Correction CC 1 de MAS 1

2012 – 2013

Exc. 1

1) a) $p_{i,i+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{un individu}\\ \text{de type A est}\\ \text{choisi pour se}\\ \text{reproduire}\\ \text{et pas de}\\ \text{mutation}\end{array} \text{ et } \begin{array}{l}\text{un indiv.}\\ \text{de type a}\\ \text{est choisi}\\ \text{pour mourir}\end{array}\right)$

$+ \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{un individu}\\ \text{a est choisi}\\ \text{pour se reproduire}\\ \text{et il y a}\\ \text{mutation}\end{array} \text{ et } \begin{array}{l}\text{un indiv. a}\\ \text{est choisi pour}\\ \text{mourir}\end{array}\right)$

$$= \frac{i}{N} \times \frac{N-i}{N-1} \times (1-\theta) + \frac{N-i}{N} \times \frac{N-i-1}{N-1} \times \theta$$

$$= \frac{i(N-i)(1-\theta) + (N-i)(N-i-1)\theta}{N(N-1)}$$

$p_{i,i-1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{un individu a}\\ \text{se reproduit}\\ \text{et pas de mut.}\end{array} \text{ et } \begin{array}{l}\text{un indiv. A}\\ \text{meurt}\end{array}\right)$

$+ \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{un indiv. A se reproduit}\\ \text{et mutation}\end{array} \text{ et } \begin{array}{l}\text{un individu A}\\ \text{meurt}\end{array}\right)$

$$= \frac{N-i}{N} \times \frac{i}{N-1} \times (1-\theta) + \frac{i}{N} \times \frac{i-1}{N-1} \times \theta$$

$$= \frac{i(N-i)(1-\theta) + i(i-1)\theta}{N(N-1)}$$

$\forall\ i = 1, \dots, N-1.$

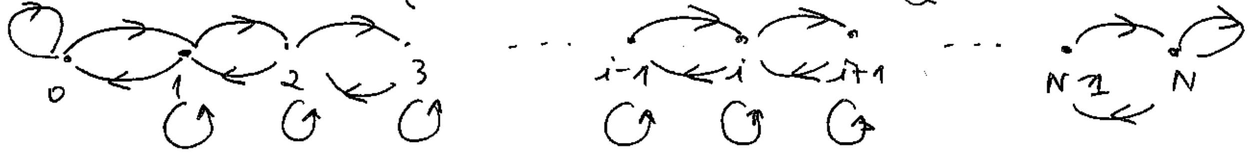
$p_{i,i} = 1 - p_{i,i-1} - p_{i,i+1}$,

$p_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$.

$p_{01} = \theta$, $p_{00} = 1-\theta$

$p_{N,N-1} = \theta$, $p_{NN} = 1-\theta$.

b) $(X_n)_n$ est <u>irréductible</u> car le graphe induit sur $\{0, \dots, N\}$ par la matrice de transition P est connexe. (tous les états communiquent)



CM irréductible
espace d'états fini $\{0, \ldots, N\}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ récurrente positive

$\hookrightarrow$ $\exists!$ proba invariante $\pi > 0$ sur $\{0, \ldots, N\}$.

- $(X_n)_n$ est aussi apériodique car $p_{i,i} > 0$
  (par exemple $p_{00} > 0$)

$\hookrightarrow$ $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \pi$, $\forall$ Loi(X_0).

c) Pour $i = 1, \ldots, N-1$:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = i) = (i+1)\, p_{i,i+1} + i\, p_{i,i} + (i-1)\, p_{i,i-1}$$

$$= i\,(\underbrace{p_{i,i+1} + p_{i,i} + p_{i,i-1}}_{1}) + p_{i,i+1} - p_{i,i-1}$$

$$= i + p_{i,i+1} - p_{i,i-1}$$

$$= i + \frac{\theta\left[(N-i)(N-i-1) - i(i-1)\right]}{N(N-1)}$$

$$= i + \frac{\theta\left[N(N-1) - Ni - i(N-1) + \cancel{i^2} - \cancel{i^2} + i\right]}{N(N-1)}$$

$$= i + \frac{\theta\left[N\cancel{(N-1)} - 2i\cancel{(N-1)}\right]}{N\cancel{(N-1)}} = \frac{Ni + \theta(N-2i)}{N}$$

$$= \theta + \left(1 - \frac{2\theta}{N}\right) i.$$

Pour $i = 0$: $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = 0) = 1 \times \theta + 0 \times (1-\theta) = \theta$

$i = N$: $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = N) = (N-1) \times \theta + N \times (1-\theta) = \left(1 - \frac{2\theta}{N}\right) \cdot N + \theta$

donc la relation donnée est vérifiée pour tout $i = 0, \ldots, N$.

d) On a donc

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n) = \left(1 - \frac{2\theta}{N}\right) X_n + \theta.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n)\big) = \left(1 - \frac{2\theta}{N}\right) \mathbb{E}(X_n) + \theta.$$

e) <u>Démonstration par récurrence :</u>

- Pour $\underline{n=0}$: $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_0)$ la relation est vérifiée.
- On suppose la relation vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

et on veut la montrer pour $n+1$:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)\mathbb{E}(X_n) + \theta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hyp. de récurrence}}}{=} \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)\left\{\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^n \mathbb{E}(X_0) + \frac{N}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^n\right\}\right\} + \theta$$

$$= \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}\mathbb{E}(X_0) + \frac{N}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^n\right\} - \theta\left\{\cancel{1}-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^n\right\} + \cancel{\theta}$$

$$= \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}\mathbb{E}(X_0) + \frac{N}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^n\left[1-\frac{2\theta}{N}\right]\right\}$$

$$= \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}\mathbb{E}(X_0) + \frac{N}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}\right\}.$$

et la relation est vérifiée pour $n+1$ aussi.

<u>Une autre méthode :</u>

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)\mathbb{E}(X_n) + \theta = \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)\left[\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)\mathbb{E}(X_{n-1}) + \theta\right] + \theta$$

$$= \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^2\mathbb{E}(X_{n-1}) + \theta\left\{\left(1-\frac{2\theta}{N}\right) + 1\right\}$$

$$= \dots = \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}\mathbb{E}(X_0) + \theta\left\{\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^k}\right\}$$

suite géométrique $\longrightarrow$ $= \dfrac{1-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}}{1-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)}$

$$= \left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}\mathbb{E}(X_0) + \frac{N}{2} \times \left\{1-\left(1-\frac{2\theta}{N}\right)^{n+1}\right\}.$$

f) Si on fait $n \to \infty$, comme $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \pi$ $\left(\mathbb{P}(X_n = i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_i, \ \forall i = 0, \dots, N\right)$

alors $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=0}^{N} i\,\mathbb{P}(X_n = i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{n} i\,\pi_i = \mathbb{E}(\pi)$

Si on fait $n \to \infty$ dans la relation de la question e)

on obtient $\mathbb{E}(\pi) = \dfrac{N}{2}$. $\left(\text{car } 0 < 1-\frac{2\theta}{N} < 1\right)$.

Une autre façon de justifier que $\mathbb{E}(\pi) = \frac{N}{2}$.

→ On peut montrer même plus que π est symétrique
à cause du fait que la proba de mutation
est la même de A vers a
et de a vers A.

Si on regarde la CM : $(N - X_n)_n$ qui donne le
nb. d'individus de type a,
on peut facilement voir que cette chaîne a la
même matrice de transition que la chaîne $(X_n)_n$.
Elles ont donc la même proba invariante.

$$\mathbb{P}(X_n = i) \longrightarrow \pi_i$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(N - X_n = i) \longrightarrow \pi_i \\ \quad \parallel \\ \mathbb{P}(X_n = N-i) \longrightarrow \pi_{N-i} \end{array}\right\} \rightarrow \pi_i = \pi_{N-i}, \ \forall i = 0, \dots, N.$$

on a donc $\underline{\mathbb{E}(\pi) = \frac{N}{2}}$.

2) a) T_k suit une loi géométrique (p_k),

avec $p_k = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{2 individus parmi} \\ \text{les } k \text{ coalescent} \\ \text{dans la gén. précédente}\end{array}\right)$

$= C_k^2 \times \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{deux individus donnés} \\ \text{coalescent dans la} \\ \text{gén. précédente}\end{array}\right)$

$= C_k^2 \times \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{on a choisi ces deux} \\ \text{individus à la gén. d'avant,} \\ \text{un pour se reproduire et} \\ \text{l'autre pour mourir}\end{array}\right)$

$$= C_k^2 \times \frac{1}{C_N^2} = \frac{C_k^2}{C_N^2}.$$

b) On cherche $\mathbb{E}(\underbrace{\tau_k + \tau_{k-1} + \dots + \tau_2}_{\tau_{PRAC}})$,

avec $(\tau_i)_i$ indép. et $\tau_i \sim \text{Géom.}\left(\frac{C_i^2}{C_N^2}\right)$.

On a $\mathbb{E}(\tau_i) = \dfrac{C_N^2}{C_i^2}$.

$$\hookrightarrow \mathbb{E}(\tau_{PRAC}) = \sum_{i=2}^{k} \mathbb{E}(\tau_i) = \left(\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{C_i^2}\right) \times C_N^2$$

$$= N(N-1) \times \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i(i-1)}$$

$$= N(N-1) \times \sum_{i=2}^{k} \left[\frac{1}{(i-1)} - \frac{1}{i}\right]$$

$$= \boxed{N(N-1) \times \left(1 - \frac{1}{k}\right)}$$