Exercice 2 du CC1 de Modèles et Algorithmes Stochastiques

1. Sur l'événement, $\{X_n = x, X_{n+1} = x'\}$,

$Y_n = \frac{(x+x')}{2} U_{n+1}$. Ainsi, comme U_{n+1} est indépendant de X_n et X_{n+1}, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y_n = y / X_n = x, X_{n+1} = x') = \mathbb{P}\left(\frac{x+x'}{2} \cdot U_{n+1} = y\right).$$

$$\Rightarrow Q(x, x', y) = \begin{cases} p & \text{si } y = \frac{x+x'}{2} \\ 1-2p & \text{si } y = 0 \\ p & \text{si } y = -\frac{x+x'}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Conditionnellement à X_n et X_{n+1}, Y_n dépend uniquement de U_{n+1} qui est indépendant de $Y_{0:n-1}$ d'où le résultat. De manière plus explicite, on peut démontrer ce résultat en écrivant :

$$\mathbb{P}(Y_n = y, X_n = x, X_{n+1} = x', Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}) = \mathbb{P}\left(\frac{x+x'}{2} U_{n+1} = y, X_n = x, X_{n+1} = x', Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{x+x'}{2} U_{n+1} = y\right) \cdot \mathbb{P}(X_n = x, X_{n+1} = x', Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})$$

$$= \mathbb{P}(Y_n = y / X_n = x, X_{n+1} = x') \cdot \mathbb{P}(X_n = x, X_{n+1} = x', Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}).$$

d'où le résultat (en conditionnant).

3. $$\mathbb{P}(X_n = x / Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}) = \sum_{z \in E} \frac{\mathbb{P}(X_n = x, X_{n-1} = z, Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}{\mathbb{P}(Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}$$

$$= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_n = x / X_{n-1} = z, Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}) \cdot \Pi_{n-1}(y_{0:n-1}, z)$$

Comme $\forall i \leq n-2$, Y_i est fonction de X_i, X_{i+1} et U_{i+1} qui est indépendant de la suite (X_n), et que (X_n) est une chaîne de Markov, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = x / X_{n-1} = z, Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x / X_{n-1} = z, Y_{n-1} = y_{n-1})$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_n = x, X_{n-1} = z, Y_{n-1} = y_{n-1})}{\mathbb{P}(X_{n-1} = z, Y_{n-1} = y_{n-1})} = \frac{\mathbb{P}(Y_{n-1} = y_{n-1} / X_n = x, X_{n-1} = z) \cdot P(z, x)}{\sum_{x' \in E} \mathbb{P}(Y_{n-1} = y_{n-1} / X_{n-1} = z, X_n = x') P(z, x')}$$

$$= \frac{Q(z, x, y_{n-1}) P(z, x)}{\sum_{x' \in E} Q(z, x', y_{n-1}) P(z, x')}.$$

Finalement,

$$\Pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, x) = \sum_{z \in E} \frac{Q(z, x, y_{n-1}) \cdot P(z, x)}{\sum_{x' \in E} Q(z, x', y_{n-1}) P(z, x')} \cdot \Pi_{n-1}(y_{0:n-1}, z).$$

4. $$\mathbb{P}(Y_0 = y_0) = \sum_{x, x' \in E} \mathbb{P}(Y_0 = y_0, X_0 = x, X_1 = x')$$

$$= \sum_{x, x' \in E} Q(x, x', y_0) \cdot P(x, x') \cdot \nu(x)$$

Ainsi,

$$\Pi_0(y_0, x) = \mathbb{P}(X_0 = x / Y_0 = y_0) = \frac{\sum_{x_1 \in E} Q(x, x_1, y_0) P(x, x_1) \nu(x)}{\sum_{x_0, x_1 \in E} Q(x_0, x_1, y_0) P(x_0, x_1) \nu(x_0)}$$

5. $\pi_n(y_{0:n}, x) = P(X_n = x \mid Y_{0:n} = y_{0:n})$

$$= \sum_{z \in E} P(X_n = x, X_{n+1} = z, Y_{0:n} = y_{0:n}) \cdot \frac{1}{P(Y_{0:n} = y_{0:n})}$$

$$= \sum_{z \in E} Q(x, z, y_n) \cdot \underbrace{P(X_{n+1} = z / X_n = x, Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}_{P(x,z)} \cdot \underbrace{P(X_n = x \mid Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}_{\pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, x)} \cdot \frac{P(Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}{P(Y_{0:n} = y_{0:n})}$$

Enfin, $P(Y_{0:n} = y_{0:n}) = \sum_{z', z \in E} P(Y_n = y_n, X_n = z, X_{n+1} = z', Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})$

$$= \sum_{z', z \in E} Q(z, z', y_n) \cdot P(z, z') \cdot \pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, z').$$

En conclusion,

$$\pi_n(y_{0:n}, x) = \frac{\sum_{z \in E} Q(x, z, y_n) \cdot P(x, z) \cdot \pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, x)}{\sum_{z', z \in E} Q(z', z, y_n) \cdot P(z', z)\, \pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, z')}$$