

Introduction aux phénomènes de branchement : le processus de Galton-Watson

L'étude des processus de branchement est née avant le siècle dernier de l'intérêt pour la disparition des noms de familles nobles en Angleterre. En 1873, Galton a proposé un problème mathématique précis en lien avec ce phénomène :

N hommes adultes d'une nation qui portent tous des noms de famille différents partent coloniser un pays. On suppose qu'à chaque génération, la proportion d'hommes qui ont k garçons est p_k ($k \in \mathbb{N}$). La question est de savoir quelle sera, après n générations, la proportion des noms de famille qui auront disparu.

En raisonnant sur la première génération, on peut voir que la probabilité η de disparition ou extinction d'un nom de famille dans le futur est égale à la probabilité p_0 pour que l'ancêtre n'ait aucun garçon, plus la probabilité p_1 qu'il ait un garçon fois la probabilité η que la descendance masculine de ce garçon s'éteigne, plus la probabilité p_2 qu'il ait deux garçons fois la probabilité η^2 que les descendes masculines, supposées indépendantes, de ces deux garçons s'éteignent et ainsi de suite. Ainsi η est solution de l'équation

$$\eta = p_0 + p_1\eta + p_2\eta^2 + p_3\eta^3 + \dots = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \eta^k \quad (4.1)$$

Watson a obtenu cette équation par un raisonnement légèrement différent. Comme $\eta = 1$ en est toujours solution, il a conclu de manière incorrecte au caractère inéluctable de l'extinction de la descendance masculine et donc de la disparition des noms de famille.

Plus récemment, les processus de branchement sont apparus comme des modèles pertinents en biologie (voir [4]) et en particulier en génétique. On trouve dans ce domaine des questions très proches de celle de la disparition des noms de famille. Considérons par exemple une macro-molécule d'ADN ou d'ARN qui consiste en une chaîne de ν nucléotides. En une unité de temps, cette chaîne est répliquée, chaque nucléotide étant copié de façon correcte avec probabilité p et ce indépendamment des autres nucléotides. À l'issue de la réplication, la molécule est détruite avec probabilité w ou bien donne

naissance à deux molécules avec probabilité complémentaire $1 - w$. La probabilité de disparition de la population de macro-molécules correctes est égale à celle d'extinction d'un nom de famille dans le cas où $p_0 = w$ (destruction), $p_1 = (1 - w)(1 - p^\nu)$ (non destruction mais réplication incorrecte), $p_2 = (1 - w)p^\nu$ (non destruction et réplication correcte) et $p_k = 0$ pour $k \geq 3$. Cet exemple est tiré du livre de Kimmel et Axelrod [6].

Afin d'étudier de manière rigoureuse les problèmes précédents, il faut introduire quelques notations et hypothèses. On note Z_n le nombre de descendants (garçons ou molécules correctes) à la n -ième génération issus d'un unique ancêtre : $Z_0 = 1$. Si $Z_n > 0$, chaque individu d'indice i compris entre 1 et Z_n a ξ_i^n enfants si bien que

$$Z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Les variables $(\xi_i^n, n \geq 0, i \geq 1)$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de reproduction $(p_k, k \in \mathbb{N})$ i.e. $\mathbb{P}(\xi_i^n = k) = p_k$. On les suppose de carré intégrable et on note respectivement $m = \mathbb{E}[\xi_i^n]$, $\sigma^2 = \mathbb{E}[(\xi_i^n - m)^2]$ et $G(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_i^n}]$, $s \in [0, 1]$ leur espérance, leur variance et leur fonction génératrice communes.

La famille de variables aléatoires $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ s'appelle processus de Galton-Watson.

Il va s'avérer que la position de l'espérance m par rapport à 1 joue un rôle important dans l'analyse du phénomène d'extinction. C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante :

Définition 4.0.1. *Le processus de Galton-Watson et sa loi de reproduction sont dits*

- *sous-critiques* si $m < 1$,
- *critiques* si $m = 1$,
- *surcritiques* si $m > 1$.

Le premier paragraphe du chapitre est consacré à l'étude de la probabilité d'extinction.

Dans le second paragraphe, nous motivons par un exemple biologique l'étude de la loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$. Puis nous montrons en distinguant les cas sous-critique, critique et surcritique que cette loi conditionnelle correctement renormalisée converge lorsque n tend vers l'infini.

Dans le troisième paragraphe, nous introduisons une technique de fonction d'importance qui permet de se ramener à la simulation d'un processus surcritique lorsque l'on souhaite calculer une espérance relative à un processus sous-critique ou critique. L'objectif de cette technique est d'obtenir un estimateur de variance moindre.

Enfin, dans le dernier paragraphe, nous étudions les liens entre la loi de la population totale $\sum_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ du processus de Galton-Watson et la loi de reproduction. Les résultats obtenus seront utilisés dans le Chap. 12 consacré

aux phénomènes de coagulation et de fragmentation ainsi que dans le Chap. 9 qui traite des files d'attente. Les démonstrations sont beaucoup plus techniques que celles données dans les paragraphes précédents.

Remarque 4.0.2. Pour $(z_1, \dots, z_{n-1}, x, y) \in \mathbb{N}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n+1} = y | Z_1 = z_1, \dots, Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = x) \\ = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^x \xi_i^n = y, Z_1 = z_1, \dots, Z_n = x\right) / \mathbb{P}(Z_1 = z_1, \dots, Z_n = x) \\ = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^x \xi_i^n = y\right), \end{aligned}$$

par indépendance des variables $(\xi_i^n, i \geq 1)$ et des variables Z_1, \dots, Z_n qui sont fonctions des $(\xi_i^l, 0 \leq l \leq n-1, i \geq 1)$. Ainsi le processus $(Z_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, P(x, y) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^x \xi_i^1 = y\right).$$

Cette propriété ne sera pas exploitée dans ce qui suit car le bon outil pour l'étude du processus $(Z_n, n \geq 0)$ est la fonction génératrice. \diamond

Remarque 4.0.3. Pour des résultats plus fins que ceux exposés dans ce chapitre ou sous l'hypothèse $\sum_{k \geq 1} k \log(k) p_k < +\infty$ moins forte que celle $\sum_{k \geq 1} k^2 p_k < +\infty$ que nous avons faite, on pourra se référer aux livres d'Asmussen et Hering [1], d'Athreya et Ney [2] et de Harris [3]. \diamond

4.1 Étude du phénomène d'extinction

On note \mathcal{E} l'événement "la descendance s'éteint" : $\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 1} \{Z_n = 0\}$. Comme, lorsque la population s'annule à la n -ième génération, elle reste nulle ultérieurement, les événements $\{Z_n = 0\}$ sont croissants au sens où $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$. Ainsi la probabilité d'extinction η est donnée par

$$\eta = \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

On note $G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$ la fonction génératrice du nombre de descendants à la n -ième génération. On a $\mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$. Donc

$$\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(0).$$

Pour caractériser la probabilité d'extinction η , nous allons étudier la suite $(G_n(0), n \geq 0)$. La clé de cette étude est la relation entre G_{n-1} , G_n et la fonction génératrice G de la loi de reproduction énoncée dans le lemme suivant.

Rappelons auparavant que d'après le théorème A.2.4, la fonction G est croissante et convexe sur $[0, 1]$. Avec les hypothèses que nous avons faites, elle est deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ et vérifie

$$G'(1) = \mathbb{E}[\xi_i^n] = m \text{ et } G''(1) = \mathbb{E}[\xi_i^n(\xi_i^n - 1)] = \sigma^2 + m^2 - m.$$

Lemme 4.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(s) = G_{n-1}(G(s)) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}(s)$,*

c'est-à-dire que G_n est la composée n -ième de la fonction génératrice G des variables ξ_i^n . En outre

$$\mathbb{E}[Z_n] = m^n.$$

Démonstration. On utilise le caractère discret de la variable aléatoire Z_{n-1} qui assure que $1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{Z_{n-1}=k\}}$ et son indépendance avec les ξ_i^{n-1} , $i \geq 1$. Ces deux propriétés entraînent que

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \mathbb{E}[s^{Z_n}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{Z_{n-1}=k\}} s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{n-1}}\right] \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_{n-1} = k) \mathbb{E}\left[s^{\xi_1^{n-1}}\right]^k = \sum_{k \geq 0} G(s)^k \mathbb{P}(Z_{n-1} = k) = G_{n-1}(G(s)). \end{aligned}$$

D'après le théorème A.2.4, on a $\mathbb{E}[Z_n] = G'_n(1)$. La relation de récurrence que nous venons d'établir assure que $G_n(s) = G(G_{n-1}(s))$ et donc que

$$G'_n(s) = G'(G_{n-1}(s))G'_{n-1}(s) = \prod_{l=1}^n G'(G_{l-1}(s)).$$

Comme pour tout $l \geq 1$, $G_l(1) = 1$, on conclut que $\mathbb{E}[Z_n] = G'(1)^n = m^n$. \square

Remarque 4.1.2. On peut retrouver les résultats qui précèdent en décomposant suivant les valeurs prises par Z_1 au lieu de le faire suivant les valeurs prises par Z_{n-1} . En effet, si on note $Z_{1,n}^i$ le nombre de descendants à la n -ième génération du i -ième descendant de la première génération, alors $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_1} Z_{1,n}^i$. En outre, conditionnellement à l'événement $\{Z_1 = k\}$, les variables aléatoires $Z_{1,n}^i$, $1 \leq i \leq k$ sont indépendantes et ont même loi que Z_{n-1} . Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s^{Z_n}] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z_1=k\}} s^{Z_{1,n}^1 + \dots + Z_{1,n}^k}] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Z_1 = k) (G_{n-1}(s))^k \\ &= G(G_{n-1}(s)). \end{aligned}$$

\diamond

Dans le cas particulier suivant, nous allons obtenir une expression explicite pour G_n et en déduire la loi du nombre de descendants Z_n à la n -ième génération.

Exemple 4.1.3. On suppose que chaque variable ξ_i^n est égale avec probabilité $\beta \in]0, 1]$ à une variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et avec probabilité $1 - \beta$ à 0 i.e.

$$p_k = \begin{cases} 1 - \beta & \text{si } k = 0 \\ \beta p q^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{où on note } q = 1 - p). \quad (4.3)$$

On vérifie alors en utilisant par exemple les résultats du paragraphe A.2.1 sur les variables aléatoires géométriques que

$$m = \frac{\beta}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{\beta(1+q-\beta)}{p^2} \quad \text{et} \quad G(s) = 1 - \beta + \frac{\beta ps}{1 - qs}.$$

L'équation $G(s) = s$ se récrit en utilisant $p + q = 1$:

$$0 = 1 - \beta - qs + \beta qs + \beta ps - s + qs^2 = (1 - \beta - qs)(1 - s).$$

Elle admet donc comme racines 1 et $s_0 = \frac{1 - \beta}{1 - p}$. Ces deux racines sont distinctes si et seulement si l'espérance m des variables ξ_i^n est différente de 1. On vérifie que

$$\forall r, \forall t \neq s, \quad \frac{G(s) - G(r)}{G(s) - G(t)} = \frac{s - r}{s - t} \times \frac{1 - qt}{1 - qr}.$$

Comme $\frac{1 - qs_0}{1 - q} = \frac{\beta}{p} = m$, pour le choix $r = 1$ et $t = s_0$, on obtient

$$\frac{G(s) - 1}{G(s) - s_0} = m \frac{s - 1}{s - s_0}.$$

Cette formule s'itère pour donner

$$\frac{G_n(s) - 1}{G_n(s) - s_0} = m^n \frac{s - 1}{s - s_0}.$$

Lorsque $m \neq 1$, alors $s_0 \neq 1$ et on peut calculer $G_n(s)$ à partir de cette équation. Ainsi

$$G_n(s) = \frac{(1 - m^n s_0)s + s_0(m^n - 1)}{(1 - m^n)s + m^n - s_0} \quad \text{si } m = \frac{\beta}{p} \neq 1.$$

Cette approche ne fonctionne plus dans le cas $m = 1$ où $s_0 = 1$. On peut néanmoins vérifier par récurrence que

$$G_n(s) = \frac{nq + (1 - (n+1)q)s}{1 + (n-1)q - nqs} \quad \text{si } m = \frac{\beta}{p} = 1. \quad (4.4)$$

Dans tous les cas,

$$G_n(s) = 1 - \beta_n + \frac{\beta_n p_n s}{1 - (1 - p_n)s} \text{ où } \beta_n = m^n p_n \text{ et } p_n = \begin{cases} \frac{1 - s_0}{m^n - s_0} & \text{si } m \neq 1 \\ \frac{p}{1 + (n-1)q} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.5)$$

La population Z_n à la n -ième génération est donc égale avec probabilité β_n à une variable géométrique de paramètre p_n et avec probabilité $1 - \beta_n$ à 0.

On vérifie facilement que lorsque n tend vers l'infini, $G_n(0) = 1 - \beta_n$ tend vers 1 si $m \leq 1$ et vers s_0 sinon. Ainsi la probabilité d'extinction η vaut 1 si $m \leq 1$ et s_0 sinon. \diamond

L'exercice suivant qui se place dans le cas particulier que nous venons de considérer, a pour but de retrouver l'expression de G_n donnée dans le cas critique à partir de celle obtenue dans le cas sous-critique.

Exercice 4.1.4. On suppose que la loi de reproduction est donnée par l'équation (4.3) avec $\beta = p \in]0, 1[$. On se donne indépendamment des variables $(\xi_i^n, n \geq 0, i \geq 1)$ distribuées suivant cette loi, des variables $(U_i^n, n \geq 0, i \geq 1)$ indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 1]$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[, n \geq 0$ et $i \geq 1$, on pose $\tilde{\xi}_i^{\varepsilon, n} = \mathbf{1}_{\{U_i^n \geq \varepsilon\}} \xi_i^n$. On note $(\tilde{Z}_n^\varepsilon, n \in \mathbb{N})$ le processus de Galton-Watson associé.

- Quelle est la loi commune des variables $\tilde{\xi}_i^{\varepsilon, n}$?
En déduire $G_n^\varepsilon(s) = \mathbb{E} \left[s^{\tilde{Z}_n^\varepsilon} \right]$.
- Vérifier par récurrence que lorsque ε tend vers 0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, \tilde{Z}_n^ε converge presque sûrement vers Z_n .
- Conclure que la fonction génératrice de Z_n est donnée par (4.4).

\blacklozenge

4.1.1 Caractérisation de la probabilité d'extinction η

Pour une loi de reproduction quelconque, il n'est pas en général possible de calculer G_n . Mais la relation de récurrence $G_n(s) = G(G_{n-1}(s))$ suffit à caractériser la limite η de la suite $(G_n(0))_n$ pour obtenir la proposition suivante :

Proposition 4.1.5. *La probabilité d'extinction η est la plus petite racine positive de l'équation $G(s) = s$. Elle est nulle si $p_0 = 0$.*

Sinon, elle est égale à 1 dans les cas sous-critique et critique et se trouve dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$ dans le cas surcritique.

Dans le cas particulier de la loi de reproduction (4.3), la plus petite racine positive est $\eta = s_0 = (1 - \beta)/(1 - p)$ dans le cas surcritique où $m = \beta/p > 1$ et $\eta = 1$ sinon.

Démonstration. En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$, dans l'égalité $G_{n+1}(0) = G(G_n(0))$, on obtient avec la continuité de G que $\eta = G(\eta)$. Ainsi on retrouve l'équation (4.1) introduite en décomposant sur le nombre de descendants à la première génération.

On s'intéresse donc aux racines de l'équation $G(s) = s$ dans $[0, 1]$:

- soit $p_1 = 1$ et tous les $s \in [0, 1]$ sont racines,
- soit $p_1 < 1$ avec $p_0 + p_1 = 1$ et $s = 1$ est la seule racine,
- soit $p_0 + p_1 < 1$ et la fonction G est strictement convexe ce qui entraîne qu'il y a au plus une autre racine que 1.

L'équation admet donc une plus petite racine sur $[0, 1]$, que l'on note \underline{s} . Par croissance de G , $G(0) \leq G(\underline{s}) = \underline{s}$, inégalité que l'on itère en $G_n(0) \leq \underline{s}$. En prenant la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\eta \leq \underline{s}$. Comme η est une racine positive de l'équation on conclut que $\eta = \underline{s}$.

Lorsque $p_0 = 0$, alors $G(0) = p_0 = 0$ ce qui entraîne que $\eta = 0$, résultat qui n'étonnera personne puisque la population Z_n est alors croissante avec n .

Il ne reste plus qu'à déterminer la position de la plus petite racine positive de $G(s) = s$ lorsque $p_0 > 0$. On commence par éliminer le cas nécessairement sous-critique où $p_0 + p_1 = 1$. On a alors $G(s) = p_0 + p_1 s$ et la plus petite racine positive est égale à 1.

On suppose désormais que $p_0 + p_1 < 1$, ce qui assure que la fonction G est strictement convexe sur $[0, 1]$. Ainsi pour $s \in [0, 1[$, $G(s) > G(1) + G'(1)(s - 1) = 1 + m(s - 1)$. Dans les cas sous-critique ou critique on en déduit que pour $s \in [0, 1[$, $G(s) > 1 + (s - 1) = s$, ce qui permet de conclure que la plus petite racine est égale à 1 (voir Fig. 4.1). Dans le cas surcritique, $G'(1) = m > 1$ ce qui entraîne que pour s proche de 1, $G(s) < G(1) + (s - 1) = s$. Comme $G(0) - 0 = p_0 > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne l'existence d'une racine sur $]0, 1[$, qui est même unique du fait de la stricte convexité de G (voir Fig. 4.2). \square

Nous allons maintenant revenir sur nos deux exemples introductifs. D'après [5], en estimant la probabilité p_k pour qu'un homme ait k garçons sur les données du recensement des hommes blancs de 1920 aux États-Unis, et en appliquant la proposition 4.1.5, Lotka [7] a obtenu $\eta = 0.88$ comme probabilité d'extinction de la descendance masculine issue d'un individu. Dans [8], il a également remarqué que la loi de reproduction (4.3) pour $\beta = 0.5187$ et $p = 0.4414$ s'ajustait bien aux données du recensement. Pour cette loi de reproduction surcritique ($m = \beta/p = 1.175$), la probabilité d'extinction est $s_0 = (1 - \beta)/(1 - p) = 0.862$.

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons également modélisé l'évolution d'une population de macro-molécules correctes à l'aide d'un processus de Galton-Watson de loi de reproduction :

- $p_0 = w$: probabilité pour que la molécule soit détruite après répllication,
- $p_1 = (1 - w)(1 - p^\nu)$: probabilité $1 - w$ pour que la molécule et sa copie survivent fois la probabilité $(1 - p^\nu)$ pour que l'un au moins des ν nucléotides ait été mal copié,

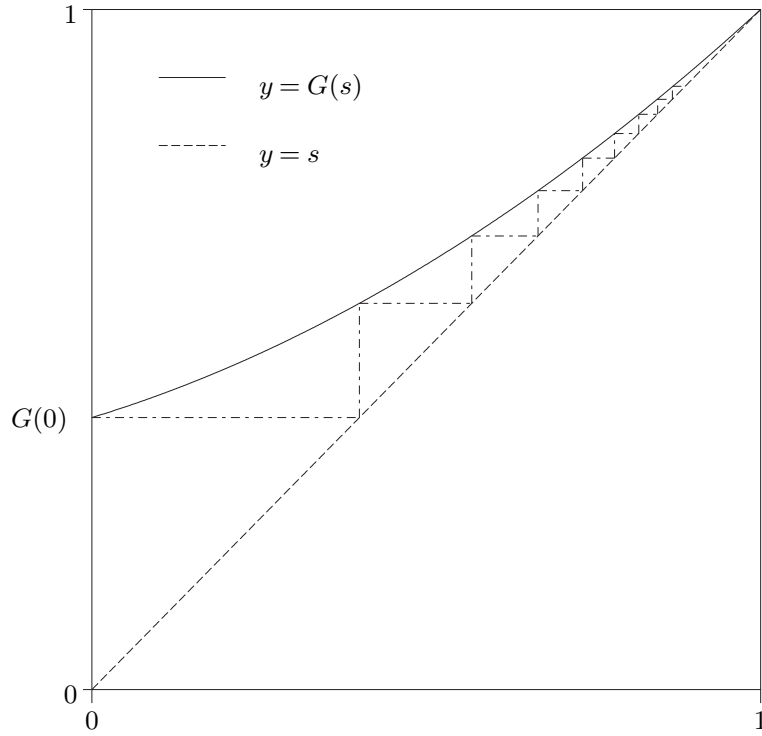


Fig. 4.1. Cas sous-critique ou critique $m \leq 1$: illustration de la convergence de la suite $(G_n(0), n \geq 0)$ vers $\eta = 1$

- $p_2 = (1 - w)p^\nu$: probabilité $1 - \nu$ pour que la molécule et sa copie survivent fois la probabilité p^ν pour que chacun des ν nucléotides ait été copié correctement,
- $p_k = 0$ pour $k \geq 3$.

L'espérance correspondante est $m = (1 - w)(1 + p^\nu)$. Pour que la probabilité d'extinction de la population de molécules correctes soit différente de 1, il faut que $m > 1$, ce qui se réécrit $p^\nu > \frac{w}{1-w}$. Si la probabilité w de destruction de la molécule après réplication est supérieure à $1/2$, cette condition n'est jamais vérifiée. Dans le cas $w < 1/2$, seules les molécules dont la taille en nombre de nucléotides est inférieure à $\log(w/(1 - w))/\log(p)$ peuvent survivre avec probabilité strictement positive. Ce résultat permet d'expliquer pourquoi il y a une limite à la complexité des organismes primitifs.

4.1.2 Vitesse d'extinction

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la vitesse à laquelle la suite $(\mathbb{P}(Z_n = 0), n \in \mathbb{N})$ converge vers η .

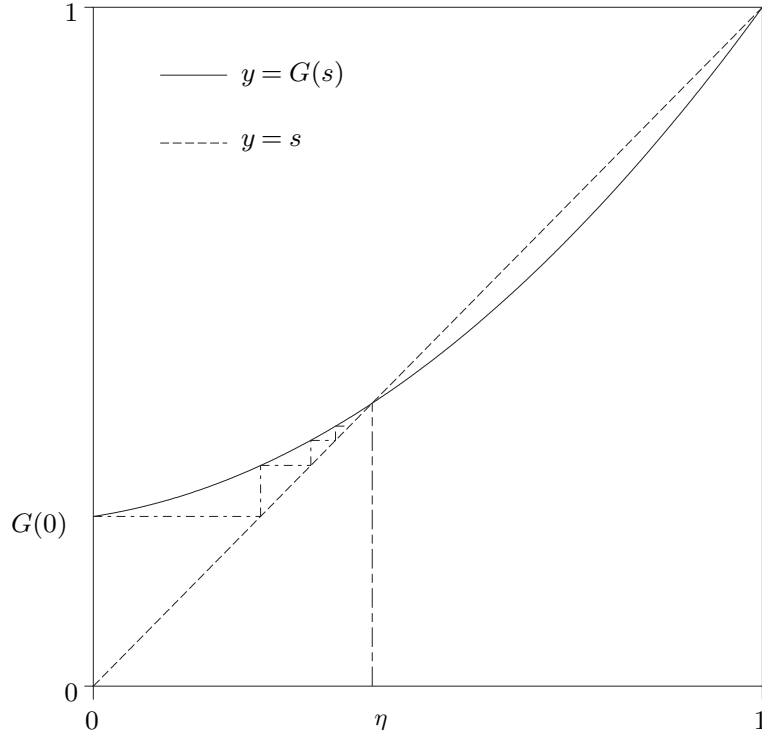


Fig. 4.2. Cas surcritique $m > 1$: illustration de la convergence de la suite $(G_n(0), n \geq 0)$ vers $\eta < 1$

Dans le cas particulier où $p_2 = 1 - p_0$, on a $G(s) = p_0 + (1 - p_0)s^2$ et l'équation du second degré $G(s) = s$ admet $p_0/(1 - p_0)$ et 1 comme racines. La figure 4.3 illustre la convergence de $\mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$ vers $\eta = \min(1, p_0/(1 - p_0))$ lorsque n tend vers l'infini pour différentes valeurs de p_0 . La convergence semble beaucoup moins rapide dans le cas critique que dans les cas sous-critique et surcritique. Le lemme suivant montre que la vitesse de convergence est géométrique lorsque $m \neq 1$. Il faut pour cela exclure le cas $p_0 = 0$ où pour tout n , $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \eta = 0$ et le cas $p_0 = 1$, où pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \eta = 1$.

Lemme 4.1.6. *On suppose que $p_0 \in]0, 1[$ et que $m \neq 1$. Alors $G'(\eta) \in]0, 1[$ et la suite $(G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0)), n \geq 0)$ est décroissante et admet une limite strictement positive.*

Remarque 4.1.7. Nous verrons que dans le cas critique avec $p_1 < 1$, $\mathbb{P}(Z_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)$ est équivalent à $2/n\sigma^2$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (voir l'équation (4.12)). La convergence de $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ vers $\eta = 1$ est effectivement beaucoup moins rapide que dans les cas sous-critique et surcritique. \diamond

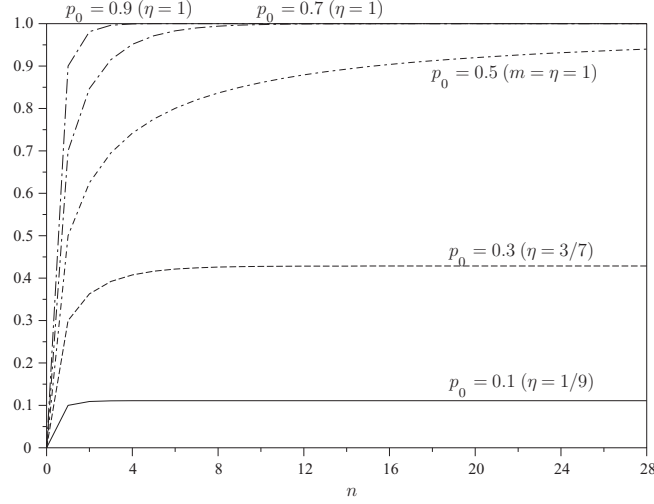


Fig. 4.3. Pour $p_2 = 1 - p_0$, convergence de $(\mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0), n \geq 0)$ vers $\eta = \min(1, p_0/(1 - p_0))$

Démonstration. Comme $p_0 \in]0, 1[$, $\eta > 0$ et pour tout $s \in]0, 1]$, $G'(s) > 0$, propriétés qui assurent d'une part que $G'(\eta) > 0$ et d'autre part que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \eta - G_n(0) = G_n(\eta) - G_n(0) > 0. \quad (4.6)$$

Montrons maintenant que $G'(\eta) < 1$. Dans le cas sous-critique $\eta = 1$ et $G'(\eta) = m < 1$.

Dans le cas surcritique, pour $s \in]\eta, 1[$, $G(s) < s$, ce qui, avec la convexité de G , assure que $G(\eta) + G'(\eta)(s - \eta) < s$. Cette inégalité se réécrit $(G'(\eta) - 1)(s - \eta) < 0$ et entraîne que $G'(\eta) < 1$ (voir Fig. 4.2).

Par convexité de G , $G_{n+1}(0) \geq G(\eta) + G'(\eta)(G_n(0) - \eta)$. En soustrayant $\eta = G(\eta)$ aux deux membres et en multipliant par $-G'(\eta)^{-(n+1)}$, on obtient

$$G'(\eta)^{-(n+1)}(\eta - G_{n+1}(0)) \leq G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0))$$

et la suite $(G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0)), n \geq 0)$ est décroissante. Pour achever la démonstration, il suffit de vérifier que la limite de cette suite est strictement positive.

Soit $c > G''(\eta)/2$. Comme $G_n(0)$ tend vers η , il existe n_0 t.q.

$$\forall n \geq n_0, G_{n+1}(0) \leq G(\eta) + G'(\eta)(G_n(0) - \eta) + c(G_n(0) - \eta)^2.$$

En soustrayant $\eta = G(\eta)$ aux deux membres et en multipliant le résultat par $-G'(\eta)^{-(n+1)}$, on obtient

$$\begin{aligned} G'(\eta)^{-(n+1)}(\eta - G_{n+1}(0)) &\geq G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0)) - cG'(\eta)^{n-1}[G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0))]^2 \\ &\geq (1 - cG'(\eta)^{n-1})[G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0))], \end{aligned}$$

en utilisant $G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0)) \leq \eta \leq 1$. Ainsi, quitte à augmenter n_0 pour que $cG'(\eta)^{n_0-1} \leq 1/2$,

$$\forall n \geq n_0, G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0)) \geq G'(\eta)^{-n_0}(\eta - G_{n_0}(0)) \prod_{l=n_0}^{n-1} (1 - cG'(\eta)^{l-1}).$$

Puisque pour $x \in [0, 1/2]$, $\log(1 - x) \geq -2x$, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(\prod_{l=n_0}^{n-1} (1 - cG'(\eta)^{l-1}) \right) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} -2c \sum_{l=n_0}^{n-1} G'(\eta)^{l-1} > -\infty.$$

Comme d'après (4.6) $\eta - G_{n_0}(0) > 0$, on conclut que la limite de la suite décroissante $(G'(\eta)^{-n}(\eta - G_n(0)), n \geq 0)$ est strictement positive. \square

4.2 Lois limites

En génétique, on appelle amplification d'un gène, l'augmentation du nombre de copies de ce gène par cellule. L'amplification du gène qui code l'enzyme dihydrofolate reductase est liée à la résistance au médicament de lutte contre le cancer appelé méthotrexate. On peut obtenir une population de cellules résistantes et qui comportent plus de copies du gène en question en cultivant une population initialement composée de cellules normales dans un milieu comportant une concentration croissante de méthotrexate. Les copies supplémentaires du gène apparaissent sur des éléments d'ADN extra-chromosomiques appelés doubles minutes et qui ressemblent à des petits chromosomes. Lorsque la population de cellules résistantes est ensuite cultivée dans un milieu sans méthotrexate, on constate la disparition progressive des doubles minutes. Mais la loi du nombre de doubles minutes parmi les cellules qui en comportent reste stable dans le temps au fur et à mesure des divisions cellulaires.

Lors des divisions cellulaires, le mécanisme de transmission des doubles minutes d'une cellule à ses deux cellules filles peut se modéliser de la manière suivante. Avant la division de la cellule mère, chaque double minute est répliquée avec probabilité a ou bien non répliquée avec probabilité $1 - a$. En l'absence de réplication, lorsque la cellule se divise en deux cellules filles, la double minute est transférée de façon équiprobable à l'une ou l'autre des cellules filles. En cas de réplication, les deux copies sont réparties entre les deux cellules filles avec probabilité α ou se retrouvent toutes les deux dans la première ou la seconde cellule fille avec probabilité complémentaire $(1 - \alpha)$ (contrairement aux chromosomes dont les copies sont systématiquement réparties entre les deux cellules-filles, ce qui correspond à $\alpha = 1$, les doubles minutes sont acentriques). Pour chaque double minute présente à la naissance de la cellule mère, on retrouve, dans une des deux cellules filles choisie au hasard,

deux doubles minutes avec probabilité $a(1 - \alpha)/2$, une double minute avec probabilité $a\alpha + (1 - a)/2$ et zéro avec probabilité $(1 - a\alpha)/2$. Dans la phase de culture sans méthotrexate, on choisit une des cellules présentes initialement et par récurrence, à la génération $n \geq 1$, on choisit au hasard une des deux cellules filles de la cellule choisie à la génération $n - 1$. On note Z_n le nombre de doubles minutes dans la cellule choisie à la génération n . Alors Z_n est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction : $p_0 = (1 - a\alpha)/2$, $p_1 = a\alpha + (1 - a)/2$, $p_2 = a(1 - \alpha)/2$ et $p_k = 0$ pour $k \geq 3$. À partir de données expérimentales, il a été possible d'obtenir les estimations suivantes : $p_0 = 0.50$ et $p_2 = 0.47$. La loi de reproduction est donc sous-critique.

Cet exemple est tiré du livre de Kimmel et Axelrod [6]. La question de savoir pourquoi la loi du nombre de doubles minutes parmi les cellules qui en comporte est stable est une motivation pour étudier le comportement de la loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$ lorsque n tend vers l'infini. Dans les cas surcritique et critique, nous allons voir que conditionnellement à $Z_n > 0$, « la population Z_n tend vers l'infini » avec n et il faut utiliser un facteur de renormalisation pour obtenir une limite non triviale. Dans le cas sous-critique, il n'y a pas besoin de renormaliser.

4.2.1 Le cas surcritique

On se place dans le cas surcritique $m > 1$. Comme $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$ explose lorsque n tend vers l'infini, il est naturel de renormaliser par le facteur m^n pour obtenir un résultat de convergence. C'est pourquoi on pose

$$W_n = \frac{Z_n}{m^n}.$$

La convergence étroite de la loi conditionnelle de W_n sachant $Z_n > 0$ découle facilement du résultat de convergence presque sûre suivant :

Proposition 4.2.1. *On suppose $m > 1$. Alors lorsque n tend vers l'infini, la suite $(W_n, n \geq 0)$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire positive W telle que $\mathbb{P}(W = 0) = \eta$. Sa transformée de Laplace $\alpha \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \varphi(\alpha) = \mathbb{E}[e^{-\alpha W}]$ est solution de l'équation fonctionnelle*

$$\forall \alpha \geq 0, \varphi(\alpha) = G(\varphi(\alpha/m)).$$

La figure 4.4 illustre cette convergence presque sûre en représentant 15 trajectoires indépendantes du processus de Galton-Watson renormalisé $(W_n, 0 \leq n \leq 50)$ dans le cas de la loi de reproduction $p_0 = 1 - p_2 = 0, 4$.

Remarque 4.2.2. Pour ω dans l'ensemble d'extinction \mathcal{E} , la population $Z_n(\omega)$ est nulle à partir d'un certain rang $T(\omega)$, ce qui entraîne a fortiori que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n(\omega) = W(\omega) = 0$. Donc

$$\{W = 0\} = \mathcal{E} \cup \{\mathcal{E}^c \cap \{W = 0\}\}.$$

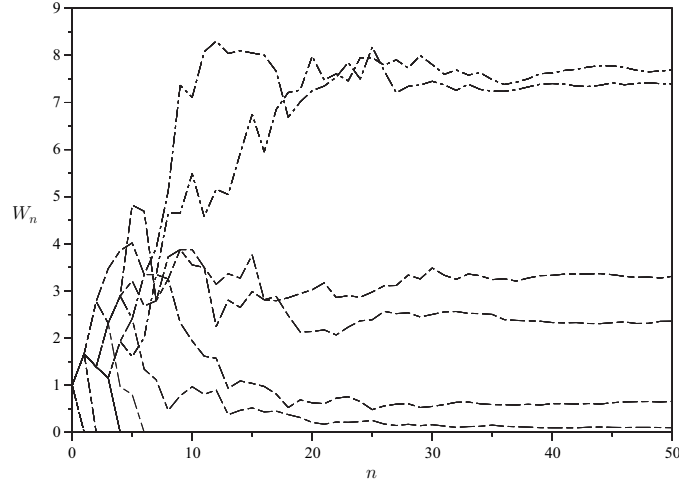


Fig. 4.4. 15 trajectoires de $n \rightarrow W_n = Z_n/m^n$ dans le cas surcritique $p_0 = 1 - p_2 = 0.4$ ($\eta = p_0/(1 - p_0) = 2/3$)

Comme $\mathbb{P}(W = 0) = \eta = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, on en déduit que $\mathbb{P}(\mathcal{E}^c, W = 0) = 0$. Ainsi pour presque tout ω dans \mathcal{E}^c , $W(\omega) > 0$ et $Z_n(\omega)$ est équivalent à $m^n W(\omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On conclut donc que soit il y a extinction, soit la population explose en m^n . \diamond

Corollaire 4.2.3. *Dans le cas surcritique la loi conditionnelle de $W_n = m^{-n}Z_n$ sachant $Z_n > 0$ converge étroitement vers la loi conditionnelle de W sachant $W > 0$ lorsque n tend vers l'infini.*

Nous allons démontrer le corollaire avant de vérifier la proposition.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

$$\mathbb{E}[f(W_n)|Z_n > 0] = \frac{\mathbb{E}[f(W_n)\mathbf{1}_{\{Z_n > 0\}}]}{1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $f(W_n)\mathbf{1}_{\{Z_n > 0\}}$ converge presque sûrement vers $f(W)\mathbf{1}_{\mathcal{E}^c}$, variable aléatoire qui est presque sûrement égale à $f(W)\mathbf{1}_{\{W > 0\}}$ d'après la remarque précédente. D'après le théorème de convergence dominée, le numérateur converge vers $\mathbb{E}[f(W)\mathbf{1}_{\{W > 0\}}]$. Comme le dénominateur converge vers $1 - \eta = \mathbb{P}(W > 0)$, on en déduit que le rapport converge vers $\mathbb{E}[f(W)|W > 0]$. La définition A.3.4 est donc satisfaite. \square

Exercice 4.2.4. Dans le cas particulier (4.3) avec $\beta/p = m > 1$ où on a $\eta = s_0 = (1 - \beta)/(1 - p)$, calculer $G_n(e^{-\alpha/m^n})$ pour $\alpha \geq 0$ et en déduire que

$$\varphi(\alpha) = \eta + (1 - \eta) \frac{1 - \eta}{\alpha + (1 - \eta)}.$$

Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $W > 0$? \blacklozenge

Démonstration de la proposition 4.2.1. Soit $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W_{n+1} - W_n)^2] &= m^{-2(n+1)} \mathbb{E} \left[\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{Z_n = k\}} \left(\sum_{i=1}^k \xi_i^n - km \right)^2 \right] \\ &= m^{-2(n+1)} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_n = k) \sigma^2 k = \sigma^2 m^{-2(n+1)} \mathbb{E}[Z_n] = \sigma^2 m^{-(n+2)}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}|W_{n+1} - W_n| \leq \mathbb{E}[|W_{n+1} - W_n|^2]^{1/2} = \sigma m^{-(n+2)/2}$. Donc

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 0} |W_{n+1} - W_n| \right] \leq \sigma \sum_{n \geq 0} m^{-(n+2)/2} < +\infty.$$

Ainsi presque sûrement, la variable aléatoire $\sum_{n \geq 0} |W_{n+1} - W_n|$ est finie, ce qui implique la convergence de $W_k = W_0 + \sum_{n=0}^{k-1} (W_{n+1} - W_n)$ vers $W = W_0 + \sum_{n \geq 0} (W_{n+1} - W_n)$ lorsque k tend vers l'infini. En outre, $\mathbb{E}|W| \leq \mathbb{E}|W_0| + \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}|W_{n+1} - W_n| < +\infty$.

Par convergence dominée, pour tout $\alpha \geq 0$, $\mathbb{E}[e^{-\alpha W_n}]$ converge vers $\varphi(\alpha) = \mathbb{E}[e^{-\alpha W}]$. Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-\alpha W_{n+1}}] &= \mathbb{E}[e^{-\alpha m^{-(n+1)} Z_{n+1}}] = G_{n+1}(e^{-\alpha m^{-(n+1)}}) \\ &= G(G_n(e^{-(\alpha/m)m^{-n}})) = G(\mathbb{E}[e^{-(\alpha/m)m^{-n} Z_n}]) \\ &= G(\mathbb{E}[e^{-(\alpha/m)W_n}]).\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans les deux termes extrêmes de cette égalité, on obtient avec la continuité de G que

$$\forall \alpha \geq 0, \varphi(\alpha) = G(\varphi(\alpha/m)).$$

Comme $e^{-\alpha W}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{1}_{\{W=0\}}$ lorsque α tend vers $+\infty$, on obtient par le théorème de convergence dominée que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) = \mathbb{P}(W = 0)$. Donc l'équation fonctionnelle que nous avons établie pour φ entraîne que $\mathbb{P}(W = 0)$ est racine de l'équation $G(s) = s$. Comme, dans le cas surcritique, $p_0 + p_1 < 1$, la fonction G est strictement convexe sur $[0, 1]$ et l'équation $G(s) = s$ a exactement deux racines sur cet intervalle qui sont 1 et $\eta \in [0, 1[$. Il suffit maintenant d'exclure que $\mathbb{P}(W = 0)$ puisse valoir 1. Pour cela nous allons calculer $\mathbb{E}[W]$. La renormalisation de la population a été choisie pour que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[W_n] = 1$. On s'attend donc à ce que $\mathbb{E}[W] = 1$, ce qui se vérifie en passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité

$$|\mathbb{E}[W] - \mathbb{E}[W_n]| \leq \mathbb{E}|W - W_n| \leq \sum_{l \geq n} \mathbb{E}|W_{l+1} - W_l| \leq \sigma \sum_{l \geq n} m^{-(l+2)/2}.$$

□

4.2.2 Le cas sous-critique

L'exemple introductif de l'évolution du nombre de doubles minutes par cellule lorsque la population de cellules est cultivée dans un milieu sans méthotrexate suggère que la loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$ converge lorsque n tend vers l'infini.

Dans le cas particulier de la loi de reproduction (4.3) avec $\beta < p$, d'après (4.5), la population Z_n à la n -ième génération est égale avec probabilité $m^n(1-s_0)/(m^n-s_0)$ (où $m = \beta/p$ et $s_0 = (1-\beta)/(1-p)$) à une variable géométrique de paramètre $(1-s_0)/(m^n-s_0)$ et avec probabilité complémentaire à 0. La loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$ est donc la loi géométrique de paramètre $(1-s_0)/(m^n-s_0)$. Lorsque n tend vers l'infini, le paramètre converge vers $1-1/s_0 = (p-\beta)/(1-\beta)$. Ainsi la loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$ converge étroitement vers la loi géométrique de paramètre $(p-\beta)/(1-\beta)$. La figure 4.5 illustre cette convergence.

Dans le cas d'une loi de reproduction sous-critique quelconque, on note π^n la loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$: pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\pi_k^n = \mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0)$. Pour étudier le comportement de la suite $(\pi^n, n \geq 0)$ lorsque n tend vers l'infini, l'outil naturel demeure la fonction génératrice :

$$\begin{aligned} G_n^\pi(s) &= \mathbb{E}[s^{Z_n} | Z_n > 0] = \frac{\mathbb{E}[s^{Z_n} \mathbf{1}_{\{Z_n > 0\}}]}{\mathbb{P}(Z_n > 0)} = \frac{\mathbb{E}[s^{Z_n}] - \mathbb{P}(Z_n = 0)}{1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)} \\ &= \frac{G_n(s) - G_n(0)}{1 - G_n(0)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

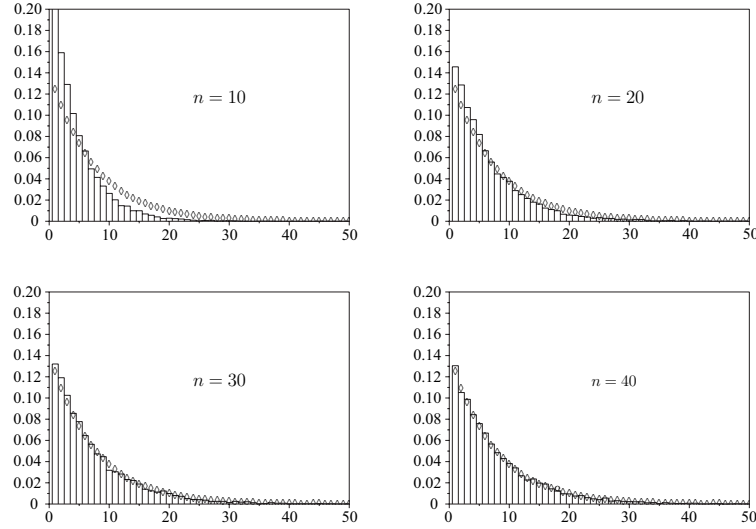


Fig. 4.5. Pour la loi de reproduction sous-critique (4.3) avec $\beta = 0.6$ et $p = 0.65$, histogrammes de 10 000 tirages de Z_n sachant $Z_n > 0$ et comparaison avec la loi géométrique de paramètre $(p-\beta)/(1-\beta) = 0.125$ (losanges)

En étudiant le comportement asymptotique de G_n^π , nous allons montrer le résultat suivant qui porte le nom de théorème de Yaglom dans la littérature :

Proposition 4.2.5. *Dans le cas sous-critique avec $p_0 < 1$, les probabilités $(\pi^n, n \geq 0)$ convergent lorsque $n \rightarrow +\infty$ vers une probabilité π pour la norme en variation. La fonction génératrice G^π de cette probabilité est solution de l'équation fonctionnelle*

$$G^\pi(G(s)) = 1 + m(G^\pi(s) - 1). \quad (4.8)$$

Dans l'exemple introductif, l'évolution du nombre Z_n de doubles minutes dans la cellule choisie à la génération n se modélise à l'aide d'un processus de Galton-Watson de loi de reproduction : $p_0 = 0.50$, $p_1 = 0.03$, $p_2 = 0.47$ et $p_k = 0$ pour $k \geq 3$. Comme cette loi est sous-critique, la proposition s'applique et permet de comprendre pourquoi la loi du nombre de doubles minutes parmi les cellules qui en comportent reste stable au fur et à mesure des divisions cellulaires lors de la phase de culture sans méthotrexate.

La démonstration de la proposition repose sur le lemme suivant et se trouve reportée après la démonstration de ce lemme :

Lemme 4.2.6. *Pour tout $s \in [0, 1]$, $G_n^\pi(s)$ converge vers un réel $G^\pi(s)$ et G^π est solution de l'équation fonctionnelle (4.8).*

Démonstration. La suite $G_n^\pi(1)$ constante égale à 1 converge vers $G^\pi(1) = 1$. Soit $s \in [0, 1[$. On a

$$G_n^\pi(s) = 1 - H_n(s) \quad \text{pour} \quad H_n(s) = \frac{1 - G_n(s)}{1 - G_n(0)}. \quad (4.9)$$

La fonction $h(s) = (1 - G(s))/(1 - s)$ a pour dérivée

$$h'(s) = \frac{-G'(s)(1 - s) + G(1) - G(s)}{(1 - s)^2}.$$

Comme par convexité de G le numérateur est positif, la fonction h est croissante sur $[0, 1]$. Par croissance de G , $G_n(s) \geq G_n(0)$ et donc $h(G_n(s)) \geq h(G_n(0))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{H_{n+1}(s)}{H_n(s)} &= \frac{1 - G_{n+1}(s)}{1 - G_{n+1}(0)} \times \frac{1 - G_n(0)}{1 - G_n(s)} = \frac{1 - G_{n+1}(s)}{1 - G_n(s)} \times \frac{1 - G_n(0)}{1 - G_{n+1}(0)} \\ &= \frac{h(G_n(s))}{h(G_n(0))} \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $H_n(s)$ est croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge vers une limite $H(s)$. Avec (4.9), on en déduit que $G_n^\pi(s)$ converge vers une limite $G^\pi(s)$ t.q. $G^\pi(s) = 1 - H(s)$.

On a

$$H_n(G(s)) = \frac{1 - G_{n+1}(s)}{1 - G_n(0)} = \frac{1 - G_{n+1}(0)}{1 - G_n(0)} \times H_{n+1}(s).$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $G_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ croît vers la probabilité d'extinction $\eta = 1$ et $\frac{1 - G_{n+1}(0)}{1 - G_n(0)} = \frac{G(1) - G(G_n(0))}{1 - G_n(0)}$ converge vers $G'(1) = m$. On en déduit que pour tout s dans $[0, 1[$, $H(G(s)) = mH(s)$ et on conclut grâce à la relation $H(s) = 1 - G^\pi(s)$. \square

Démonstration de la proposition 4.2.5. L'idée consiste à vérifier que la convergence de $G_n^\pi(s)$ vers $G^\pi(s)$ pour tout $s \in [0, 1]$ implique que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, π_k^n converge vers une limite π_k lorsque n tend vers $+\infty$. Lorsque G^π est continue à gauche en 1, $(\pi_k, k \geq 1)$ est une probabilité sur \mathbb{N}^* .

Soit $k, n, l \geq 1$. Par inégalité triangulaire, pour $s \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} |\pi_k^n - \pi_k^l| s^k &\leq |G_n^\pi(s) - G_l^\pi(s)| + \sum_{\kappa=1}^{k-1} |\pi_\kappa^n - \pi_\kappa^l| s^\kappa + \sum_{\kappa \geq k+1} (\pi_\kappa^n + \pi_\kappa^l) s^\kappa \\ &\leq |G_n^\pi(s) - G_l^\pi(s)| + \sum_{\kappa=1}^{k-1} |\pi_\kappa^n - \pi_\kappa^l| s^\kappa + 2 \sum_{\kappa \geq k+1} s^\kappa. \end{aligned}$$

Donc pour $s \in]0, 1[$,

$$|\pi_k^n - \pi_k^l| \leq s^{-k} |G_n^\pi(s) - G_l^\pi(s)| + \sum_{\kappa=1}^{k-1} |\pi_\kappa^n - \pi_\kappa^l| s^{\kappa-k} + 2s/(1-s).$$

On raisonne par récurrence sur k .

Si on suppose que pour $1 \leq \kappa \leq k-1$, $\lim_{n,l \rightarrow +\infty} |\pi_\kappa^n - \pi_\kappa^l| = 0$, propriété qui est vraie pour $k=1$, alors en faisant tendre n, l vers $+\infty$, on obtient

$$\limsup_{n,l \rightarrow +\infty} |\pi_k^n - \pi_k^l| \leq s^{-k} \limsup_{n,l \rightarrow +\infty} |G_n^\pi(s) - G_l^\pi(s)| + 2s/(1-s).$$

Le premier terme du second membre est nul car la suite $(G_n^\pi(s))_n$ est convergente d'après le lemme 4.2.6 et vérifie donc le critère de Cauchy. En faisant tendre s vers 0, on en déduit que $\lim_{n,l \rightarrow +\infty} |\pi_k^n - \pi_k^l| = 0$.

Ainsi, on obtient par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\pi_k^n, n \geq 0)$ à valeurs dans $[0, 1]$ est de Cauchy. Elle converge donc vers $\pi_k \in [0, 1]$. Le lemme de Fatou assure que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k^n = 1$.

Comme $\pi_k^n s^k \leq s^k$ et comme la série de terme général $(s^k)_{k \geq 1}$ est convergente pour $s \in [0, 1[$, le théorème de convergence dominée assure que

$$\forall s \in [0, 1[, \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k s^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k^n s^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n^\pi(s) = G^\pi(s).$$

Cette égalité n'est pas nécessairement vraie pour $s = 1$. En revanche, par convergence monotone, la limite à gauche $G^\pi(1^-)$ est égale à $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k$. En outre lorsque s croît vers 1, $G(s)$ croît vers 1 et

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} G^\pi(G(s)) = G^\pi(1^-) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k.$$

En passant à la limite $s \rightarrow 1^-$ dans (4.8), on obtient $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k = 1 + m(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k - 1)$. Comme $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k \leq 1$, cette égalité se réécrit

$$(m - 1) \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k - 1 \right) = 0 \quad (4.10)$$

ce qui permet de conclure que π est une probabilité sur \mathbb{N}^* . D'après le lemme D.2, la suite des probabilités $(\pi^n, n \geq 0)$ converge en variation vers la probabilité π . \square

L'exercice d'application suivant a pour but de vérifier que si la population initiale Z_0 est distribuée suivant la probabilité limite π , alors la suite des lois conditionnelles $(\pi^n, n \geq 0)$ n'est pas seulement convergente : elle est même constante.

Exercice 4.2.7. On se place dans le cas sous-critique avec $p_0 < 1$. On suppose que la population initiale Z_0 est une variable aléatoire distribuée suivant la probabilité $(\pi_k, k \in \mathbb{N}^*)$ indépendante des variables $(\xi_i^n, n \geq 0, i \geq 1)$ et que sa descendance évolue suivant l'équation (4.2).

- Montrer que $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = G^\pi(p_0)$ puis que

$$\mathbb{E}[s^{Z_1} | Z_1 > 0] = \frac{G^\pi(G(s)) - G^\pi(p_0)}{1 - G^\pi(p_0)}.$$

- En utilisant l'équation (4.8), vérifier que $G^\pi(p_0) = 1 - m$ puis que $\mathbb{E}[s^{Z_1} | Z_1 > 0] = G^\pi(s)$.
- Pour $n \geq 1$, quelle est la loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$? \blacklozenge

Remarque 4.2.8. Dans le cas critique, le lemme 4.2.6 reste valable de même que le début de la démonstration de la proposition 4.2.5 : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0)$ converge vers une limite π_k lorsque n tend vers l'infini. L'équation (4.10) reste vraie mais comme $m = 1$, elle ne permet plus d'obtenir la valeur de $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k$. L'équation fonctionnelle (4.8) se réécrit $G^\pi(G(s)) = G^\pi(s)$. Pour $s = 0$, on obtient

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k p_0^k = G^\pi(p_0) = G^\pi(0) = 0.$$

Lorsque $p_1 < 1$, nécessairement $p_0 > 0$, et on conclut que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\pi_k = 0$. Ainsi lorsque $p_1 < 1$, pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0) = 0$. Lorsque $p_1 = 1$, la population reste égale à 1 au fil des générations et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\pi_k = \mathbf{1}_{\{k=1\}}$. \diamond

Remarque 4.2.9. Dans le cas surcritique avec $p_0 > 0$, la probabilité η de l'ensemble d'extinction \mathcal{E} est strictement positive. On peut étudier le comportement asymptotique de la loi $(\pi_k^n = \mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0, \mathcal{E}), k \in \mathbb{N}^*)$ de Z_n sachant qu'il y a extinction après la n -ième génération. La fonction génératrice de cette loi est

$$G_n^\pi(s) = \frac{\mathbb{E}[s^{Z_n} \mathbf{1}_{\{Z_n > 0, \mathcal{E}\}}]}{\mathbb{P}(Z_n > 0, \mathcal{E})} = \frac{\sum_{k \geq 1} s^k \mathbb{P}(Z_n = k, \mathcal{E})}{\mathbb{P}(\mathcal{E}) - \mathbb{P}(Z_n = 0)}.$$

Pour $k \geq 1$, l'événement $\{Z_n = k, \mathcal{E}\}$ est l'intersection de l'événement $\{Z_n = k\}$ qui ne dépend que des variables $(\xi_i^l, l \leq n-1, i \geq 1)$ et de l'événement extinction des descendances indépendantes des k individus présents à la n -ième génération qui s'exprime en fonction des $(\xi_i^l, l \geq n, i \geq 1)$ et a pour probabilité η^k . Donc $\mathbb{P}(Z_n = k, \mathcal{E}) = \eta^k \mathbb{P}(Z_n = k)$ et on a

$$G_n^\pi(s) = \frac{G_n(\eta s) - G_n(0)}{\eta - G_n(0)}. \quad (4.11)$$

En remplaçant H_n et h par $(\eta - G_n(\eta s))/(\eta - G_n(0))$ et $(\eta - G(s))/(\eta - s)$ pour adapter la démonstration du lemme 4.2.6, on obtient que pour $s \in [0, 1]$, $G_n^\pi(s)$ converge vers un réel $G^\pi(s)$ et que la fonction G^π est solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall s \in [0, 1], \quad G^\pi(\eta^{-1}G(\eta s)) = 1 + G'(\eta)(G^\pi(s) - 1).$$

Le début de la démonstration de la proposition 4.2.5 établit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0, \mathcal{E})$ converge vers une limite π_k lorsque n tend vers l'infini. En passant à la limite $s \rightarrow 1^-$ dans l'équation satisfaite par G^π , il vient $(G'(\eta) - 1)(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \pi_k - 1) = 0$. Comme d'après le lemme 4.1.6, $G'(\eta) < 1$, on conclut que π est une probabilité sur \mathbb{N}^* . Dans le cas particulier de la loi de reproduction (4.3) avec $\beta > p$, on peut vérifier que π est la loi géométrique de paramètre $(\beta - p)/(1 - p)$. \diamond

4.2.3 Le cas critique

Nous nous plaçons dans le cas critique $m = 1$ et nous supposons que $p_1 < 1$, ce qui est équivalent à $\sigma^2 > 0$ et aussi à $p_0 > 0$. D'après la proposition 4.1.5, la probabilité d'extinction vaut 1. Et d'après la remarque 4.2.8, pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0)$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ce dernier résultat indique que « conditionnellement à $Z_n > 0$, Z_n tend vers $+\infty$ ».

Nous allons nous intéresser à la vitesse de convergence de $\mathbb{P}(Z_n > 0)$ vers 0 pour en déduire comment renormaliser la loi conditionnelle de Z_n sachant $Z_n > 0$ afin d'obtenir une limite non triviale lorsque n tend vers l'infini.

Dans le cas particulier (4.3) avec $\beta = p$, on a $\sigma^2 = 2(1 - p)/p$ et d'après (4.4),

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = 1 - G_n(0) = \frac{p}{1 + (n-1)(1-p)} \sim \frac{p}{n(1-p)} = \frac{2}{n\sigma^2}.$$

Nous allons vérifier (voir le lemme 4.2.11 ci-dessous pour $s = 0$), que le résultat reste vrai pour une loi de reproduction critique quelconque de variance $\sigma^2 > 0$:

$$\text{pour } n \rightarrow +\infty, \mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \frac{2}{n\sigma^2}. \quad (4.12)$$

Comme $\mathbb{E}[Z_n] = 1$, on a

$$\mathbb{E}[Z_n | Z_n > 0] = \frac{\mathbb{E}[Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n > 0\}}]}{\mathbb{P}(Z_n > 0)} = \frac{\mathbb{E}[Z_n]}{\mathbb{P}(Z_n > 0)} = \frac{1}{\mathbb{P}(Z_n > 0)}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\frac{2Z_n}{n\sigma^2} \middle| Z_n > 0 \right] = 1.$$

C'est pourquoi $2/n\sigma^2$ apparaît comme un bon candidat en tant que facteur multiplicatif de renormalisation et le résultat suivant n'est pas étonnant.

Proposition 4.2.10. *Dans le cas critique avec $p_1 < 1$, la loi conditionnelle de $2Z_n/n\sigma^2$ sachant $Z_n > 0$ converge étroitement vers la loi exponentielle de paramètre 1 lorsque n tend vers l'infini.*

La figure 4.6 illustre cette convergence dans le cas de la loi de reproduction $p_0 = p_2 = 0,5$ pour laquelle $\sigma^2 = 1$.

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant qui implique (4.12) pour le choix $s = 0$.

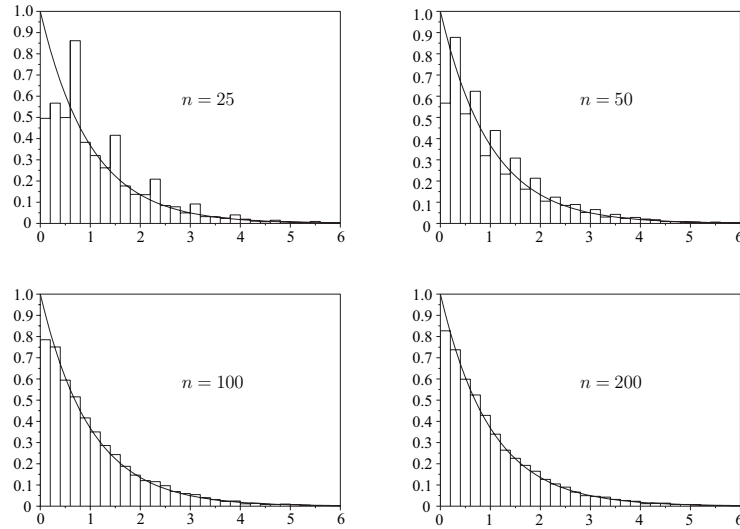


Fig. 4.6. Dans le cas critique $p_0 = p_2 = 0.5$, histogrammes de 10 000 tirages de $2Z_n/n$ sachant $Z_n > 0$ et comparaison avec la densité exponentielle de paramètre 1

Lemme 4.2.11. *Dans le cas critique, la suite $\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-G_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right), n \geq 1\right)$ converge uniformément vers $\frac{\sigma^2}{2}$ pour $s \in [0, 1[$.*

Commençons par prouver la proposition. Ensuite nous démontrerons le lemme.

Démonstration de la proposition 4.2.10. On utilise la caractérisation de la convergence en loi des variables aléatoires positives par la convergence des transformées de Laplace (cf. théorème A.3.9). Soit $\alpha > 0$. En raisonnant comme dans (4.7) avec $s = e^{-2\alpha/\sigma^2 n}$, on obtient

$$\mathbb{E} \left[e^{-\frac{2\alpha Z_n}{\sigma^2 n}} | Z_n > 0 \right] = \frac{G_n \left(e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2 n}} \right) - G_n(0)}{1 - G_n(0)} = 1 - \frac{1 - G_n \left(e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2 n}} \right)}{1 - G_n(0)}.$$

D'après le lemme 4.2.11, lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(1 - G_n(0))} &\rightarrow \frac{\sigma^2}{2} \\ \frac{1}{n \left(1 - G_n \left(e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2 n}} \right) \right)} &\sim \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n \left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2 n}} \right)} \rightarrow \frac{\sigma^2}{2} (1 + 1/\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2\alpha Z_n}{\sigma^2 n}} | Z_n > 0 \right] \rightarrow 1 - \frac{1}{1 + 1/\alpha} = \frac{1}{1 + \alpha}.$$

On conclut en reconnaissant au second membre la transformée de Laplace de la loi exponentielle de paramètre 1. \square

Démonstration du lemme 4.2.11. Comme $G'(1) = m = 1$ et $G''(1) = \sigma^2 - m + m^2 = \sigma^2$, la formule de Taylor avec reste intégral assure que pour s dans $[0, 1]$, $G(s) = 1 + (s-1) + (s-1)^2 \varphi_0(s)$ avec φ_0 bornée sur $[0, 1]$ et telle que $\lim_{s \rightarrow 1^-} \varphi_0(s) = \sigma^2/2$. Donc $1 - G(s) = 1 - s - (1-s)^2 \varphi_0(s)$ et pour s dans $[0, 1[$,

$$\frac{1}{1 - G(s)} = \frac{1}{1 - s} \times \frac{1}{1 - (1-s)\varphi_0(s)}.$$

La fonction $s \in [0, 1] \rightarrow (1-s)\varphi_0(s) = (G(s)-s)/(1-s) = 1 - (1-G(s))/(1-s)$ est décroissante d'après le début de la démonstration du lemme 4.2.6. Comme elle vaut p_0 pour $s = 0$ et elle s'annule pour $s = 1$, elle prend ses valeurs dans $[0, p_0]$. En utilisant le fait que pour x dans $[0, p_0]$, $1/(1-x) = 1+x+x\varphi_1(x)$ où la fonction φ_1 est bornée sur $[0, p_0]$ et vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_1(x) = 0$, on en déduit que pour s dans $[0, 1[$,

$$\frac{1}{1 - G(s)} = \frac{1}{1 - s} + \frac{\sigma^2}{2} + \psi(s) \quad \text{où} \quad \psi(s) = \varphi_0(s) - \frac{\sigma^2}{2} + \varphi_0(s)\varphi_1((1-s)\varphi_0(s))$$

est une fonction bornée sur $[0, 1[$ qui vérifie $\lim_{s \rightarrow 1^-} \psi(s) = 0$.

Comme G est strictement croissante, pour tout k dans \mathbb{N} et tout s dans $[0, 1[$, $G_k(s)$ est dans $[0, 1[$ et en posant par convention $G_0(s) = s$, on obtient que

$$\frac{1}{1 - G_{k+1}(s)} - \frac{1}{1 - G_k(s)} - \frac{\sigma^2}{2} = \psi(G_k(s)).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant cette égalité pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et en divisant le résultat par n , il vient

$$\forall s \in [0, 1[, \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - G_n(s)} - \frac{1}{1 - s} \right) - \frac{\sigma^2}{2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(G_k(s)).$$

D'après les propriétés de ψ , la fonction $\hat{\psi}$ définie pour x dans $[0, 1[$ par $\hat{\psi}(x) = \sup_{y \in [x, 1[} |\psi(y)|$ est bornée, décroissante et vérifie $\lim_{x \rightarrow 1^-} \hat{\psi}(x) = 0$. Comme par croissance de G , pour tout k dans \mathbb{N} et tout s dans $[0, 1[$, $G_k(s) \geq G_k(0)$, on a

$$\sup_{s \in [0, 1[} \left| \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - G_n(s)} - \frac{1}{1 - s} \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\psi}(G_k(0)).$$

La suite $(G_k(0), k \in \mathbb{N})$ converge vers 1 lorsque k tend vers l'infini. Donc la suite $(\hat{\psi}(G_k(0)), k \in \mathbb{N})$ converge vers 0 et la suite des moyennes de Césaro $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\psi}(G_k(0)), n \in \mathbb{N}^*)$ converge également vers 0 lorsque n tend vers l'infini. \square

4.3 Réduction de variance dans les cas sous-critique ou critique

Dans le cas critique (en excluant $p_1 = 1$) et surtout dans le cas sous-critique, la probabilité pour que la population Z_n de la n -ième génération soit nulle converge très rapidement vers 1 lorsque n augmente. Lorsque l'on évalue par la méthode de Monte-Carlo l'espérance d'une fonction de Z_n , la majeure partie des trajectoires simulées conduisent à l'extinction avant l'instant n , ce qui pose des problèmes de précision. Pour remédier à cette difficulté, on peut utiliser une technique de fonction d'importance qui permet de se ramener à la simulation d'un processus de Galton-Watson surcritique. Le principe est le suivant.

On suppose $p_0 + p_1 < 1$. Dans ce cas, $\mathbb{E}[\xi_i^n] > \mathbb{P}[\xi_i^n \geq 1] = 1 - p_0$. Donc $1/\mathbb{E}[\xi_i^n] < 1/(1 - p_0)$ et on peut choisir $\alpha \in]1/\mathbb{E}[\xi_i^n], 1/(1 - p_0)[$. Alors

$$\tilde{p}_k = \begin{cases} \alpha p_k & \text{si } k \geq 1 \\ 1 - \alpha(1 - p_0) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

est une probabilité sur \mathbb{N} . Soit $(\xi_i^n, n \geq 0, i \geq 1)$ des variables i.i.d. suivant cette probabilité et $(\tilde{Z}_n)_n$ le processus de Galton-Watson associé. Comme $\mathbb{E}[\xi_i^n] = \alpha \mathbb{E}[\xi_i^n] > 1$, ce processus est surcritique.

Le résultat suivant permet de se ramener à simuler le processus surcritique $(\tilde{Z}_n)_n$ lorsque l'on veut calculer une espérance relative au processus initial. Bien sûr, la proportion de trajectoires qui s'éteignent avant l'instant n est bien plus faible pour le processus surcritique que pour le processus initial. On compense cela par l'introduction, dans l'espérance relative au processus $(\tilde{Z}_n)_n$, d'un facteur multiplicatif aléatoire qui est appelé facteur d'importance.

Proposition 4.3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $\Phi : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positive ou bornée, l'espérance $\mathbb{E}[\Phi(Z_1, \dots, Z_n)]$ est égale à*

$$\mathbb{E} \left[\Phi(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n) \alpha^{-\tilde{N}_n} \left(\frac{p_0}{1 - \alpha(1 - p_0)} \right)^{1 + \tilde{Z}_1 + \dots + \tilde{Z}_{n-1} - \tilde{N}_n} \right] \quad (4.13)$$

où $\tilde{N}_n = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\tilde{Z}_l} \mathbf{1}_{\{\tilde{\xi}_i^l > 0\}}$ est le nombre d'individus des générations $0, 1, \dots, n-1$ ayant eu au moins un descendant tandis que $1 + \tilde{Z}_1 + \dots + \tilde{Z}_{n-1} - \tilde{N}_n$ représente le nombre d'individus sans descendants.

Remarque 4.3.2. D'un point de vue numérique, il faut prendre garde à la possible explosion des facteurs $\alpha^{\tilde{N}_n}$ et $\left(\frac{p_0}{1 - \alpha(1 - p_0)} \right)^{1 + \tilde{Z}_1 + \dots + \tilde{Z}_{n-1} - \tilde{N}_n}$. Dans le calcul du poids multiplicatif qui apparaît dans l'espérance (4.13), pour profiter des compensations entre ces facteurs, il est préférable d'évaluer leur rapport sous la forme

$$\exp \left[-\tilde{N}_n \log(\alpha) + (1 + \tilde{Z}_1 + \dots + \tilde{Z}_{n-1} - \tilde{N}_n) \log \left(\frac{p_0}{1 - \alpha(1 - p_0)} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Et surtout, il faut éviter de se ramener à un processus de Galton-Watson très surcritique. \diamond

Exemple 4.3.3. Nous nous plaçons dans le cas de la loi de reproduction sous-critique $p_0 = 1 - p_2 = 0.65$. Pour évaluer $\mathbb{E}[Z_{20}] = 0.7^{20} \simeq 7.98 \times 10^{-4}$ par la méthode de Monte-Carlo, nous comparons

- l'approche directe qui consiste à générer 100 000 réalisations du processus de Galton-Watson de loi de reproduction $p_0 = 1 - p_2 = 0.65$ jusqu'à la vingtième génération et à calculer la moyenne empirique des populations obtenues à la vingtième génération.
- la technique de fonction d'importance décrite plus haut avec $\alpha = 11/7$: nous simulons 100 000 réalisations du processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\tilde{p}_0 = 1 - \tilde{p}_2 = 0.45$ jusqu'à la vingtième génération et nous calculons la moyenne empirique des populations à la vingtième génération multipliées par les poids (4.14) correspondants.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Méthode	moyenne empirique	variance empirique	intervalle de confiance à 95 %	temps CPU (s)
directe	1.12×10^{-3}	5.04×10^{-3}	$[6.8 \times 10^{-4}; 1.56 \times 10^{-3}]$	19
fonction d'importance	7.93×10^{-4}	4.66×10^{-5}	$[7.51 \times 10^{-4}; 8.36 \times 10^{-4}]$	76

Avec la technique de fonction d'importance, nous obtenons donc une réduction de variance d'un facteur cent en multipliant le temps de calcul par quatre. Pour parvenir à la même précision par l'approche directe, il faudrait multiplier le nombre de trajectoires et donc le temps de calcul par cent. \diamond

Démonstration. Il suffit de vérifier l'égalité pour $\Phi(z_1, \dots, z_n) = \mathbf{1}_{k_1}(z_1) \times \dots \times \mathbf{1}_{k_n}(z_n)$ où $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Par indépendance des variables $(\xi_i^l, l \geq 0, i \geq 1)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Phi(Z_1, \dots, Z_n)] &= \mathbb{P}(Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_1^0 = k_1, \xi_1^1 + \dots + \xi_{k_1}^1 = k_2, \dots, \xi_1^{n-1} + \dots + \xi_{k_{n-1}}^{n-1} = k_n\right) \\
&= \sum_{x_1^1 + \dots + x_{k_1}^1 = k_2} \dots \sum_{x_1^{n-1} + \dots + x_{k_{n-1}}^{n-1} = k_n} \mathbb{P}(\forall 0 \leq l \leq n-1, \forall 1 \leq i \leq k_l, \xi_i^l = x_i^l) \\
&= \sum_{x_1^1 + \dots + x_{k_1}^1 = k_2} \dots \sum_{x_1^{n-1} + \dots + x_{k_{n-1}}^{n-1} = k_n} \prod_{l=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k_l} \mathbb{P}(\xi_i^l = x_i^l),
\end{aligned}$$

où les x_i^l sont des entiers naturels. Si pour $x \in \mathbb{N}$, on pose

$$\psi(x) = \frac{p_x}{\tilde{p}_x} = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } x \geq 1 \\ p_0/(1 - \alpha(1 - p_0)) & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

on obtient que l'espérance $\mathbb{E}[\Phi(Z_1, \dots, Z_n)]$ est égale à

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_1^1 + \dots + x_{k_1}^1 = k_2} \dots \sum_{x_1^{n-1} + \dots + x_{k_{n-1}}^{n-1} = k_n} \prod_{l=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k_l} \mathbb{P}(\xi_i^l = x_i^l) \psi(x_i^l) \\
&= \sum_{x_1^1 + \dots + x_{k_1}^1 = k_2} \dots \sum_{x_1^{n-1} + \dots + x_{k_{n-1}}^{n-1} = k_n} \left(\prod_{l=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k_l} \psi(x_i^l) \right) \left(\prod_{l=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k_l} \mathbb{P}(\xi_i^l = x_i^l) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x_1^1 + \dots + x_{k_1}^1 = k_2} \dots \sum_{x_1^{n-1} + \dots + x_{k_{n-1}}^{n-1} = k_n} \alpha^{-\nu_n} \left(\frac{p_0}{1 - \alpha(1 - p_0)} \right)^{1 + k_1 + \dots + k_{n-1} - \nu_n} \\
&\quad \times \prod_{l=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k_l} \mathbb{P}(\tilde{\xi}_i^l = x_i^l),
\end{aligned}$$

où $\nu_n = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{k_l} \mathbf{1}_{\{x_i^l > 0\}}$. Par indépendance des variables $(\tilde{\xi}_i^l, l \geq 0, i \geq 1)$, le dernier membre est égal à

$$\mathbb{E} \left[\Phi(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n) \alpha^{-\tilde{N}_n} \left(\frac{p_0}{1 - \alpha(1 - p_0)} \right)^{1 + \tilde{Z}_1 + \dots + \tilde{Z}_{n-1} - \tilde{N}_n} \right].$$

□

4.4 Loi de la population totale

On note $Y_n = 1 + Z_1 + \dots + Z_n$ la population cumulée jusqu'à la n -ième génération. La suite $(Y_n, n \geq 0)$ est croissante et sa limite $Y \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ pour $n \rightarrow +\infty$ est la population totale du processus de Galton-Watson.

En l'absence d'extinction, pour tout n entier, la population Z_n à l'instant n est non nulle. Donc pour tout n , la population cumulée Y_n est supérieure à n et la population totale est infinie. En cas d'extinction, Z_n est nulle et donc Y_n constante à partir du temps d'extinction si bien que Y est finie. Donc la population totale Y est finie si et seulement s'il y a extinction. En particulier, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y = +\infty) = 1 - \eta.$$

D'après le lemme 4.1.1, $\mathbb{E}[Y_n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[Z_k] = \sum_{k=0}^n m^k$. Comme d'après le théorème de convergence monotone, $\mathbb{E}[Y_n]$ croît vers $\mathbb{E}[Y]$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on en déduit que

$$\mathbb{E}[Y] = \begin{cases} 1/(1 - m) & \text{dans le cas sous-critique i.e. si } m < 1, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.15)$$

L'un des principaux objectifs de ce paragraphe, au delà de l'étude de la loi de Y , est d'établir le corollaire 4.4.5 ci-dessous. Ce corollaire permettra d'identifier la solution de l'équation de coagulation discrète avec noyau additif dans le Chap. 12. Pour le démontrer, nous allons dans un premier temps relier la fonction $s/G(s)$ et la fonction génératrice $F(s) = \mathbb{E}[s^Y]$ de la population totale Y , où par convention $s^{+\infty} = 0$ si $s \in [0, 1[$ et $1^{+\infty} = 1$. Puis nous établirons un lien entre la loi de Y et la loi de reproduction.

Lemme 4.4.1. *On suppose que $p_0 > 0$. Alors, dans les cas sous-critique et critique, la fonction $s \in [0, 1] \rightarrow F(s) = \mathbb{E}[s^{Y_1}]$ est l'inverse de la fonction $s \in [0, 1] \rightarrow s/G(s)$. Dans le cas surcritique, la fonction $s \in [0, 1[\rightarrow F(s)$ est l'inverse de la fonction $s \in [0, \eta[\rightarrow s/G(s)$.*

Démonstration. On va commencer par vérifier que

$$\forall s \in [0, 1], F(s) = sG(F(s)).$$

Pour établir cette équation, on s'intéresse à l'évolution de $F_n(s) = \mathbb{E}[s^{Y_n}]$ avec n . Soit $n \geq 1$. On décompose Y_n suivant les valeurs prises par Z_1 . Si on note $Y_{1,n}^i$ le nombre de descendants entre la génération 1 et la génération n du i -ième individu présent à la première génération, on a $Y_n = 1 + \sum_{i=1}^{Z_1} Y_{1,n}^i$. En outre, pour $k \in \mathbb{N}^*$, conditionnellement à $Z_1 = k$, les variables $Y_{1,n}^i$, $1 \leq i \leq k$ sont indépendantes et ont même loi que Y_{n-1} . Donc on a

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \mathbb{E}[s^{Y_n}] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{Z_1=k\}} s^{1+\sum_{i=1}^k Y_{1,n}^i} \right] = s \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k F_{n-1}^k(s) \\ &= sG(F_{n-1}(s)). \end{aligned}$$

Soit $s \in [0, 1]$. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, s^{Y_n} converge presque sûrement vers s^Y . Comme $0 \leq s^{Y_n} \leq 1$, on déduit du théorème de convergence dominée que $F_n(s) = \mathbb{E}[s^{Y_n}]$ converge vers $F(s) = \mathbb{E}[s^Y]$. La continuité de G permet de passer à la limite dans l'équation reliant F_n à F_{n-1} pour conclure que $F(s) = sG(F(s))$.

Cette équation se réécrit

$$\forall s \in [0, 1], H(F(s)) = s \text{ où pour } x \in [0, 1], H(x) = x/G(x).$$

Plaçons nous d'abord dans les cas sous-critique et critique. Pour s dans $[0, 1]$, $F(s)$ est à valeurs dans $[0, 1]$. Comme la fonction H est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $H(0) = 0/p_0 = 0$ et $H(1) = 1$, il suffit de vérifier que H est strictement croissante sur $[0, 1]$ pour conclure.

Lorsque $p_0 + p_1 = 1$, $G(s) = p_0 + p_1 s$ et cela se vérifie très facilement.

Supposons donc que $p_0 + p_1 < 1$. On a

$$H'(s) = \frac{G(s) - sG'(s)}{G^2(s)}.$$

Le numérateur $G(s) - sG'(s)$ de dérivée $-sG''(s)$ est strictement décroissant sur $[0, 1]$ puisqu'il existe $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$. Il prend la valeur positive $1 - m$ pour $s = 1$. Donc pour tout $s \in [0, 1[$, $H'(s) > 0$.

Dans le cas surcritique, la population totale est infinie avec la probabilité strictement positive $1 - \eta$ et pour s dans $[0, 1[$, $F(s)$ prend ses valeurs dans $[0, \eta[$. Comme $H(0) = 0$, $H(\eta) = \eta/\eta = 1$, il suffit cette fois de vérifier que la fonction H est strictement croissante sur $[0, \eta]$ pour conclure. Comme il existe

$k \geq 2$ tel que $p_k > 0$, le numérateur $G(s) - sG'(s)$ de $H'(s)$ est strictement décroissant. Et comme $G'(\eta) < 1$ d'après le lemme 4.1.6, $G(\eta) - \eta G'(\eta) = (1 - G'(\eta))\eta > 0$, ce qui permet de conclure.

Notons que même si $\lim_{s \rightarrow 1^-} F(s) = \eta$, $F(1)$ est toujours égal à 1, ce qui entraîne que $s \in [0, 1] \rightarrow F(s)$ n'est pas l'inverse de $s \in [0, \eta] \rightarrow s/G(s)$. \square

En dehors du cas particulier de l'exercice d'application suivant, il est en général difficile d'inverser la fonction $s/G(s)$ de façon analytique et d'identifier ainsi la loi de la population totale Y .

Exercice 4.4.2. Dans le cas où $p_0 + p_1 = 1$ avec $p_0 > 0$, déterminer F et en déduire la loi de Y . Justifier intuitivement le résultat. \blacklozenge

C'est pourquoi le résultat principal du paragraphe est la proposition suivante qui relie la loi de la population totale à la loi de reproduction.

Proposition 4.4.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1)$ où les variables $(\xi_i, i \geq 1)$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de reproduction.*

Lorsque la loi de la somme de n variables indépendantes distribuées suivant la loi de reproduction a une expression simple, on en déduit une expression analytique de la loi de la population totale.

Exemple 4.4.4. – Si $p_0 + p_2 = 1$, alors $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/2$ suit la loi binomiale de paramètre n et p_2 et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} p_2^{\frac{n-1}{2}} (1 - p_2)^{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

– Si la loi de reproduction est la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$, alors $\xi_1 + \dots + \xi_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^{n-1}}{n!}.$$

Comme $\mathbb{E}[\xi_1] = \theta$, lorsque $\theta \leq 1$, la population totale est presque sûrement finie. La probabilité qui donne le poids $e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^{n-1}}{n!}$ à tout entier naturel n non nul porte alors le nom de loi de Borel de paramètre θ . Lorsque $\theta > 1$, la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^{n-1}}{n!}$ est égale à la probabilité d'extinction $\eta < 1$ qui vérifie $e^{\theta(\eta-1)} = \eta$ puisque la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre θ est $G(s) = e^{\theta(s-1)}$.

La figure 4.7 illustre ces résultats pour les deux lois de reproduction sous-critiques suivantes : $p_2 = 1 - p_0 = 0.45$ et loi de Poisson de paramètre $\theta = 0.9$. \diamond

Lorsque la loi de reproduction est la loi de Poisson de paramètre θ , $G(s) = e^{\theta(s-1)}$. En combinant l'exemple 4.4.4, le lemme 4.4.1 et l'équation (4.15), on obtient le corollaire suivant qui nous permettra d'identifier la solution de l'équation de coagulation discrète avec noyau additif dans le Chap. 12.

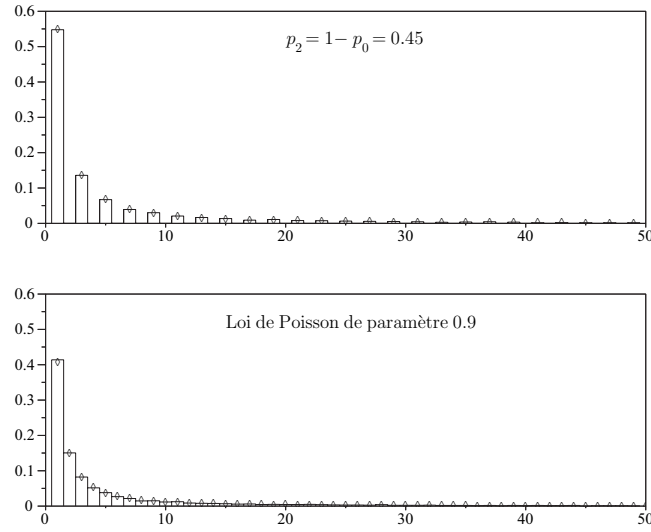


Fig. 4.7. Histogrammes de 10 000 tirages de la population totale et comparaison avec la loi exacte (losanges)

Corollaire 4.4.5. Soit $\theta \in]0, 1]$. Alors la fonction $s \in [0, 1] \rightarrow se^{\theta(1-s)} \in [0, 1]$ est inversible. Son inverse est la fonction génératrice de la loi de Borel de paramètre θ qui donne la probabilité $e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^{n-1}}{n!}$ à tout entier n non nul. Elle a pour espérance $1/(1-\theta)$ (où par convention $1/0 = +\infty$).

La démonstration de la proposition 4.4.3 repose sur les deux lemmes suivants. Le premier relie la loi de la population totale à la marche aléatoire dont les incréments sont donnés par les variables $(\xi_i, i \geq 1)$. Il interviendra également dans le paragraphe 9.5 consacré à l'étude des files d'attente à un serveur lorsque la loi du temps de service des clients est quelconque.

Lemme 4.4.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = n)$ est égale à

$$\mathbb{P}(\xi_1 \geq 1, \xi_1 + \xi_2 \geq 2, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \geq n-1, \xi_1 + \dots + \xi_n = n-1).$$

Le second lemme est un résultat de nature combinatoire :

Lemme 4.4.7. Soit $n \geq 2$ et (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ tel que

$$x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 0, \dots, x_1 + \dots + x_{n-1} \geq 0 \text{ et } x_1 + \dots + x_n = -1. \quad (4.16)$$

Alors les n permutations cycliques $(x_1^i, \dots, x_n^i) = (x_{i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_i)$ d'indice $i \in \{1, \dots, n\}$ de ce n -uplet sont distinctes.

En outre, tout n -uplet (y_1, \dots, y_n) de $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ tel que $y_1 + \dots + y_n = -1$ s'écrit comme permutation cyclique d'un tel n -uplet.

Nous reportons les démonstrations très techniques de ces deux lemmes à la fin du paragraphe.

Démonstration de la proposition 4.4.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$q_n = \mathbb{P}(\xi_1 \geq 1, \xi_1 + \xi_2 \geq 2, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \geq n-1, \xi_1 + \dots + \xi_n = n-1).$$

D'après le lemme 4.4.6, il suffit de vérifier que

$$q_n = \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n-1)/n.$$

Pour cela nous introduisons $X_k = \xi_k - 1$ pour $1 \leq k \leq n$. Les variables X_1, \dots, X_n prennent leur valeurs dans $\{-1\} \cup \mathbb{N}$. Comme elles sont indépendantes et identiquement distribuées, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le vecteur $(X_1^i, \dots, X_n^i) = (X_{i+1}, \dots, X_n, X_1, \dots, X_i)$ a même loi que (X_1, \dots, X_n) . Donc pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) de $\{-1\} \cup \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_1^i = x_1, \dots, X_n^i = x_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = x_1^{n-i}, \dots, X_n = x_n^{n-i}), \end{aligned}$$

où $(x_1^{n-i}, \dots, x_n^{n-i})$ désigne le vecteur $(x_{n-i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{n-i})$. Ainsi en notant A_n l'ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) de $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ qui vérifient (4.16), on obtient

$$\begin{aligned} q_n &= \mathbb{P}(X_1 \geq 0, X_1 + X_2 \geq 0, \dots, X_1 + \dots + X_{n-1} \geq 0, X_1 + \dots + X_n = -1) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = x_1^{n-i}, \dots, X_n = x_n^{n-i}). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.4.7, on décrit l'ensemble des n -uplets (y_1, \dots, y_n) de $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ tels que $y_1 + \dots + y_n = -1$ en parcourant l'ensemble des n permutations cycliques de tous les n -uplets (x_1, \dots, x_n) de A_n . On conclut donc que

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{y_1, \dots, y_n \geq -1 \\ y_1 + \dots + y_n = -1}} \mathbb{P}(X_1 = y_1, \dots, X_n = y_n) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = -1) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n-1). \end{aligned}$$

□

L'objectif de l'exercice suivant est d'établir l'identité combinatoire (4.17) qui intervient dans l'exercice 12.1.17 du Chap. 12 consacré aux phénomènes de coagulation et de fragmentation.

Exercice 4.4.8. Soit $(\xi_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans \mathbb{N} et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que l'événement $\{\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1\}$ s'écrit comme union des événements

$$\{\xi_1 \geq 1, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_{k-1} \geq k-1, \xi_1 + \dots + \xi_k = k-1, \xi_{k+1} + \dots + \xi_n = n-k\}$$

pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

2. En déduire en utilisant le lemme 4.4.6 que

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n-1) \\ = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_k = k-1) \mathbb{P}(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n = n-k). \end{aligned}$$

3. Dans le cas particulier où les variables ξ_i suivent la loi de Poisson de paramètre 1, en déduire l'identité combinatoire

$$(n-1) \frac{n^{n-1}}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{k^{k-1}}{k!}. \quad (4.17)$$

◆

Démonstration du lemme 4.4.6. Tout d'abord on a

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1^0 = 0),$$

ce qui établit le résultat pour $n = 1$.

Supposons désormais $n \geq 2$. En décomposant l'événement $\{Y = n\}$ sur les valeurs prises par Z_1 puis par Z_2 et ainsi de suite, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(Z_1 = n-1, Z_2 = 0) + \sum_{i_1=1}^{n-2} \mathbb{P}(Z_1 = i_1, Y = n) \\ &= \mathbb{P}(Z_1 = n-1, Z_2 = 0) + \sum_{\substack{i_1, i_2 \geq 1 \\ i_1 + i_2 = n-1}} \mathbb{P}(Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, Z_3 = 0) \\ &\quad + \sum_{\substack{i_1, i_2 \geq 1 \\ i_1 + i_2 \leq n-2}} \mathbb{P}(Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, Y = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 1 \\ i_1 + \dots + i_k = n-1}} \mathbb{P}(Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, \dots, Z_k = i_k, Z_{k+1} = 0) \\ \mathbb{P}(Y = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 1 \\ i_1 + \dots + i_k = n-1}} \mathbb{P}(\xi_1^0 = i_1, \xi_1^1 + \dots + \xi_{i_1}^1 = i_2, \dots, \\ &\quad \xi_1^{k-1} + \dots + \xi_{i_{k-1}}^{k-1} = i_k, \xi_1^k + \dots + \xi_{i_k}^k = 0). \end{aligned}$$

Comme pour tout $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $i_1 + \dots + i_k = n - 1$, le vecteur aléatoire $(\xi_1^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{i_1}^1, \dots, \xi_1^k, \dots, \xi_{i_k}^k)$ a même loi que le vecteur aléatoire $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{1+i_1}, \dots, \xi_{2+i_1+\dots+i_{k-1}}, \dots, \xi_n)$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 1 \\ i_1 + \dots + i_k = n-1}} \mathbb{P}\left(\xi_1 = i_1, \xi_2 + \dots + \xi_{1+i_1} = i_2, \dots, \right. \\ \left. \xi_{2+i_1+\dots+i_{k-2}} + \dots + \xi_{1+i_1+\dots+i_{k-1}} = i_k, \right. \\ \left. \xi_{2+i_1+\dots+i_{k-1}} + \dots + \xi_{1+i_1+\dots+i_k} = 0\right). \quad (4.18)$$

Nous allons maintenant montrer que la probabilité

$$q_n = \mathbb{P}(\xi_1 \geq 1, \xi_1 + \xi_2 \geq 2, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \geq n-1, \xi_1 + \dots + \xi_n = n-1)$$

est égale au second membre de (4.18). En décomposant sur les valeurs prises par ξ_1 et en remarquant que si $\xi_1 = i_1 \geq 1$ alors pour $1 \leq l \leq i_1$, $\xi_1 + \dots + \xi_l \geq l$, on obtient

$$q_n = \mathbb{P}(\xi_1 = n-1, \xi_2 + \dots + \xi_n = 0) \\ + \sum_{i_1=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(\xi_1 = i_1, \xi_2 + \dots + \xi_{1+i_1} \geq 1, \dots, \right. \\ \left. \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} \geq n-1-i_1, \xi_2 + \dots + \xi_n = n-1-i_1\right).$$

On décompose ensuite sur les valeurs prises par $\xi_2 + \dots + \xi_{1+i_1}$ les événements dont la probabilité apparaît dans la somme sur i_1 :

$$q_n = \mathbb{P}(\xi_1 = n-1, \xi_2 + \dots + \xi_n = 0) \\ + \sum_{\substack{i_1, i_2 \geq 1 \\ i_1 + i_2 = n-1}} \mathbb{P}(\xi_1 = i_1, \xi_2 + \dots + \xi_{1+i_1} = i_2, \xi_{2+i_1} + \dots + \xi_n = 0) \\ + \sum_{\substack{i_1, i_2 \geq 1 \\ i_1 + i_2 \leq n-2}} \mathbb{P}\left(\xi_1 = i_1, \xi_2 + \dots + \xi_{1+i_1} = i_2, \xi_{2+i_1} + \dots + \xi_{1+i_1+i_2} \geq 1, \right. \\ \left. \dots, \xi_{2+i_1} + \dots + \xi_{n-1} \geq n-1-i_1-i_2, \xi_{2+i_1} + \dots + \xi_n = n-1-i_1-i_2\right).$$

En décomposant maintenant sur les valeurs prises par $\xi_{2+i_1} + \dots + \xi_{1+i_1+i_2}$ et ainsi de suite, on conclut que q_n est égal au second membre de (4.18), ce qui achève la démonstration. \square

Démonstration du lemme 4.4.7. Soit (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ tel que

$$x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 0, \dots, x_1 + \dots + x_{n-1} \geq 0 \text{ et } x_1 + \dots + x_n = -1. \quad (4.19)$$

Notons que $(x_1^n, \dots, x_n^n) = (x_1, \dots, x_n)$ et donc que

$$n = \min \left\{ l : \sum_{k=1}^l x_k^n = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^j x_k^n \right\}.$$

Pour démontrer que les n permutations cycliques (x_1^i, \dots, x_n^i) d'indice $i \in \{1, \dots, n\}$ sont distinctes, nous allons vérifier que pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$n - i = \min \left\{ l : \sum_{k=1}^l x_k^i = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^j x_k^i \right\}. \quad (4.20)$$

Comme d'après (4.19), pour $j \in \{i+1, \dots, n-1\}$, $\sum_{k=1}^j x_k > \sum_{k=1}^n x_k$ en soustrayant $\sum_{k=1}^i x_k$ aux deux membres de cette inégalité et en posant $l = j - i$, on obtient que

$$\forall l \in \{1, \dots, n-i-1\}, \sum_{k=1}^l x_k^i > \sum_{k=1}^{n-i} x_k^i.$$

Par ailleurs, toujours d'après (4.19), pour $j \in \{1, \dots, i\}$, $\sum_{k=1}^j x_k \geq 0$, inégalité qui se réécrit $\sum_{k=n-i+1}^{n-i+j} x_k^i \geq 0$. En additionnant $\sum_{k=1}^{n-i} x_k^i$ aux deux membres de cette inégalité et en posant $l = n - i + j$, on obtient que

$$\forall l \in \{n-i+1, \dots, n\}, \sum_{k=1}^l x_k^i \geq \sum_{k=1}^{n-i} x_k^i,$$

ce qui achève la démonstration de (4.20).

Soit maintenant (y_1, \dots, y_n) un n -uplet de $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ tel que $y_1 + \dots + y_n = -1$. Nous allons montrer que (y_1, \dots, y_n) s'obtient comme permutation cyclique d'un n -uplet (x_1, \dots, x_n) qui satisfait (4.19). Dans ce but, posons

$$i = \min \left\{ l : \sum_{k=1}^l y_k = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^j y_k \right\}.$$

Si $i = n$, alors $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ vérifie (4.19).

Si $i \in \{1, \dots, n-1\}$ posons $(x_1, \dots, x_n) = (y_1^i, \dots, y_n^i)$. Bien sûr $(y_1, \dots, y_n) = (x_1^{n-i}, \dots, x_n^{n-i})$ et il suffit de vérifier (4.19) pour conclure. Par définition de i ,

$$\forall l \in \{1, \dots, i-1\}, \sum_{k=1}^l y_k > \sum_{k=1}^i y_k \text{ et } \forall l \in \{i+1, \dots, n\}, \sum_{k=i+1}^l y_k \geq 0.$$

En utilisant la définition de (x_1, \dots, x_n) , ces inégalités se récrivent :

$$\begin{cases} \forall j \in \{n-i+1, \dots, n-1\}, \sum_{k=n-i+1}^j x_k > \sum_{k=n-i+1}^n x_k \\ \forall j \in \{1, \dots, n-i\}, \sum_{k=1}^j x_k \geq 0 \end{cases}.$$

Il suffit d'ajouter $\sum_{k=1}^{n-i} x_k$ aux deux membres de la première inégalité et de remarquer que $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k = -1$ pour conclure que (x_1, \dots, x_n) satisfait (4.19). \square

Références

1. S. Asmussen et H. Hering. *Branching processes*. Birkhäuser, 1983.
2. K. Athreya et P. Ney. *Branching processes*. Springer-Verlag, 1972.
3. T. Harris. *The theory of branching processes*. Springer-Verlag, 1963.
4. P. Jagers. *Branching processes with biological applications*. Wiley, 1975.
5. D. Kendall. Branching processes since 1873. *J. Lond. Math. Soc.*, 41 : 385–406, 1966.
6. M. Kimmel et D. Axelrod. *Branching Processes in Biology*. Springer-Verlag, 2002.
7. A. Lotka. The extinction of families, i. *J. Washington Acad. Sci.*, 21 : 377–380, 1931.
8. A. Lotka. The extinction of families, ii. *J. Washington Acad. Sci.*, 21 : 453–459, 1931.