8

Chaînes de Markov à temps continu

Il est des problématiques, comme par exemple celles abordées aux Chaps. 5 et 6 sur l'ADN, où naturellement la modélisation utilise un processus aléatoire indexé par $\mathbb{N}$. En revanche, pour d'autres applications comme la modélisation des temps successifs de panne d'un système, des files d'attente aux guichets, des réactions chimiques (voir les Chaps. 10, 9 et 12), il est naturel d'utiliser une approche en temps continu. Ainsi pour analyser une file d'attente, on peut étudier la succession des nombres de personnes dans la file d'attente en fonction des arrivées ou des départs des clients. Si l'on désire étudier l'évolution du nombre de personnes dans la file au cours du temps, on peut, à l'aide d'une discrétisation du temps, utiliser des chaînes de Markov à temps discret. Rappelons que nous avons vu au paragraphe 1.2, qu'une chaîne de Markov peut être décrite à l'aide de la chaîne trace, donnée par les états successifs différents, et des temps d'attente dans chacun des états. Ces derniers, conditionnellement à la chaîne trace, sont indépendants et suivent des lois géométriques dont le paramètre dépend de l'état. En particulier, pour tout pas de discrétisation $\delta > 0$, le temps d'attente réel dans l'état initial, T supposé d'espérance finie, est représenté par $[T/\delta] + 1$ pas de temps de longueur δ, pour la chaîne de Markov à temps discret. En particulier $[T/\delta] + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p_\delta = 1/(1 + \mathbb{E}\big[[T/\delta]\big])$. Quand le pas de discrétisation tend vers zéro, on obtient par convergence dominée que $\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta}\, p_\delta = 1/\mathbb{E}[T]$. Comme $\delta([T/\delta]+1)$ converge p.s. vers T quand δ tend vers 0, on déduit du lemme 7.2.1 que la loi de T est une loi exponentielle. Comme le suggère ce raisonnement, on modélise la suite des états successifs par une chaîne trace, et les temps d'attente dans chacun des états par des variables aléatoires de loi exponentielle. Le processus obtenu est appelé chaîne de Markov à temps continu.

Nous présentons au paragraphe 8.1 une construction des chaînes de Markov à temps continu, appelées aussi processus de sauts purs réguliers, à partir d'une chaîne trace et de temps d'attente de loi exponentielle entre les changements d'états. Les paramètres des lois exponentielles s'interprètent comme des taux de sauts. Puis nous indiquons comment le caractère sans mémoire des lois exponentielles permet d'obtenir la propriété de

Markov : l'évolution future du processus ne dépend du passé qu'au travers de l'état présent. Le paragraphe 8.2 introduit les notions de semi-groupes et générateurs infinitésimaux qui sont des outils généraux pour l'étude des processus de Markov. On vérifie que le générateur infinitésimal a une expression très simple en fonction de la matrice de transition de la chaîne trace sous-jacente et des taux de sauts. Nous étudions au paragraphe 8.3 le comportement en temps long des chaînes de Markov. Ces résultats sont à rapprocher des théorèmes ergodiques du paragraphe 1.5 pour les chaînes de Markov à temps discret. Enfin, dans le paragraphe 8.4, nous introduisons le processus de Poisson, qui est un exemple très élémentaire de chaîne de Markov à temps continu. Ce processus permet de modéliser les temps de pannes de machines, ou le processus des temps d'arrivée des clients dans une file d'attente.

Enfin une vaste littérature sur les chaînes de Markov est disponible. Pour plus de détails, on pourra consulter les ouvrages suivants : Jacod [4], Lacroix [5], Ycart [6] et les ouvrages plus spécialisés : Brémaud [1], Chung [2] ou Çinlar [3].

8.1 Construction des chaînes de Markov à temps continu

8.1.1 Construction

Il est facile de vérifier à l'aide des fonctions de répartition que si U est de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $T = -\log(U)/\lambda$, où $\lambda > 0$, est de loi exponentielle de paramètre λ.

Soit $Z = (Z_n, n \in \mathbb{N})$ une chaîne trace (cf. paragraphe 1.2) sur un espace discret E et de matrice de transition Q. La chaîne trace décrit les états différents successifs du phénomène étudié. On rappelle que pour tout $x \in E$, on a $Q(x,x) \in \{0,1\}$. Si $Q(x,x) = 1$, alors x est un point absorbant de la chaîne trace.

Pour chaque état $x \in E$, on se donne $\lambda(x) \geq 0$ qui correspond au taux de sauts auquel on quitte le site x. On suppose que $\lambda(x) = 0$ si x est un point absorbant. Le paramètre $\lambda(x)$ correspond au paramètre de la loi exponentielle des temps d'attente en x. Soit une suite $(U_n, n \geq 1)$ de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendantes et indépendantes de Z. On pose $V_n = -\log(U_n)/\lambda(Z_{n-1})$ pour $n \geq 1$, avec la convention que $V_n = +\infty$ si $\lambda(Z_{n-1}) = 0$. Ainsi, conditionnellement à Z, les variables $(V_n, n \geq 1)$ sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètres respectifs $(\lambda(Z_{n-1}), n \geq 1)$ (avec la convention qu'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 0 est égale à $+\infty$). On pose $S_0 = 0$, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n V_k$, et si $S_n < +\infty$,

$$X_t = Z_n \quad \text{pour } t \in [S_n, S_{n+1}[. \tag{8.1}$$

Les variables aléatoires X_t sont définies pour $t < \lim_{n\to\infty} S_n$. Le lemme suivant permet de donner des conditions qui assurent que cette limite est p.s. infinie.

Lemme 8.1.1. *Soit* $(T_n, n \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que la loi de* T_n *est la loi exponentielle de paramètre* $\lambda_n \in]0, \infty[$. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathbb{P}(\sum_{n\geq 1} T_n = \infty) = 1$.

(ii) $\mathbb{P}(\sum_{n\geq 1} T_n = \infty) > 0$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n = \infty$.

Démonstration. Clairement (i) implique (ii). Montrons, par contraposée que (ii) implique (iii). Si $\sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n < \infty$, alors on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[T_n] = \sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n < \infty$ et donc p.s. $\sum_{n\geq 1} T_n < \infty$.

Montrons que (iii) implique (i). Si la série $\sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n$ est divergente alors la série $\sum_{n\geq 1} \min(1, 1/2\lambda_n)$ est divergente. Comme $\log(1+x) \geq \min(1, x/2)$ sur $[0, \infty[$, cela implique que la série $\sum_{n\geq 1} \log(1 + 1/\lambda_n)$ est également divergente. On en déduit que

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\sum_{n\geq 1} T_n}] = \prod_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} = \mathrm{e}^{-\sum_{n\geq 1} \log(1+\frac{1}{\lambda_n})} = 0.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\sum_{n\geq 1} T_n}$ est une variable aléatoire positive d'espérance nulle, elle est donc p.s. nulle. En particulier, on a p.s. $\sum_{n\geq 1} T_n = \infty$. □

On déduit de ce lemme que

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty | Z_0 = x_0) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(\sum_{n\geq 0} \lambda(Z_n)^{-1} = \infty | Z_0 = x_0\Big) = 1. \quad (8.2)$$

Remarque 8.1.2.

1. Si $\sup_{x\in E} \lambda(x) < \infty$, alors on déduit de (8.2) que p.s. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. En particulier, cette condition est toujours satisfaite si E est fini.
2. Si l'ensemble E_{x_0} des états que peut visiter la chaîne de Markov Z issue de x_0 est fini p.s. alors $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty | Z_0 = x_0) = 1$.
3. Enfin l'égalité de droite de (8.2) est également vérifiée si x_0 est récurrent pour la chaîne de Markov Z. En particulier, si la chaîne est irréductible récurrente alors p.s. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

♢

Exemple 8.1.3. On peut modéliser la file d'attente à un guichet de manière élémentaire en supposant que si la file d'attente comporte $k \geq 1$ clients alors : soit un nouveau client arrive, et elle comporte alors $k + 1$ clients, soit un client termine son service puis part, et elle comporte alors $k - 1$ clients. Si on suppose que le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et que le temps d'arrivée d'un nouveau client est indépendant et suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on déduit du lemme 7.4.4, que le nouvel état de la file d'attente est $k+1$ avec probabilité $\lambda/(\lambda+\mu)$ et $k-1$ avec probabilité

$\mu/(\lambda+\mu)$, et que le temps qu'il faut attendre avant d'observer un départ ou une arrivée suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$. Enfin si la file est vide, il faut attendre un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ, pour qu'un nouveau client arrive. Pour la modélisation, on considère donc une chaîne trace sur $\mathbb{N}$, qui représente les différents états de la file et dont les termes non nuls de la matrice de transition sont $Q(0,1)=1$, et pour $k \geq 1$, $Q(k,k+1)=\lambda/(\lambda+\mu)$ et $Q(k,k-1)=\mu/(\lambda+\mu)$. Enfin le temps d'attente dans l'état k suit une loi exponentielle de paramètre λ si $k=0$ et de paramètre $\lambda+\mu$ sinon. Dans ce cas les paramètres des lois exponentielles sont bornés par $\lambda+\mu$. Et le processus défini par (8.1), qui décrit la taille de la file à l'instant t est bien défini, pour $t \in [0,\infty[$. Cet exemple sera étudié plus en détail au Chap. 9. $\lozenge$

Exercice 8.1.4. Les conditions suivantes apparaissent naturellement quand on étudie les files d'attente. On a $E=\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe des constantes positives c_0, c_1 et r telles que les taux de sauts sont sous-linéaires : $\lambda(x) \leq c_0 + c_1 x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, et les sauts sont uniformément bornés : $Q(x,y)=0$ si $y > x+r$.

1. Vérifier que p.s. $Z_n \leq Z_0 + nr$.
2. En déduire que p.s. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

$\blacklozenge$

8.1.2 Propriété de Markov

On suppose désormais que p.s.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.} \tag{8.3}$$

Le processus aléatoire $X=(X_t, t \geq 0)$ est alors bien défini. Il est à valeurs dans l'espace discret E. Il est constant par morceaux, continu à droite et avec un nombre fini de sauts sur tout intervalle de temps borné. Nous vérifions maintenant que ce processus possède la propriété de Markov : pour tout $t \geq 0$, l'évolution de X après l'instant t ne dépend de son évolution avant l'instant t qu'au travers de la valeur de X_t. Les outils dont nous disposons sont insuffisants pour donner une démonstration rigoureuse de la propriété de Markov énoncée au théorème 8.1.6. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple à la démonstration du théorème 9.1.2 dans [1]. Toutefois, il est crucial dans l'établissement de la propriété de Markov d'utiliser le fait que les temps d'attente suivent des lois exponentielles, et que les lois exponentielles sont sans mémoire (voir le lemme 8.1.5). Pour comprendre ce point important, nous esquissons une démonstration de la propriété de Markov.

L'état passé du processus X avant l'instant t est donné par le nombre de transitions avant t, disons n, ses états successifs, disons $x_0, \ldots, x_n$, et les temps d'attente dans chacun de ces états. L'état présent du processus

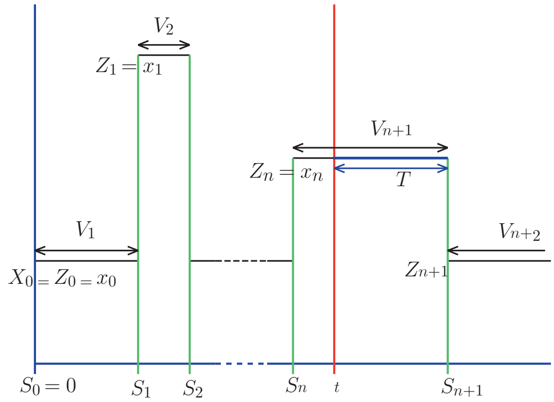

Fig. 8.1. Exemple d'évolution d'une chaîne de Markov à temps continu

est donné par sa valeur $X_t = x_n$. L'état futur est donné par l'évolution de la chaîne trace $(Z_k, k \geq n)$ issue de x_n, par les temps d'attente dans chacun des états. D'après la propriété de Markov pour la chaîne trace, son évolution sachant l'état passé de X ne dépend que de x_n. Les temps d'attente dans les états $x_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots$ sont donnés par les variables $T, V_{n+2}, V_{n+3}, \ldots$, où $T = V_{n+1} - (t - S_n)$, voir la Fig. 8.1. Par construction, on a $V_{n+k} = -\log(U_{n+k})/\lambda(Z_{n+k-1})$ pour $k \geq 2$, et les variables $(U_{n+k}, k \geq 2)$ sont indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$ et sont indépendantes de Z et de t. Il reste donc à montrer que la loi de $T = V_{n+1} - (t - S_n)$ conditionnellement à $Z_0 = x_0, \ldots, Z_n = x_n$, $(Z_{n+k}, k \geq 1)$, $V_1, \ldots, V_n$, $S_n \geq t$ et $V_{n+1} > (t - S_n)$, est une loi exponentielle de paramètre $\lambda(x_n)$. Les conditions $S_n \geq t$ et $V_{n+1} > (t - S_n)$ assurent que l'on a bien eu n transitions exactement avant l'instant t. Remarquons que conditionnellement à Z les variables $V_1, \ldots, V_{n+1}$ sont indépendantes de loi exponentielle. Pour calculer la loi conditionnelle de T on utilise le caractère sans mémoire des lois exponentielles.

Lemme 8.1.5. *Soit V une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit R une variable aléatoire positive indépendante de V. On a*

$$\mathbb{P}(V > R) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda R}]. \tag{8.4}$$

Et conditionnellement à $\{V > R\}$, la loi de $V - R$ est la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration. On déduit de la proposition A.1.21 avec $\psi(x) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V>x\}}] = \min(1, \mathrm{e}^{-\lambda x})$ que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V>R\}}] = \mathbb{E}[\psi(R)]$. Comme R est une variable positive, on obtient $\mathbb{P}(V > R) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V>R\}}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda R}]$.

Pour $u \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(V > u + R \mid V > R) = \frac{\mathbb{P}(V > u + R)}{\mathbb{P}(V > R)} = \frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda(u+R)}]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda R}]} = \mathrm{e}^{-\lambda u} = \mathbb{P}(V > u),$$

où l'on a utilisé la formule des probabilités conditionnelles pour la première égalité, l'égalité (8.4) avec $u+R$ et R. La loi de $V-R$ conditionnellement à $\{V>R\}$ est bien celle de V. □

On choisit alors $R=t-S_n$ et $V=V_{n+1}$, et l'on peut vérifier que la loi conditionnelle de $T=V-R$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda(x_n)$. En particulier, T est indépendante de t et de $V_{n+2}, V_{n+3}, \ldots$, conditionnellement à $(Z_{n+k}, k\geq 0)$.

Ceci permet de montrer la propriété de Markov : On dit que le processus $(X_t, t\geq 0)$ vérifie la **propriété de Markov** si pour tout entier n, pour tous réels $0=t_0\leq \cdots \leq t_n=t$, pour tous $x_1,\ldots,x_n=x, y\in E$, tel que $\mathbb{P}(X_{t_0}=x_0,\ldots,X_{t_n}=x_n)>0$, et pour tout $s\geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_{s+t}=y \mid X_{t_0}=x_0,\ldots,X_{t_n}=x_n)=\mathbb{P}(X_{s+t}=y \mid X_t=x). \qquad (8.5)$$

La propriété de Markov est dite **homogène** si de plus $\mathbb{P}(X_{s+t}=y \mid X_t=x)$ ne dépend pas de t.

On admet le résultat suivant.

Théorème 8.1.6. *On suppose que (8.3) est vérifiée presque sûrement. Alors le processus* $(X_t, t\geq 0)$ *satisfait la propriété de Markov homogène.*

On dit que X est une **chaîne de Markov à temps continu** ou un processus markovien homogène régulier de sauts purs. Le processus Z est la chaîne trace associée à X.

Remarque 8.1.7. On vérifie que si la probabilité de visiter $x\in E$ est strictement positive, alors $\mathbb{P}(X_t=x)>0$ pour tout $t>0$. Par construction, si la probabilité que X visite $x\in E$ est strictement positive, alors il existe un chemin $x_0,\ldots,x_n=x\in E$, tel que $\mathbb{P}(Z_0=x_0,\ldots,Z_n=x_n)>0$ et si $n\geq 1$, $\lambda(x_0)\ldots\lambda(x_{n-1})>0$. Alors on a $\mathbb{P}(I_n|Z_0=x_0,\ldots,Z_n=x_n)>0$, où $I_n=\{V_1<t/n,\ldots,V_n<t/n, V_{n+1}>t\}$ si $n\geq 1$ et $I_0=\{V_1>t\}$ sinon. Comme $\{Z_0=x_0,\ldots,Z_n=x_n\}\cap I_n\subset\{X_t=x\}$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_t=x)>0$ pour tout $t>0$. ♢

Exercice 8.1.8. Montrer que si $(X_t, t\geq 0)$ est une chaîne de Markov à temps continu, alors $(X_n, n\in\mathbb{N})$ est une chaîne de Markov à temps discret. ♦

8.2 Semi-groupe, générateur infinitésimal

Soit $X=(X_t, t\geq 0)$ une chaîne de Markov à temps continu sur un espace d'état discret E. Quitte à se restreindre à l'ensemble des états qui ont une probabilité strictement positive d'être visités par X, on peut supposer d'après la remarque 8.1.7 que pour tous $t>0$, $x\in E$, on a $\mathbb{P}(X_t=x)>0$. Comme X satisfait la propriété de Markov homogène, les probabilités $\mathbb{P}(X_{s+t}=y \mid X_t=x)$ ne dépendent pas de t. On les note $P_s(x,y)$. Par convention on pose

$\mathbb{P}(X_s = y \mid X_0 = x) = P_s(x,y)$ si $\mathbb{P}(X_0 = x) = 0$. On a $\sum_{y \in E} P_s(x,y) = 1$. La matrice de transition $P_s = (P_s(x,y), x, y \in E)$ est une matrice stochastique.

On admet la réciproque suivante du théorème 8.1.6 (voir [3]).

Théorème 8.2.1. *Si $Y = (Y_t, t \geq 0)$ est un processus aléatoire à temps continu à valeurs dans un espace discret E et qui*
- *est constant par morceaux,*
- *est continu à droite et avec un nombre fini de sauts sur tout intervalle borné ,*
- *vérifie la propriété de Markov homogène, i.e. les égalités (8.5) avec le membre de gauche indépendant de t,*

alors Y est une chaîne de Markov à temps continu.

En particulier le processus Y possède une chaîne trace, et les temps d'attente dans chacun des états sont, conditionnellement à la chaîne trace, des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle dont le paramètre dépend de l'état.

Il est en général très difficile de calculer le semi-groupe de transition même dans le cas élémentaire de l'exemple 8.1.3 (voir l'exemple 8.3.14 pour expliciter les cas où E est réduit à deux éléments). En revanche, il est souvent naturel lors d'une modélisation d'exhiber la matrice de la chaîne trace et les taux de sauts. Ces objets sont suffisants pour étudier les comportements en temps long des chaînes de Markov. Mais ils n'ont pas de sens dès que l'on désire regarder des espaces d'états continus. De fait, il est plus intéressant de regarder le générateur infinitésimal associé à la chaîne de Markov, qui garde un sens dans le cas des espaces d'états continus.

Proposition 8.2.2. *Soit X une chaîne de Markov à temps continu de semi-groupe de transition $(P_t, t \geq 0)$. Il existe une matrice $A = (A(x,y), x, y \in E)$, appelée générateur infinitésimal de la chaîne de Markov de semi-groupe de transition $(P_t, t \geq 0)$, telle que*

$$\boxed{A = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_h - I}{h},}$$

au sens où

$$A(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{P_h(x,y)}{h} & \text{si } x \neq y, \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{P_h(x,x) - 1}{h} & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Le générateur infinitésimal est relié à la matrice de transition Q de la chaîne trace associée à X et aux taux de sauts $(\lambda(x), x \in E)$ de la manière suivante : pour tout $x \in E$, $A(x,x) = -\lambda(x)$, et pour tout $y \in E$ différent de x, $A(x,y) = \lambda(x)Q(x,y)$. En particulier, on a pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} A(x,y) = 0. \tag{8.6}$$

Remarquons que, d'après la définition de A, on a $A(x,x) \leq 0$ et $A(x,y) \geq 0$ pour $x \neq y$.

Remarque 8.2.3. On admet (voir [1] Chap. 8) les résultats suivants concernant le générateur infinitésimal. Pour tout $t \geq 0$, la limite de $\dfrac{P_{t+h} - P_t}{h}$, quand h décroît vers 0, existe. On la note $\dfrac{dP_t}{dt}$ et on a

$$\frac{dP_t}{dt} = P_t A = A P_t. \tag{8.7}$$

Pour $t \geq 0$, on note ν_t la loi de X_t ($\nu_t(x) = \mathbb{P}(X_t = x)$ pour $x \in E$) et $u_t(x) = \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x]$, $x \in E$, avec f bornée. Par définition de P_t, on a $\nu_t = \nu_0 P_t$ et $u_t = P_t f$. On peut décrire l'évolution de ν_t et u_t à l'aide de (8.7). Plus précisément, on admet les équations de Kolmogorov : pour $t \geq 0$,

$$\frac{du_t}{dt} = A u_t \quad \text{et} \quad \frac{d\nu_t}{dt} = \nu_t A.$$

$\diamondsuit$

Remarque 8.2.4. Dans le cas où E est fini, l'unique solution de (8.7) est donnée par

$$P_t = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}, \tag{8.8}$$

avec la convention $A^0 = I$. Dans le cas où E est infini, rien n'assure que le produit de matrices $A^2 = AA$, et a fortiori e^{tA}, aient un sens. $\diamondsuit$

Remarque 8.2.5. Supposons que chaque état $y \neq x$ possède une horloge indépendante des autres qui sonne à un temps de loi exponentielle de paramètre $A(x,y) = \lambda(x)Q(x,y)$. En généralisant le lemme 7.4.4 pour une suite infinie de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle, on peut vérifier que le temps où la première horloge sonne suit une loi exponentielle de paramètre $\sum_{y \neq x} \lambda(x)Q(x,y) = \lambda(x)$, et que l'horloge de y a sonné la première avec probabilité $Q(x,y)$. En particulier, dans la construction de X, conditionnellement à $\{X_0 = x\}$, tout se passe comme si la chaîne de Markov sautait à la première sonnerie sur le site dont l'horloge sonne. La quantité $A(x,y)$ s'interprète comme un taux de transition de x vers y. $\diamondsuit$

Démonstration de la proposition 8.2.2. Quitte à décaler le temps de $t_0 > 0$, on peut supposer que $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$. On reprend les notations du paragraphe précédent.

Si $\lambda(x) = 0$, alors on a $V_1 = +\infty$, et donc p.s. $X_t = x$ pour tout $t \geq 0$. Donc il vient $P_t(x,x) = 1$ pour tout $t \geq 0$, et donc $A(x,y) = 0$ pour tout $y \in E$.

Supposons $\lambda(x) > 0$. On rappelle que $Z_0 = X_0$. Remarquons que, conditionnellement à $\{Z_0 = x\}$, s'il n'y a pas eu de saut avant l'instant t, alors

$X_t = x$, et si $X_t = x$ soit il n'y pas eu de saut avant l'instant t soit il y a eu au moins deux sauts avant t. On a donc $\{V_1 \geq t\} \subset \{X_t = x\} \subset \{V_1 \geq t\} \cup \{V_1 + V_2 < t\}$. En prenant l'espérance, et en utilisant le fait que V_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(x)$, il vient

$$\mathrm{e}^{-\lambda(x)t} \leq P_t(x,x) \leq \mathrm{e}^{-\lambda(x)t} + \mathbb{P}(V_1 + V_2 < t | Z_0 = x).$$

En décomposant suivant les états possibles de Z_1, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(V_1 + V_2 < t | Z_0 = x) \\
&\qquad \leq \mathbb{P}(V_1 < t, V_2 < t | Z_0 = x) \\
&\qquad = \sum_{y \in E} Q(x,y) \mathbb{P}(V_1 < t, V_2 < t | Z_0 = x, Z_1 = y) \\
&\qquad = \sum_{y \in E} Q(x,y) \mathbb{P}(V_1 < t | Z_0 = x, Z_1 = y) \mathbb{P}(V_2 < t | Z_0 = x, Z_1 = y) \\
&\qquad = [1 - \mathrm{e}^{-\lambda(x)t}] \sum_{y \in E} Q(x,y)[1 - \mathrm{e}^{-\lambda(y)t}].
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominé, on a $\lim_{t \to 0} \sum_{y \in E} Q(x,y)[1 - \mathrm{e}^{-\lambda(y)t}] = 0$. Ainsi on obtient $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(V_1 + V_2 < t | Z_0 = x) = 0$. On en déduit donc que $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[P_t(x,x) - 1]$ existe et vaut $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\mathrm{e}^{-\lambda(x)t} - 1] = -\lambda(x)$.

Pour $y \neq x$, conditionnellement à $\{Z_0 = x\}$, on a $\{V_1 < t, V_1 + V_2 \geq t, Z_1 = y\} \subset \{X_t = y\} \subset \{V_1 < t, V_1 + V_2 \geq t, Z_1 = y\} \cup \{V_1 + V_2 < t\}$. On a donc en prenant l'espérance

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(V_1 < t, V_1 + V_2 \geq t, Z_1 = y | Z_0 = x) \\
&\qquad \leq P_t(x,y) \leq \mathbb{P}(V_1 < t, V_1 + V_2 \geq t, Z_1 = y | Z_0 = x) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(V_1 + V_2 < t | Z_0 = x).
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(V_1 < t, V_1 + V_2 \geq t, Z_1 = y | Z_0 = x) \\
&\qquad = Q(x,y) \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbf{1}_{\{v_1 < t, v_1 + v_2 \geq t\}} \lambda(x) \lambda(y) \, \mathrm{e}^{-\lambda(x)v_1 - \lambda(y)v_2} \; dv_1 dv_2 \\
&\qquad = \lambda(x) Q(x,y) \, \mathrm{e}^{-\lambda(y)t} \int_0^t \mathrm{e}^{(\lambda(y) - \lambda(x))v_1} \, dv_1.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{e}^{(\lambda(y) - \lambda(x))v_1} \, dv_1 = 1$, on obtient $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(V_1 < t, V_1 + V_2 \geq t, Z_1 = y | Z_0 = x) = \lambda(x) Q(x,y)$. On a déjà vu que $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(V_1 + V_2 < t | Z_0 = x) = 0$. On en déduit donc que $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P_t(x,y)$ existe et vaut $\lambda(x) Q(x,y)$. L'égalité (8.6) se déduit du fait que Q est une matrice stochastique. $\square$

8.3 Comportement asymptotique

Nous avons démontré les comportements asymptotiques des chaînes de Markov à temps discret. Un phénomène similaire se produit pour les chaînes de Markov à temps continu. Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ une chaîne de Markov à temps continu de semi-groupe de transition $(P_t, t \geq 0)$. On note $\nu_t = (\nu_t(x), x \in E)$ la loi de X_t. Par définition de P_t, on a $\nu_t = \nu_0 P_t$.

Définition 8.3.1. *On dit que la probabilité π est une probabilité invariante (appelée aussi probabilité stationnaire) de la chaîne de Markov X de semi-groupe de transition $(P_t, t \geq 0)$ si pour tout $t \geq 0$, on a* $\boxed{\pi P_t = \pi.}$

Si à l'instant initial la loi de X_0 est π, alors la loi de X_t est π pour tout t. En différenciant l'équation $\pi P_t = \pi$ par rapport à t, en $t = 0$, on obtient que $\pi A = 0$. On admet la proposition suivante.

Proposition 8.3.2. *La probabilité π est une probabilité invariante de la chaîne de Markov X de générateur infinitésimal A si et seulement si* $\boxed{\pi A = 0.}$

Exercice 8.3.3. On suppose que l'espace d'état E est fini. En utilisant l'équation (8.8), montrer que $\pi A = 0 \Longleftrightarrow \pi P_t = \pi \quad \forall t \geq 0$. ♦

Remarquons que, quand elles existent, la probabilité invariante de la chaîne de Markov à temps continu X est différente a priori de la probabilité invariante de la chaîne trace Z (voir l'exemple 8.3.14).

Définition 8.3.4. *On dit qu'une chaîne de Markov de semi-groupe de transition $(P_t, t \geq 0)$ est irréductible si pour tous $x, y \in E$, on a $P_t(x, y) > 0$ pour tout $t > 0$.*

La chaîne de Markov à temps continu est irréductible si et seulement si $\lambda(x) > 0$ pour tout $x \in E$ et la chaîne trace est irréductible. On peut aussi vérifier directement que la chaîne est irréductible à partir du générateur infinitésimal A, comme le montre l'exercice qui suit.

Exercice 8.3.5. Soit X une chaîne de Markov à temps continu de générateur infinitésimal A. Vérifier que si pour tout couple (x, y), il existe $n \geq 1$ et une suite de points distincts $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ tels que $\prod_{i=0}^{n-1} A(x_i, x_{i+1}) > 0$, alors la chaîne de Markov est irréductible. ♦

On suppose dorénavant que X est irréductible. Nous donnons l'analogue du théorème 1.4.3, qui est une conséquence directe des propositions 8.3.10, 8.3.9 et du théorème 8.3.12.

Théorème 8.3.6. *Une chaîne de Markov à temps continu irréductible possède au plus une probabilité invariante, π, et alors $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.*

Les exercices 8.3.11 et 8.3.13 permettent de calculer la probabilité invariante, quand elle existe, de la chaîne à temps continu ou de la chaîne trace à partir de la probabilité invariante de l'autre chaîne.

Nous admettons l'analogue du théorème 1.4.4 sur la convergence en loi des chaînes de Markov à temps continu (voir [1] théorème 8.6.2).

Théorème 8.3.7. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une chaîne de Markov à temps continu, irréductible. Si elle possède une (unique) probabilité invariante,* π, *alors* $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = x) = \pi(x)$, *pour tout* $x \in E$ *: i.e. la suite des lois des variables* X_t *converge étroitement vers l'unique probabilité invariante quand* t *tend vers l'infini. Si elle ne possède pas de probabilité invariante, alors* $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = x) = 0$ *pour tout* $x \in E$.

Remarque 8.3.8. Les phénomènes de périodicité des chaînes de Markov à temps discret, qui compliquent l'étude du comportement en temps long, disparaissent pour les chaînes de Markov à temps continu. ♢

Nous donnons également le théorème ergodique 8.3.12, analogue en temps continu du théorème 1.5.6. Pour $t > 0$, on pose $X_{t^-} = \lim_{s\to t^-} X_s$ la limite à gauche de X en t. On note, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$,

$$U(x) = \inf\{t > 0\,; X_{t^-} \neq x, X_t = x\},$$

le premier temps de retour en x de X, et

$$T(x) = \inf\{k \geq 1\,; Z_k = x\},$$

le premier temps de retour en x de la chaîne trace Z. Remarquons que, comme le processus X n'a qu'un nombre fini de sauts sur tout intervalle de temps borné, on a $\{U(x) = +\infty\} = \{T(x) = +\infty\}$. Si la chaîne Z est transiente, alors ces événements sont de probabilités non nulles.

On dit que la chaîne X est transiente (resp. récurrente) si la chaîne trace est transiente (resp. récurrente). On rappelle que X étant irréductible, on a $\lambda(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On pose

$$\nu(x) = \mathbb{E}[U(x)|X_0 = x] \in (0, \infty] \quad \text{et} \quad \pi(x) = \frac{1}{\nu(x)\lambda(x)}\,.$$

Nous démontrons l'analogue de la proposition 1.5.4.

Proposition 8.3.9. *Soit* X *une chaîne de Markov à temps continu irréductible. Pour tout* $x \in E$, *on a*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = x\}}\, ds \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \pi(x). \tag{8.9}$$

De plus, soit $\pi(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$, *soit* $\pi(x) > 0$ *pour tout* $x \in E$. *Dans ce dernier cas on dit que la chaîne est* ***récurrente positive***. *Si* $\pi(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$, *alors soit la chaîne est transiente, soit elle est récurrente. Dans ce dernier cas, on dit que la chaîne est* ***récurrente nulle***.

Démonstration. Soit $x \in E$. Dans le cas transient, l'événement $\{U(x) = +\infty\}$ est de probabilité non nulle. On en déduit que $\nu(x) = +\infty$ et $\pi(x) = 0$. De plus il existe p.s. un temps fini t_0 aléatoire tel que pour tout $s > t_0$, on a $X_s \neq x$. On en déduit donc que (8.9) est vérifié.

On suppose que la chaîne X est récurrente. On pose $U_1 = U(x)$, et pour tout $n \geq 1$,

$$U_{n+1} = \inf\{t > 0\,; X_{R_n+t^-} \neq x, X_{R_n+t} = x\},$$

où $R_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$, avec $R_0 = 0$. On pose également $T_1 = T(x)$, et pour tout $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = \inf\{k \geq 1\,; Z_{S_n+k} = x\},$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, avec $S_0 = 0$. Le fait de supposer la chaîne récurrente assure que tous les temps de retours sont p.s. finis. On considère les excursions hors de x : pour $n \geq 1$,

$$Y_n = (T_n, Z_{S_{n-1}}, V_{S_{n-1}+1}, Z_{S_{n-1}+1}, \ldots, V_{S_n}, Z_{S_n}),$$

Remarquons que la durée de la n-ième excursion du processus X hors de x est donnée par

$$U_n = \sum_{k=1}^{T_n} V_{S_{n-1}+k}. \tag{8.10}$$

Un calcul analogue à celui effectué dans la démonstration de la proposition 1.5.4, assure que, pour tout $N \geq 2$, les variables aléatoires $(Y_n, n \in \{1, \ldots, N\})$ sont indépendantes et que les variables aléatoires $(Y_n, n \in \{2, \ldots, N\})$ ont pour loi celle de Y_1 sous $\mathbb{P}(\cdot|X_0 = x)$. En particulier, cela implique que les variables aléatoires $(Y_n, n \geq 1)$ sont indépendantes, et que les variables aléatoires $(Y_n, n \geq 2)$ ont même loi.

Par la loi forte des grands nombres, on en déduit que p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k = \nu(x).$$

Dans l'excursion $n \geq 2$, X est dans l'état x pendant une période de temps de longueur $V_{S_{n-1}}$. Ainsi pour $n \geq 2$ et $t \in [R_n, R_{n+1}[$, on a

$$\frac{1}{R_{n+1}} \sum_{k=2}^{n-1} V_{S_{k-1}+1} \leq \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}}\, ds \leq \frac{1}{R_n} \sum_{k=1}^{n} V_{S_{k-1}+1}.$$

Comme les variables $(V_{S_{k-1}+1}, k \geq 2)$ sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\lambda(x)$, on déduit de la loi forte des grands nombres que p.s. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} V_{S_{k-1}+1} = 1/\lambda(x)$. On en déduit ainsi que p.s. $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}}\, ds = 1/(\nu(x)\lambda(x))$. Ceci démontre (8.9). Par convergence dominée, on en déduit que pour tout $y \in E$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_s(y,x)\, ds = \pi(x)$. Comme $P_s(y,x) \geq P_{s-1}(y,z)P_1(z,x)$ pour $s \geq 1$, on en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_s(y,x)\, ds \geq P_1(z,x) \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{t-1} P_s(y,z)\, ds,$$

c'est-à-dire $\pi(x) \geq P_1(z,x)\pi(z)$. Or on a $P_1(z,x) > 0$ pour tous $x, z \in E$. Et donc soit $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$, soit $\pi(x) = 0$ pour tout $x \in E$. □

Un raisonnement similaire à celui de la démonstration de la proposition 1.5.5, permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition 8.3.10. *Une chaîne irréductible, $(X_t, t \geq 0)$, qui est transiente ou récurrente nulle, ne possède pas de probabilité invariante.*

On rappelle la notation $(\mu, f) = \sum_{x\in E} \mu(x)f(x)$, où μ est une probabilité sur E et f une fonction sur E telles que la somme soit convergente.

Exercice 8.3.11. On suppose que la chaîne trace est récurrente positive de probabilité invariante π^{trace}. On a $(\pi^{\text{trace}}, \frac{1}{\lambda}) \in]0, \infty]$.

1. Montrer, en utilisant par exemple le lemme 1.5.12 et (8.10), que pour $x \in E$, on a
$$\nu(x) = \frac{(\pi^{\text{trace}}, \frac{1}{\lambda})}{\pi^{\text{trace}}(x)} \quad \text{et} \quad \pi(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \frac{\pi^{\text{trace}}(x)}{(\pi^{\text{trace}}, \frac{1}{\lambda})}.$$
2. En déduire que la chaîne X est récurrente positive si et seulement si $(\pi^{\text{trace}}, \frac{1}{\lambda}) < \infty$.

♦

On a le résultat de convergence suivant appelé théorème ergodique, qui est l'analogue en temps continu du théorème 1.5.6.

Théorème 8.3.12. *Soit X une chaîne de Markov à temps continu sur E, irréductible et récurrente positive. Le vecteur $\pi = (\pi(x), x \in E)$ est l'unique probabilité invariante de la chaîne de Markov. De plus, pour toute fonction f définie sur E, telle que $f \geq 0$ ou $(\pi, |f|) < \infty$, on a*

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\, ds \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} (\pi, f). \tag{8.11}$$

La moyenne temporelle est donc égale à la moyenne spatiale par rapport à la probabilité invariante.

Démonstration. On conserve les notations de la démonstration de la proposition 8.3.9. On suppose que la chaîne X est récurrente positive. Soit f une fonction positive définie sur E. Rappelons que $X_s = Z_p$ pour $s \in [S_p, S_p + V_{p+1}[$, $p \in \mathbb{N}$. On a l'inégalité suivante pour $t \in [R_n, R_{n+1}[$:

$$\frac{1}{R_{n+1}} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{T_k} f(Z_{S_{k-1}+i-1}) V_{S_{k-1}+i}$$
$$\leq \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\, ds \leq \frac{1}{R_n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{T_k} f(Z_{S_{k-1}+i-1}) V_{S_{k-1}+i}.$$

Par l'indépendance des excursions, et le fait qu'elles ont toutes même loi, sauf peut-être la première, on en déduit que p.s. pour tout $x \in E$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\, ds = \frac{1}{\nu(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^{U(x)} f(X_s)\, ds \middle| X_0 = x\right]. \tag{8.12}$$

Pour $f(x) = \mathbf{1}_{\{x=y\}}$, on déduit de (8.9) que

$$\pi(y) = \frac{1}{\nu(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^{U(x)} \mathbf{1}_{\{X_s=y\}}\, ds \middle| X_0 = x\right]. \tag{8.13}$$

En sommant sur y, il vient que $\pi = (\pi(x), x \in E)$ est une probabilité. On obtient à partir de (8.12) que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\, ds = (\pi, f).$$

À l'aide d'arguments similaires à ceux utilisés à la fin de la démonstration du théorème 1.5.6, on peut étendre cette convergence aux fonctions f de signe quelconque et telles que $(\pi, |f|) < \infty$, puis vérifier que π est une probabilité invariante et que c'est la seule. □

Exercice 8.3.13. L'objectif de cet exercice est de calculer la probabilité invariante, quand elle existe, de la chaîne trace. Soit X une chaîne de Markov à temps continu irréductible récurrente positive de probabilité invariante π.

1. Vérifier à l'aide de (8.13) que pour $f \geq 0$,

$$(\pi, f) = \frac{1}{\nu(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^{U(x)} f(X_s)\, ds \middle| X_0 = x\right].$$

2. En déduire, avec $f(x) = \lambda(x)$, que $\mathbb{E}[T(x)|X_0 = x] = \dfrac{(\pi, \lambda)}{\pi(x)\lambda(x)}$.
3. Montrer ainsi que la chaîne trace est récurrente positive si et seulement si $(\pi, \lambda) < \infty$, et que pour $x \in E$, on a

$$\pi^{\text{trace}}(x) = \frac{\pi(x)\lambda(x)}{(\pi, \lambda)}.$$

♦

Exemple 8.3.14. Le générateur infinitésimal le plus général d'une chaîne irréductible sur un espace E à 2 éléments, est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. La matrice de transition de la chaîne trace associée à A est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, elle est irréductible et sa probabilité invariante est $(1/2, 1/2)$. On peut diagonaliser le générateur : $A = U^{-1}DU$, où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}.$$

On calcule alors le semi-groupe de transition de la chaîne de Markov à temps continu de générateur infinitésimal A par la formule (8.8) :

$$\begin{aligned} P_t &= \mathrm{e}^{tA} \\ &= U^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} U \\ &= \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\,\frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\mu & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve bien que la chaîne est irréductible. La probabilité invariante de P_t est caractérisée par $\pi A = 0$ soit :

$$\pi = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu, \lambda),$$

(elle est différente en général de la probabilité invariante de la chaîne trace) et on a

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

Remarquons que pour toute loi initiale, ν, on a $\lim_{t\to\infty} \nu P_t = \pi$. De plus on a $\|\nu P_t - \pi\| \leq \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}$. La vitesse de convergence est exponentielle. $\Diamond$

8.4 Processus de Poisson

Soit $(T_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $t \geq 0$, on définit

$$\boxed{N_t = \sup\left\{n \geq 1\,;\, \sum_{k=1}^{n} T_k \leq t\right\},}$$

avec la convention que $\sup \emptyset = 0$. On peut également écrire

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{\sum_{k=1}^{n} T_k \leq t\}}. \tag{8.14}$$

Définition 8.4.1. *Le processus $N = (N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $\tilde{N}_0$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(T_k, k \geq 1)$. Le processus de Poisson issu de $\tilde{N}_0$ est défini par $\tilde{N} = (N_t + \tilde{N}_0, t \geq 0)$.*

Le processus de Poisson permet par exemple de modéliser les temps de panne successifs d'une machine (voir le Chap. 10) ou les temps d'arrivée des clients à un guichet (voir Chap. 9).

Le processus $\tilde{N}$ est construit comme le processus X dans l'équation (8.1), avec $E = \mathbb{N}$, $\lambda(x) = \lambda$ pour les taux de sauts, et pour matrice de transition de la chaîne trace : $Q(x, x+1) = 1$ et $Q(x, y) = 0$ si $y \neq x + 1$. Le taux de sauts est constant, indépendant de la position. Par construction, le processus de Poisson est une chaîne de Markov à temps continu de générateur infinitésimal

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0\ 0 \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda\ 0 \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Le processus de Poisson est transient. Nous donnons quelques propriétés des processus de Poisson.

Proposition 8.4.2.

(i) Le processus $N = (N_t, t \geq 0)$ est croissant avec des sauts de 1.

(ii) La loi de N_t est la loi de Poisson de paramètre λt.

(iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p$, les variables $N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_p} - N_{t_{p-1}}$, sont indépendantes. De plus $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ a même loi que $N_{t_k - t_{k-1}}$. On dit que les accroissements du processus $(N_t, t \geq 0)$ sont indépendants et stationnaires.

Les propriétés (i) et (iii) restent vraies pour le processus $\tilde{N}$, car on ne considère que les accroissements.

Démonstration. (i) Il découle de la formule (8.14), que le processus N est croissant. Remarquons que les sauts de $(N_t, t \geq 0)$ sont égaux à 1 si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $T_k \neq 0$ presque sûrement. Or ceci est vrai car

$$\mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}^*; T_k = 0) \leq \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(T_k = 0) = 0.$$

(ii) Remarquons que si $n \geq 1$,

$$\{N_t \geq n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} T_i \leq t \right\}.$$

D'après la remarque A.2.12, la loi de $\sum_{k=1}^{n} T_k$ est une loi gamma de paramètre (λ, n) de densité $\dfrac{1}{(n-1)!}\, \lambda^n s^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda s}\, \mathbf{1}_{\{s>0\}}$. On en déduit donc que pour $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t\right) - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} T_i \leq t\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \lambda^n s^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda s}\ ds - \frac{1}{n!}\int_0^t \lambda^{n+1} s^n\,\mathrm{e}^{-\lambda s}\ ds \\
&= \frac{1}{n!}\left[\lambda^n s^n\,\mathrm{e}^{-\lambda s}\right]_0^t \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\frac{\lambda^n t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Enfin, pour $n = 0$, on obtient $\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. On en déduit que la loi de N_t est la loi de Poisson de paramètre λt.

(*iii*) En utilisant $N_{t_0} = 0$, la formule des probabilités conditionnelles (A.4), et la propriété de Markov, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, \ldots, N_{t_p} - N_{t_{p-1}} = n_p) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1, \ldots, N_{t_p} = \sum_{i=1}^{p} n_i) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1)\prod_{k=2}^{p}\mathbb{P}\Big(N_{t_k} = \sum_{i=1}^{k} n_i \Big| N_{t_1} = n_1, \ldots, N_{t_{k-1}} = \sum_{i=1}^{k-1} n_i\Big) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1)\prod_{k=2}^{p}\mathbb{P}\Big(\tilde{N}_{t_k - t_{k-1}} = \sum_{i=1}^{k} n_i \Big| \tilde{N}_0 = \sum_{i=1}^{k-1} n_i\Big) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1)\prod_{k=2}^{p}\mathbb{P}(N_{t_k - t_{k-1}} = n_k).
\end{aligned}
$$

Comme ceci est vrai pour toutes valeurs entières de $n_1, \ldots, n_p$, on démontre ainsi la propriété (*iii*). □

Nous terminons ce paragraphe par une propriété asymptotique du processus de Poisson, qui est un cas particulier de la proposition 10.3.3.

Proposition 8.4.3. *Soit* $(N_t, t \geq 0)$ *un processus de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$. *On a p.s.*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t} = \lambda.$$

Références

1. P. Brémaud. *Markov chains. Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues.* Springer texts in applied mathematics. Springer, 1998.
2. K. Chung. *Markov chains with stationary transition probabilities.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, seconde édition, 1967.

3. E. Çinlar. *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
4. J. Jacod. *Chaînes de Markov, processus de Poisson et applications*. Cours de DEA, Paris VI, http ://www.proba.jussieu.fr/supports.php, 2004.
5. J. Lacroix. *Chaînes de Markov et processus de Poisson*. Cours de DEA, Paris VI, http ://www.proba.jussieu.fr/supports.php, 2002.
6. B. Ycart. *Modèles et algorithmes markoviens*, volume 39 de *Mathématiques & Applications*. Springer, Berlin, 2002.