, g_{i+1}}.$$

f) On obtient (en utilisant $p_{i,i+1} = (1+s)\, p_{i,i-1}$, $p_{ii} = 1 - (2+s)\, p_{i,i-1}$)

$$\cancel{g_i} = p_{i,i-1}\, g_{i-1} + \left[\cancel{1} - (2+s)\, p_{i,i-1}\right] g_i + (1+s)\, p_{i,i-1}\, g_{i+1}$$

$p_{i,i-1} > 0$ si $i \neq 0$, $\neq N$

$$\implies g_{i-1} - (2+s)\, g_i + (1+s)\, g_{i+1} = 0$$

$\Rightarrow (1+s)\left(g_{i+1} - g_i\right) = g_i - g_{i-1} \Rightarrow \underbrace{g_{i+1} - g_i = \frac{1}{1+s}\left(g_i - g_{i-1}\right)}$

g) $\left(g_{i+1} - g_i\right)_i$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{1+s}$

$\Rightarrow \underline{g_{i+1} - g_i} = \frac{1}{(1+s)^i}\left(g_1 - g_0\right) = \underbrace{\frac{1}{(1+s)^i} g_1}$, $\forall\, i = 1, \ldots, N-1$.

$g_0 = 0$

$\Rightarrow g_{i+1} = g_i + \frac{1}{(1+s)^i} g_1$

$\Rightarrow g_k = g_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(1+s)^i} g_1 = g_1 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(1+s)^i}$

$\forall\, \underline{k = 2, \ldots, N}$ $\quad = g_1 \cdot \dfrac{1 - \frac{1}{(1+s)^k}}{1 - \frac{1}{1+s}}$.

Mais on sait que $\underline{g_N = 1}$

$\hookrightarrow g_1 \cdot \dfrac{1 - \frac{1}{(1+s)^N}}{1 - \frac{1}{1+s}} = 1 \Rightarrow g_1 = \dfrac{1 - \frac{1}{1+s}}{1 - \frac{1}{(1+s)^N}}$.

$\hookrightarrow \underbrace{g_k = \dfrac{1 - (1+s)^{-k}}{1 - (1+s)^{-N}}}$, $\forall\, k = 2, \ldots, N$.

la formule est valable aussi pour $k = 0$ et 1.

② a) $\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{deux indiv. donnés} \\ \text{aient le même parent}\end{array}\right) =$

$= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \times \frac{1}{C_N^2} = \frac{N-1}{N} \times \frac{2}{N(N-1)} = \boxed{\frac{2}{N^2}}$.

la proba d'avoir un événement de coalescence dans la population (les 2 individus choisis à la gén. précédente sont distincts)

la proba que les 2 descendants soient exactement les individus donnés

$T'_2 \sim$ Géométrique $\left(\frac{2}{N^2}\right)$, car les différentes générations sont indép. et on a la même proba $\frac{2}{N^2}$ à chaque fois.

b) $\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{il y ait 2 indiv.} \\ \text{parmi les } m \text{ qui} \\ \text{ont le même} \\ \text{parent}\end{array}\right) = C_m^2 \times \frac{2}{N^2}$.

$T'_m \sim$ Géométrique $\left(C_m^2 \times \frac{2}{N^2} \right)$.

c) $\mathbb{P}\left(\frac{2T'_m}{N^2} > t \right) = \mathbb{P}\left(T'_m > \frac{N^2 t}{2} \right) = \mathbb{P}\left(T'_m > \left[\frac{N^2 t}{2} \right] \right)$

$\forall t > 0$:

$$= \left(1 - C_m^2 \cdot \frac{2}{N^2}\right)^{\left[\frac{N^2 t}{2}\right]} \xrightarrow[N \to \infty]{} \exp\left(-C_m^2 t\right).$$

$$\hookrightarrow \frac{2T'_m}{N^2} \xrightarrow[N \to \infty]{\mathcal{L}oi} \mathcal{E}xpo\left(C_m^2\right).$$

d) $H_m = T_m + T_{m-1} + \ldots + T_2$, avec T_k indép. et de loi $T_k \sim \mathcal{E}xpo\left(C_k^2\right)$.

$$\hookrightarrow \mathbb{E}(H_m) = \sum_{k=2}^{m} \mathbb{E}(T_k) = \sum_{k=2}^{m} \frac{2}{k(k-1)}$$

$$= 2 \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$