Correction CC2 MAS, 4 GMM-MMS

2011 – 2012

Exc. 2

1) $(Q_p)_{i,i} = (1-p)\cdot\frac{i}{2N} + (1-p)\cdot\left(1-\frac{i}{2N}\right) = 1-p$, $\forall\, i = 0,\dots,2N$

$(Q_p)_{i,i-1} = p\cdot\frac{i}{2N}$, si $1 \leq i \leq 2N$

$(Q_p)_{i,i+1} = p\cdot\left(1-\frac{i}{2N}\right)$, si $0 \leq i \leq 2N-1$.

$Q_p = p\,Q_1 + (1-p)I$, où Q_1 est la matrice de transition de la chaîne d'Ehrenfest classique. $(p=1)$

2) $\left.\begin{array}{l}(Q_p)_{ij} > 0 \text{ si } (Q_1)_{ij} > 0 \\ Q_1 \text{ est irréductible}\end{array}\right\} \Rightarrow Q_p$ est irréductible (tous les états communiquent pour Q_1 $\Rightarrow$ ils communiquent aussi pour Q_p)

3) $\left.\begin{array}{l}(Q_p)_{ii} = 1-p > 0 \text{ si } p < 1 \\ \forall\, i\end{array}\right\} \Rightarrow Q_p$ est apériodique.

4) On cherche μ t.q. $\mu_i (Q_p)_{ij} = \mu_j (Q_p)_{ji}$, $\forall\, i,j$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_i\cdot p\cdot(Q_1)_{ij} = \mu_j\, p\,(Q_1)_{ji}, & \text{pour } i\neq j \\ \mu_i(1-p) = \mu_j(1-p), & \text{avec } i=j \text{ (toujours vérifiée)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \mu_i (Q_1)_{ij} = \mu_j (Q_1)_{ji}$, $\forall\, i\neq j$

$\Leftrightarrow Q_1$ est réversible par rapport à μ

$\Rightarrow \mu = \mathcal{B}\left(2N, \frac{1}{2}\right)$.

5) (X_n) irréductible sur un espace d'états fini $\Rightarrow$ récurrente positive.
En plus, (X_n) est apériodique $\Rightarrow$ converge en loi vers l'unique mesure invariante.

Q_p est réversible par rapport à μ $\rightarrow$ μ proba invariante

$\rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{B}\left(2N, \frac{1}{2}\right)$.

6) $t_m(m) = \mathbb{E}_m(T_m) = \dfrac{1}{\mu_m} = \dfrac{1}{C_{2N}^m} \cdot 2^{2N}$.

$$t_k(m) = \mathbb{E}_k(T_m) = \mathbb{E}_k\left(T_m \mid X_1 = k\right) \times \mathbb{P}\left(X_1 = k \mid X_0 = k\right)$$
$$+ \mathbb{E}_k\left(T_m \mid X_1 = k-1\right) \times \mathbb{P}\left(X_1 = k-1 \mid X_0 = k\right)$$
$$+ \mathbb{E}_k\left(T_m \mid X_1 = k+1\right) \times \mathbb{P}\left(X_1 = k+1 \mid X_0 = k\right)$$

$$= \mathbb{E}_k\left(1 + T'_m \mid X_1 = k\right) \times (1-p) + \mathbb{E}_k\left(1 + T'_m \mid X_1 = k-1\right) \times p \cdot \frac{k}{2N}$$
$$+ \mathbb{E}_k\left(1 + T'_m \mid X_1 = k+1\right) \times p\left(1 - \frac{k}{2N}\right),$$

où $T'_m = \inf\left\{n \geq 1 : X_{n+1} = m\right\}$

propriété de Markov

$$= 1 + \mathbb{E}_k(T_m)\cdot(1-p) + \mathbb{E}_{k-1}(T_m)\cdot p \times \frac{k}{2N} + \mathbb{E}_{k+1}(T_m)\cdot p\left(1 - \frac{k}{2N}\right)$$
$$= 1 + (1-p)\,t_k(m) + p \times \frac{k}{2N}\, t_{k-1}(m) + p\left(1 - \frac{k}{2N}\right) t_{k+1}(m).$$

$$\hookrightarrow \boxed{p\, t_k(m) = 1 + p \cdot \frac{k}{2N}\, t_{k-1}(m) + p\left(1 - \frac{k}{2N}\right) t_{k+1}(m)} \quad \text{si } 1 \leq k < m-1.$$

De la même façon on obtient

- pour $\boxed{k=0}$: $t_0(m) = 1 + (1-p)\,t_0(m) + p\, t_1(m)$

$m \geq 2$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{p\, t_0(m) = 1 + p\, t_1(m)}$.

$m = 1$: $t_0(1) = (1-p)\left(1 + t_0(1)\right) + p \cdot 1 = 1 + (1-p)\,t_0(1)$

$p\, t_0(1) = 1 \Rightarrow \boxed{t_0(1) = \frac{1}{p}}$

- pour $\boxed{k = m-1}$: $t_{m-1}(m) = (1-p)\left(1 + t_{m-1}(m)\right) + p \cdot \dfrac{m-1}{2N} \times \left(1 + t_{m-2}(m)\right)$
$$+ p \cdot \left(1 - \frac{m-1}{2N}\right) \cdot 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{p\, t_{m-1}(m) = 1 + p \cdot \frac{m-1}{2N}\left(1 + t_{m-2}(m)\right).}$$

7) $$\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid X_n = i\right) = (1-p)\cdot i + p \cdot \frac{i}{2N}(i-1) + p\cdot\left(1-\frac{i}{2N}\right)(i+1)$$

$$= (1-p)\, i + \cancel{p\cdot\frac{i^2}{2N}} - p\cdot\frac{i}{2N} +$$

$$+ p\,(i+1) - \cancel{p\cdot\frac{i^2}{2N}} - p\cdot\frac{i}{2N}$$

$$= p\, i\left(\cancel{1} - \frac{1}{N}\right) + p + i\,(1-\cancel{p}) = i\left(1-\frac{p}{N}\right) + p = i\beta_p + p.$$

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid X_n\right) = \beta_p X_n + p.$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}(X_{n+1})} = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n)\right) = \underline{\beta_p\, \mathbb{E}(X_n) + p.}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}(X_{n+1})} = \beta_p^{n+1}\,\mathbb{E}(X_0) + p \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \beta_p^{i}}_{= \frac{1-\beta_p^{n+1}}{1-\beta_p}} = \beta_p^{n+1}\,\mathbb{E}(X_0) + N\left(1-\beta_p^{n+1}\right)$$

$$= \underline{N + \left(\mathbb{E}(X_0) - N\right)\beta_p^{n+1}.}$$

On a :

$$1-\beta_p = \frac{p}{N}.$$

8) D'après le Thm. de cours sur la convergence d'une CM irréductible, apériodique, réversible par rapport à une mesure,

on a que $d_{TV}\left(\mathcal{L}(X_n \mid X_0 = i), \mu\right) \leq \frac{1}{2\sqrt{\mu_i}}\,\beta_p^{n}$, $\forall i, \forall n$.

Or $d_{TV}\left(\mathcal{L}(X_n), \mu\right) = \frac{1}{2}\sum_k \left|\mathbb{P}(X_n = k) - \mu_k\right|$ (on note $\nu = \mathcal{L}oi(X_0)$)

$$= \frac{1}{2}\sum_k \left|\sum_i \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i)\,\nu_i - \sum_i \mu_k \nu_i\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k \left|\sum_i \left(\mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i) - \mu_k\right)\nu_i\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_k \sum_i \left|\mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i) - \mu_k\right|\nu_i = \sum_i \nu_i\, d_{TV}\left(\mathcal{L}(X_n \mid X_0 = i), \mu\right)$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_i \nu_i \cdot \frac{1}{2\sqrt{\mu_i}}\right)}_{C(\mu,\nu)} \beta_p^n \,, \quad \text{avec} \quad \nu = \mathcal{L}oi(X_0).$$