$\boxed{\text{Correction Exercice 2-3} \\ \text{CC1. MAS. 2012-2013}}$

Exercice 2:

$$\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k} \mid Y_{0:n}=y_{0:n}) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k}, Y_{0:n}=y_{0:n})}{\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n})}$$

$$= \sum_{z\in E} \frac{\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k}, X_n=z, Y_{0:n}=y_{0:n})}{\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n})}$$

$$= \sum_{z\in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k} / X_n=z)}_{p^k(z, x_{n+k})} \cdot \underbrace{\frac{\mathbb{P}(X_n=z, Y_{0:n}=y_{0:n})}{\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n})}}_{\Pi_n(y_{0:n}, z)}$$

$$= \sum_{z\in E} p^k(z, x_{n+k}) \cdot \Pi_n(y_{0:n}, z)$$

Exercice 3:

(a) ν est à valeurs dans $\{-2,-1,0,1,2\}$.

$\nu(\{-2\}) \overset{\perp}{=} \mathbb{P}(S_0=\cancel{+}1)\,\mathbb{P}(\tilde{S}_0=-1) = \frac{1}{9}$.

$\nu(\{-1\}) = \mathbb{P}(S_0=0)\cdot\mathbb{P}(\tilde{S}_0=-1) + \mathbb{P}(S_0=-1)\,\mathbb{P}(\tilde{S}_0=0) = \frac{2}{9}$.

$\nu(\{0\}) = \cancel{\mathbb{P}} \sum_{i=-1}^{1} \mathbb{P}(S_0=i)\,\mathbb{P}(\tilde{S}_0=i) = 3\times\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

De même, $\nu(\{1\}) = \frac{2}{9}$ et $\nu(\{2\}) = \frac{1}{9}$.

(b) $\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \mathbb{P}(S_{n+1}-\tilde{S}_{n+1}=j / S_n-\tilde{S}_n=i)$

Comme $S_{n+1}-\tilde{S}_{n+1} = S_{n}-\tilde{S}_{n} + U_{n+1}-\tilde{U}_{n+1}$, il vient

$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i) = \mathbb{P}(U_{n+1}-\tilde{U}_{n+1}=j-i)$

$$\Rightarrow \forall i, \; p_{i,j} = \begin{cases} p\cdot q & \text{si } j=i-2 \\ p^2+q^2 & \text{si } j=i \\ p\cdot q & \text{si } j=i+2 \end{cases}$$

2.(a) On calcule :

$Q_{i,j} = \mathbb{P}(Y_n=j / X_n=i) = \mathbb{P}(V_n-\tilde{V}_n=j / X_n=i)$

$= \mathbb{P}(\varepsilon_n-\tilde{\varepsilon}_n=j-i)$ car $V_n-\tilde{V}_n = X_n+\varepsilon_n-\tilde{\varepsilon}_n$.

$$\Rightarrow Q_{i,j} = \begin{cases} \delta^2 & \text{si } j-i=\mp 2 \\ 2\delta(1-2\delta) & \text{si } j-i=\mp 1 \\ 2\delta^2+(1-2\delta)^2 & \text{si } j-i=0. \end{cases}$$

(b) Calculons :

$$\mathbb{P}(X_0=0/Y_0=0) = \frac{\mathbb{P}(Y_0=0 \mid X_0=0)\cdot\mathbb{P}(X_0=0)}{\mathbb{P}(Y_0=0)}$$

$$= \frac{Q_{0,0}\cdot\nu(\{0\})}{\sum_{i=-2}^{2} Q_{i,0}\cdot\nu(\{i\})}$$

. On remplace ensuite avec les quantités calculées précédemment.

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = y_{0:n} / Y_{0:n} = y_{0:n}) = \underbrace{\mathbb{P}(Y_n = y_n / X_{0:n} = y_{0:n}, Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}_{Q(y_n, y_n)} \times \frac{\mathbb{P}(X_{0:n} = y_{0:n}, Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}{\mathbb{P}(Y_{0:n} = y_{0:n})}$$

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n} / Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}) = \underbrace{\mathbb{P}(X_n = y_n / X_{n-1} = y_{n-1})}_{P(y_{n-1}, y_n)} \cdot \mathbb{P}(X_{0:n-1} = y_{0:n-1} / Y_{0:n-1} = y_{0:n-1}) \, \mathbb{P}(Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})$$

Or $\mathbb{P}(Y_{0:n} = y_{0:n}) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}(Y_{0:n} = y_{0:n}, X_n = z) = \sum_z \underbrace{\mathbb{P}(Y_n = y_n / X_n = z)}_{Q(z, y_n)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_n = z / Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})}_{\pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, z)} \cdot \mathbb{P}(Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})$

En écrivant le rapport des quantités ci-dessus, on trouve :

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = y_{0:n} / Y_{0:n} = y_{0:n}) = \frac{Q(y_n, y_n)\, P(y_{n-1}, y_n)}{\sum_{z \in E} Q(z, y_n)\, \pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, z)} \cdot \mathbb{P}(X_{0:n-1} = y_{0:n-1} / Y_{0:n-1} = y_{0:n-1})$$

On a donc obtenu une formule de récurrence pour le calcul de $\mathbb{P}(X_{0:n} = y_{0:n} / Y_{0:n})$ (en supposant calculées les $\pi_{n/n-1}(y_{0:n-1}, z)$). Il suffit ensuite d'initialiser à l'aide de la question précédente.

Correction Examen MAS2
2012. 2013

Exercice 1:

1. (a) $\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\, p(x)\, dx$.

$$\overset{x=u+\theta}{=} \int f(u+\theta)\, p(u+\theta)\, du$$

$$= \int f(u+\theta)\, \frac{p(u+\theta)}{p(u)} \cdot p(u)\, du \quad \text{car } p$$

strictement positive,

$$= \mathbb{E}\left[f(X+\theta)\, \frac{p(X+\theta)}{p(X)} \right].$$

(b) D'après la question 1.(a),

$$\mathbb{E}[Y_\theta] = \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^d.$$

Ainsi, $\mathbb{E}[(Y_\theta^*)^2] \leq \mathbb{E}[Y_\theta^2] \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^d$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[(Y_\theta^*)^2] - \mathbb{E}[Y_\theta]^2 \leq \mathbb{E}[Y_\theta^2] - \mathbb{E}[Y_\theta]^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{Var}(Y_\theta^*) \leq \mathrm{Var}(Y_\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^d$.

$\Leftrightarrow \mathrm{Var}(Y_\theta^*) = \min\limits_{\theta \in \mathbb{R}^d} (\mathrm{Var}(Y_\theta))$.

(c) $Q(\theta) = \mathbb{E}[Y_\theta^2] = \mathbb{E}\left[f^2(X+\theta)\, \frac{p^2(X+\theta)}{p^2(X)} \right]$

$$= \int f^2(x+\theta)\, \frac{p^2(x+\theta)}{p^2(x)} \cdot p(x)\, dx$$

$$\overset{u=x+\theta}{=} \int f^2(u)\, \frac{p^2(u)}{p(u-\theta)}\, du = \int f^2(u-\theta)\, \frac{p(u)}{p(u-\theta)} \cdot p(u)\, du$$

$$= \mathbb{E}\left[f^2(X-\theta)\, \frac{p(X)}{p(X-\theta)} \right].$$

2. (a) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$; $p(x-\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{p(x-\theta)} = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \theta x + \frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\theta^2}{2} - \theta x\right).$$

On déduit alors le résultat demandé de la question 1.(c)

(b) Si Q satisfait aux règles de dérivation, alors

$$Q'(\theta) = \mathbb{E}\left[f^2(X)\, \partial_\theta \left(e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta X}\right) \right] = \mathbb{E}\left[f^2(X)(\theta - X)\, e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta X} \right].$$

De même,

$$Q''(\theta) = \mathbb{E}\left[f^2(X)\, e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta X} \left(1 + (\theta - X)^2\right) \right].$$

(c) On remarque que $Q''(\theta) > 0$. En effet,

$\cdot\ f^2(X)\, e^{\theta^2/2 - \theta X}(1 + (\theta - X)^2) \geq 0$ p.s.

De plus, $\mathbb{P}(f(X) = 0) = 0 \Rightarrow f^2(X)\, e^{\theta^2/2 - \theta X}(1 + (\theta - X)^2) > 0$ p.s.

$\Rightarrow Q''(\theta) > 0$. Ainsi, Q' est strictement croissante.

Comme de plus, $\lim\limits_{\theta \to +\infty} Q(\theta) = +\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to -\infty} Q(\theta) = +\infty$,

il existe un! θ^* tq $\begin{cases} Q'(\theta) < 0 & \text{sur }]-\infty, \theta^*[\\ Q'(\theta) > 0 & \text{sur }]\theta^*, +\infty[. \end{cases}$

θ^* est donc l'unique minimum de Q.

3. (a) $Q'(\theta) = \int f^2(x)(\theta - x) \frac{e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta x - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$

$$\overset{u = x+\theta}{=} \int f^2(u-\theta)(2\theta - u)\, e^{\theta^2/2 - \theta(u-\theta) - \frac{(u-\theta)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du$$

$$= \int f^2(u-\theta)(2\theta-u) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du \; e^{\left(\frac{\theta^2}{2} + \theta^2 - \frac{\theta^2}{2}\right)}$$

$$= e^{\theta^2} \mathbb{E}\left[f^2(X-\theta)(2\theta - X)\right] = e^{\theta^2} h(\theta).$$

Comme $e^{\theta^2} > 0 \ \forall \theta \in \mathbb{R}$, il est clair que

- $Q'(\theta) = 0 \iff h(\theta) = 0$,
- $Q'(\theta) > 0 \iff h(\theta) > 0$ et $Q'(\theta) < 0 \iff h(\theta) < 0$.

(b) Comme f est borné, $|f^2(X-\theta)(2\theta - X)| \leq C(|X| + |\theta|)$.

$$\Rightarrow |h(\theta)| \leq C(\underbrace{\mathbb{E}[|X|]}_{<+\infty} + |\theta|) \leq \tilde{C}(1 + |\theta|).$$

De même,

$$(f^2(X-\theta)(2\theta - X))^2 \leq C(2\theta - X)^2 \leq \tilde{C}(\theta^2 + X^2)$$

car $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \ \forall a, b \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[(f^2(X-\theta)(2\theta - X))^2] \leq \tilde{C}(\theta^2 + \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{<+\infty})$$

d'où le résultat.

(e) $h(\theta) = \mathbb{E}[H(X, \theta)]$ avec

$H(X, \theta) = f^2(X - \theta)(2\theta - X)$. Ainsi, un algorithme stochastique adapté est :

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(X_{n+1}, \theta_n)$$ où

(X_n) est une suite de v.a i.i.d. tq $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et (γ_n) est une suite $\downarrow$ tq $\sum_0 \gamma_n = +\infty$, $\sum \gamma_n^2 < +\infty$.

(d) On peut réécrire $(\theta_n)_n$ sous la forme :

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} h(\theta_n) + \gamma_{n+1} \Delta M_{n+1}$$

où h est définie précédemment et :

$$\Delta M_{n+1} = h(\theta_n) - H(X_{n+1}, \theta_n).$$

ΔM_{n+1} est un accroissement de martingale car $h(\theta_n) = \mathbb{E}[H(X_{n+1}, \theta_n) / \mathcal{F}_n]$.

On vérifie les hypothèses de Robbins-Monro 2 avec :

$V(\theta) = (\theta - \theta^*)^2$. V est bien sous quadratique et :

- $(V' \cdot h)(\theta) \geq 0$ car V' et h ont même signe.
- $V'h(\theta) = 0 \iff \theta = \theta^*$.

De plus, $|h(\theta)| \leq C(1 + |\theta|)$ via la question précédente et :

$$\mathbb{E}[|\Delta M_{n+1}|^2 / \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[H^2(X_{n+1}, \theta_n) / \mathcal{F}_n] - h^2(\theta_n)$$

$$\leq \mathbb{E}[H^2(X_{n+1}, \theta_n) / \mathcal{F}_n] = \Psi(\theta_n) \text{ avec } \Psi(\theta) = \mathbb{E}[(f^2(X-\theta)(2\theta - X))^2]$$

D'après la question précédente, $\Psi(\theta) \leq C(1 + \theta^2) \leq \tilde{C}(1 + V(\theta))$.

Les hypothèses de RM2 sont donc satisfaites. On peut en déduire que $\theta_n \xrightarrow{n \to +\infty} \theta^*$ p.s.