Correction CC2 de MAS 1

2012 - 2013

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) $P_{ij} = Q_{ij} \cdot \delta_{ij} = Q_{ij} \cdot h\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}\right)$, $\forall\, i \neq j$.

$\pi_i P_{ij} = \pi_i Q_{ij}\, h\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}\right) \underset{\uparrow}{=} \cancel{\pi_i} Q_{ji} \cdot \frac{\pi_j}{\cancel{\pi_i}}\, h\left(\frac{\pi_i}{\pi_j}\right)$, car $h(u) = u\, h\left(\frac{1}{u}\right)$

Q symétrique

$= \pi_j Q_{ji}\, h\left(\frac{\pi_i}{\pi_j}\right) = \pi_j P_{ji}$, $\forall\, i \neq j$.

↳ P réversible par rapport à π.

2) Q irréductible
$Q_{ij} > 0 \Rightarrow P_{ij} > 0$ (si $h > 0$) $\Big\} \Rightarrow$ P irréductible.

Espace d'états fini
P irréductible $\Big\} \Rightarrow$ récurrente positive.

$P_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} P_{ij} = 1 - \sum_{j \neq i} Q_{ij}\, \delta_{ij} \underset{\uparrow}{>} 1 - \sum_{j \neq i} Q_{ij} \geq 0$

car $h(u) < 1$
$\Rightarrow \delta_{ij} < 1$, $\forall j \neq i$

$\Rightarrow P_{ii} > 0 \quad \forall i \Rightarrow$ chaîne apériodique.

↳ $(X_n)_n$ converge en loi vers son unique proba invariante, $\forall$ loi initiale.

Comme P réversible par rapport à $\pi \Rightarrow \pi$ proba invariante pour P

$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \pi$.

3) $\delta_{ij} = \min\left(1, \frac{\pi_j Q_{ji}}{\pi_i Q_{ij}}\right) = \min\left(1, \frac{\pi_j}{\pi_i}\right) = h\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}\right)$

avec $h(x) = \min(1, x)$.

On a $x\, h\left(\frac{1}{x}\right) = x \min\left(1, \frac{1}{x}\right) = \min(x, 1) = h(x)$
$\Rightarrow h$ vérifie la condition (1).

$\boxed{\text{Exc. 3}}$

1) $\mathbb{P}(\hat{X}_n = x_n \mid \hat{X}_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \hat{X}_0 = x_0)$

$= \mathbb{P}(X_{N-n} = x_n \mid X_{N-n+1} = x_{n-1}, \dots, X_N = x_0)$

$= \mathbb{P}(X_{N-n} = x_n \mid X_{N-n+1} = x_{n-1})$ car $(X_n)_n$ CM et le ~~prése~~ passé et le futur sont indép. sachant le présent

formule de Bayes

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{\mathbb{P}(X_{N-n+1} = x_{n-1} \mid X_{N-n} = x_n) \times \mathbb{P}(X_{N-n} = x_n)}{\mathbb{P}(X_{N-n+1} = x_{n-1})}.$$

Comme $\mathcal{L}oi(X_0) = \pi$ proba invariante

$\Rightarrow \mathcal{L}oi(X_n) = \pi, \ \forall n \Rightarrow \mathcal{L}oi(\hat{X}_0) = \mathcal{L}oi(X_N) = \pi$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{N-n+1} = x_{n-1}) = \pi(x_{n-1})$ et $\mathbb{P}(X_{N-n} = x_n) = \pi(x_n)$.

$\hookrightarrow \hat{P}_{ij} = \mathbb{P}(\hat{X}_n = j \mid \hat{X}_{n-1} = i) = \dfrac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$.

2) $\pi_i \left(\dfrac{P+\hat{P}}{2}\right)_{ij} = \pi_i \left(\dfrac{P_{ij} + \hat{P}_{ij}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\pi_i P_{ij} + \cancel{\pi_i} \times \dfrac{\pi_j P_{ji}}{\cancel{\pi_i}}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\pi_i P_{ij} + \pi_j P_{ji}\right) = \pi_j \left(\dfrac{P+\hat{P}}{2}\right)_{ji}$

$\hookrightarrow \dfrac{P+\hat{P}}{2}$ réversible par rapport à π.

En plus, $\displaystyle\sum_j \left(\frac{P+\hat{P}}{2}\right)_{ij} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_j P_{ij}}_{1} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum \hat{P}_{ij}}_{1} = 1$.

$\Rightarrow \dfrac{P+\hat{P}}{2}$ matrice de transition (car ≥ 0 aussi)

3) P réversible par rapport à $\mu \Rightarrow \mu$ invariante pour P
Comme P admet une unique proba invariante π $\Big\} \Rightarrow \underline{\mu = \pi}$.

$\hat{P}_{ij} = \dfrac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i} = \dfrac{\mu_j P_{ji}}{\mu_i} = P_{ij}$ (car P μ-réversible)

$(\hat{X}_n)$ a la même loi initiale et même matrice de transition $\Rightarrow$ la même loi que (X_n).

4) P symétrique $\Rightarrow P_{ij} = P_{ji}$

μ tel que $\mu_i P_{ij} = \mu_j P_{ji} \Leftrightarrow \mu_i = \mu_j \Leftrightarrow \mu = \mathcal{U}nif(E)$.

P est donc réversible par rapport à la loi uniforme sur E.