B

Une variante du théorème central limite

Dans cet appendice, nous allons démontrer une variante du théorème central limite pour des variables aléatoires centrées, mais n'ayant pas la même loi.

Théorème B.1. *Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que X_n^3 est intégrable pour tout $n \geq 1$. On suppose de plus que :*

1. $\mathbb{E}[X_n] = 0$ *pour tout* $n \geq 1$,
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2] = +\infty$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k|^3]}{(\sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}[X_l^2])^{3/2}} = 0$.

Alors la suite $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{(\sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}[X_l^2])^{1/2}}, n \geq 1\right)$ *converge en loi vers une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin de l'inégalité de Jensen énoncée dans le lemme suivant.

Lemme B.2 (Inégalité de Jensen). *Soit X une variable intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et φ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^d$ convexe et telle que $\varphi(X)$ soit intégrable. Alors, on a*

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

Démonstration du lemme B.2. Comme φ est une fonction convexe, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, il existe $\lambda_a \in \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi(a) + (\lambda_a, x - a) \leq \varphi(x),$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. En choisissant $a = \mathbb{E}[X]$ et $x = X$, on en déduit que

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) + (\lambda_{\mathbb{E}[X]}, X - \mathbb{E}[X]) \leq \varphi(X).$$

En prenant l'espérance dans cette inégalité, et en utilisant la croissance de l'espérance, on en déduit $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$. □

Démonstration du théorème B.1. On pose $\sigma_n^2 = \mathbb{E}[X_n^2]$. En utilisant la définition des fonctions caractéristiques et l'indépendance des variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$, on a

$$\psi_{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}}(u) = \prod_{k=1}^n \psi_{X_k}\left(\frac{u}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}\right).$$

Rappelons que pour $y \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{iy} - 1 - iy + \frac{y^2}{2}\right| \leq \frac{|y|^3}{6}$. Donc on a

$$\exp\left(i\frac{uX_k}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}\right) = 1 + i\frac{uX_k}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}} - \frac{u^2 X_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2} + h_n(X_k),$$

avec $|h_n(X_k)| \leq \dfrac{u^3 |X_k|^3}{6(\sum_{l=1}^n \sigma_l^2)^{3/2}}$.

Remarquons que $h_n(X_k)$ est intégrable. En prenant l'espérance dans l'égalité ci-dessus, il vient :

$$\psi_{X_k}\left(\frac{u}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}\right) = 1 - \frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2} + \mathbb{E}[h_n(X_k)].$$

En appliquant l'inégalité de Jensen (voir le lemme B.2) avec la fonction $\varphi(x) = |x|^{3/2}$, on obtient $\sigma_k^2 = \mathbb{E}[X_k^2] \leq \mathbb{E}[|X_k|^3]^{2/3}$. En particulier on a

$$\frac{\sigma_k^2}{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2} \leq \left(\frac{\mathbb{E}[|X_k|^3]}{(\sum_{l=1}^n \sigma_l^2)^{3/2}}\right)^{2/3}.$$

On déduit donc de l'hypothèse 3. du théorème que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2} = 0. \tag{B.1}$$

On a également recours au lemme suivant qui se démontre facilement par récurrence.

Lemme B.3. *Soit* $(a_k, k \in \mathbb{N}^*)$ *et* $(b_k, k \in \mathbb{N}^*)$ *des suites de nombres complexes de modules inférieurs à 1 (*$|a_k| \leq 1$ *et* $|b_k| \leq 1$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*). On a :*

$$\left|\prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|.$$

Pour n assez grand tel que $\sup_{1\le k\le n} \dfrac{u^2\sigma_k^2}{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2} \le 4$, on a en utilisant ce lemme pour la première inégalité,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^n \psi_{X_k}\left(\frac{u}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}\right) - \prod_{k=1}^n \left(1-\frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}\right)\right| &\\ \le \sum_{k=1}^n \left|\psi_{X_k}\left(\frac{u}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}\right) - 1 + \frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}\right| &\\ = \sum_{k=1}^n |\mathbb{E}[h_n(X_k)]| &\\ \le \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\frac{u^3\,|X_k|^3}{6(\sum_{l=1}^n \sigma_l^2)^{3/2}}\right]. &\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{k=1}^n \psi_{X_k}\left(\frac{u}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}\right) - \prod_{k=1}^n \left(1-\frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}\right)\right| = 0.$

En utilisant le fait que $\log(1-x) = -x + o(x)$, quand x tend vers 0, on remarque grâce à (B.1) que

$$\prod_{k=1}^n \left(1-\frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}\right) = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^n \log\left(1-\frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}\right)}$$

converge vers $\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$ lorsque n tend vers l'infini. Comme

$$\begin{aligned}\left|\psi_{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}}(u) - \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\right| &\le \left|\prod_{k=1}^n \psi_{X_k}\left(\frac{u}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}\right) - \prod_{k=1}^n \left(1-\frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}\right)\right|\\ &\quad + \left|\prod_{k=1}^n \left(1-\frac{u^2\sigma_k^2}{2\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}\right) - \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\right|,\end{aligned}$$

on conclut que le membre de gauche tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. D'après le théorème A.3.8, cela assure que $\dfrac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \sigma_l^2}}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,1)$. □