

Éléments de fiabilité

Comme des matériels de même nature, des ampoules électriques ou des automobiles par exemple, produits dans la même usine, peuvent avoir des durées de bon fonctionnement très différentes, il est naturel d'adopter une modélisation aléatoire pour la durée de vie d'un matériel. Ce chapitre constitue une introduction à la théorie probabiliste de la fiabilité dont les objectifs sont :

- d'effectuer une modélisation des durées de vie permettant de rendre compte des données expérimentales,
- de construire des indicateurs de performance des matériels,
- de modéliser le fonctionnement d'un système complexe à partir de celui de ses composants élémentaires,
- d'étudier les effets d'une politique de maintenance préventive...

Le premier paragraphe, inspiré du livre de Coccozza-Thivent [5], présente les notions de *disponibilité* et de *fiabilité* qui sont des mesures de la performance des matériels. Puis nous introduisons le *taux de défaillance* λ d'un matériel. Cette notion qui joue un rôle très important dans la modélisation en fiabilité est définie de la façon suivante : la probabilité pour que le matériel connaisse sa première panne entre t et $t + dt$ sachant qu'il a bien fonctionné jusqu'en t est donnée par $\lambda(t)dt$. Le cas où le taux de défaillance est une fonction monotone du temps fait l'objet d'une attention particulière.

Le second paragraphe explique comment simuler une durée de vie de taux de défaillance donné. Les deux méthodes présentées, l'inversion du taux de défaillance cumulé et la méthode des pannes fictives, sont respectivement le pendant de la méthode d'inversion de la fonction de répartition et de la méthode du rejet destinées à simuler une variable aléatoire réelle de densité donnée.

Le troisième paragraphe repose sur le livre de Barlow et Proschan [2] qui a posé les bases mathématiques de la fiabilité. Il est consacré à l'étude de stratégies de maintenance préventive, en particulier lorsque l'on s'intéresse à un matériel qui est remplacé immédiatement par un matériel équivalent lors de chaque panne. Si les durées de vie successives sont indépendantes et identiquement distribuées, la suite des instants de pannes forme un *processus de*

renouvellement. Après avoir étudié ce processus de renouvellement, nous nous intéressons à deux stratégies de remplacement préventif. La première, le remplacement suivant l'âge, consiste à remplacer préventivement tout matériel ayant atteint l'âge $s > 0$ sans avoir connu de panne. La seconde, le remplacement par bloc, consiste à remplacer le matériel de façon préventive aux instants ls pour $l \in \mathbb{N}^*$. Nous étudions l'optimisation du paramètre s dans chacune des stratégies avant d'effectuer des comparaisons entre les deux stratégies.

Le quatrième paragraphe est une introduction à la fiabilité des systèmes complexes. La notion de *fonction de structure* permet de formaliser la manière dont l'état du système dépend de celui de ses composants élémentaires. Cette fonction peut être évaluée en recensant les *coupes*, c'est-à-dire les ensembles de composants dont la panne simultanée entraîne la panne du système. Elle permet de calculer la performance du système en termes de *disponibilité* et de *fiabilité*. Lorsque la complexité du système fait que le calcul devient trop coûteux, il faut se contenter de minoration de ces quantités.

Pour plus de détails sur les modèles probabilistes en fiabilité, nous renvoyons aux ouvrages déjà cités [2, 5] ainsi qu'aux livres en français de Bon [4], Pagès et Gondran [11] et Limnios [8] et ceux en anglais d'Aven et Jensen [1], Birolini [3], Gertsbakh [6], Hoyland et Rausand [7], Osaki [10] et Thompson [13].

10.1 Introduction à la fiabilité

10.1.1 Mesures de performance

On considère un matériel (lampe, composant électronique, moteur,...) qui peut se trouver dans différents états. On note \mathcal{E} l'ensemble de ces états que l'on suppose divisé en deux classes : la classe \mathcal{M} des états de marche et la classe \mathcal{P} des états de panne. Pour rendre compte des différents scénarii possibles, on décrit l'évolution dans le temps du système par un processus stochastique $(X_t, t \geq 0)$ sur un espace de probabilité Ω c'est-à-dire par une famille de variables aléatoires X_t indiquant l'état du matériel à l'instant t . Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \in [0, +\infty[\rightarrow X_t(\omega) \in \mathcal{E}$ est un scénario d'évolution possible.

Définition 10.1.1.

- La **disponibilité** (*availability en anglais*) $D(t)$ du matériel à l'instant t est la probabilité pour que ce matériel fonctionne à cet instant : $D(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M})$.
- La **fiabilité** (*reliability en anglais*) $\bar{F}(t)$ du matériel à l'instant t est la probabilité pour que ce matériel fonctionne sur tout l'intervalle $[0, t]$: $\bar{F}(t) = \mathbb{P}(\forall s \in [0, t], X_s \in \mathcal{M})$.

Bien sûr, on a $\bar{F}(t) \leq D(t)$. Soit $T = \inf\{s \geq 0 : X_s \in \mathcal{P}\}$ la première durée de bon fonctionnement et $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ sa fonction de répartition que l'on suppose continue. On a

$$\bar{F}(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - F(t). \quad (10.1)$$

On définit également le **MTTF** (Mean Time To Failure) comme la durée moyenne de bon fonctionnement :

$$\boxed{MTTF = \mathbb{E}[T]} = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T > t\}} dt \right] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > t) dt = \int_0^{+\infty} \bar{F}(t) dt.$$

10.1.2 Taux de défaillance

Dans les paragraphes suivants, nous supposons que la variable aléatoire positive T possède la densité $f(t)$ sur \mathbb{R}_+ .

Définition 10.1.2. On appelle *taux de défaillance* (ou aussi *taux de hasard*) de T et de sa densité f la fonction λ définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\lambda(t) = \begin{cases} f(t)/\bar{F}(t) & \text{si } \bar{F}(t) > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (10.2)$$

où $\bar{F}(t) = \mathbb{P}(T > t) = \int_t^{+\infty} f(s) ds$.

Le taux de défaillance est homogène à l'inverse d'un temps. Intuitivement, la probabilité pour que le matériel connaisse sa première panne entre t et $t + dt$ sachant qu'il a bien fonctionné jusqu'en t est donnée par $\lambda(t)dt$. Plus rigoureusement si la densité f est continue en t ,

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(t + \Delta t \geq T > t | T > t) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(s) ds}{\Delta t \bar{F}(t)} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \lambda(t).$$

Exemple 10.1.3. La loi de Weibull sur \mathbb{R}_+ de paramètre (α, β) où $\alpha, \beta > 0$ est la loi de densité

$$f(t) = \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left(- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right).$$

Cette famille de lois est très utilisée en fiabilité car elle permet des calculs analytiques. En effet, on obtient facilement

$$\bar{F}(t) = \exp \left(- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right) \quad \text{puis} \quad \lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}.$$

En outre, si T suit cette loi, en effectuant le changement de variables $u = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \int_0^{+\infty} t \times \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) dt = \int_0^{+\infty} \alpha u^{1/\beta} e^{-u} du \\ &= \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),\end{aligned}$$

où Γ désigne la fonction gamma d'Euler.

D'un point de vue théorique, l'utilisation de la loi de Weibull peut se justifier par la théorie des valeurs extrêmes. En effet, si on considère que le matériel est constitué d'un grand nombre de composants indépendants et identiquement distribués placés en série, sa durée de bon fonctionnement est égale au minimum des durées de bon fonctionnement de ces composants. D'après la remarque 11.3.4, il est naturel de modéliser cette durée de bon fonctionnement par une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Weibull sur \mathbb{R}_+ . \diamond

La proposition suivante exprime la fiabilité \bar{F} en fonction du taux de défaillance :

Proposition 10.1.4.

$$\forall t \geq 0, \bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right).$$

En outre, si on pose $a = \inf\{s \geq 0, \bar{F}(s) = 0\}$, alors pour tout $t \geq a$, $\int_0^t \lambda(s) ds = +\infty$.

Démonstration. Par continuité et décroissance de \bar{F} , si $a < +\infty$, \bar{F} est nulle sur $[a, +\infty[$.

On suppose que $t < a$. Par décroissance de \bar{F} , on a

$$\int_0^t \lambda(s) ds \leq \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_0^t f(s) ds \leq \frac{1}{\bar{F}(t)} < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(s) ds = 1 - \int_0^t \lambda(s) \bar{F}(s) ds.$$

D'après la proposition E.1, on en déduit que pour tout t dans $[0, a[$, $\bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$. Lorsque $a < +\infty$, comme $\bar{F}(a) = 0$, par continuité de \bar{F} , $\lim_{t \rightarrow a^-} \bar{F}(t) = 0$. On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow a^-} \int_0^t \lambda(s) ds = -\lim_{t \rightarrow a^-} \log(\bar{F}(t)) = +\infty.$$

Donc $\forall t \geq a$, $\int_0^t \lambda(s) ds = +\infty$ et $\bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$. \square

Remarque 10.1.5.

- On déduit de la proposition 10.1.4 que le taux de défaillance d'une variable aléatoire de densité f sur \mathbb{R}_+ est une fonction $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\int_0^{+\infty} \lambda(r)dr = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \log(\bar{F}(t)) = +\infty$ et que

$$a = \inf\{t \geq 0, \int_0^t \lambda(r)dr = +\infty\},$$

ce qui implique que $\lambda(s) = 0$ pour tout $s \geq \inf\{t \geq 0, \int_0^t \lambda(r)dr = +\infty\}$. En outre, d'après la proposition et la définition du taux de défaillance, pour tout $t \in [0, a[$, $f(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)$. Lorsque a est fini, cette formule reste vraie pour $t \in [a, +\infty[$ car les deux membres sont alors nuls.

- Inversement, si on se donne une fonction $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} \lambda(r)dr = +\infty$ et que $\lambda(s) = 0$ pour tout $s \geq b$ où $b = \inf\{t \geq 0, \int_0^t \lambda(r)dr = +\infty\}$ (convention : $\inf \emptyset = +\infty$) alors $f(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)$ est une densité de probabilité sur \mathbb{R}_+ telle que $\int_t^{+\infty} f(s)ds = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)$ (ce résultat, vrai pour $t \geq b$ car les deux membres sont nuls, s'obtient sinon en prenant la limite $t' \rightarrow b^-$ dans (E.2)) et qui admet λ comme taux de défaillance.

On peut donc décrire la loi d'une variable aléatoire à densité en se donnant cette densité (c'est le point de vue généralement adopté par les probabilistes) ou en se donnant son taux de défaillance (c'est le point de vue généralement adopté par les fiabilistes). Notons que la modélisation au travers du taux de défaillance est aussi très utilisée dans le domaine du risque de crédit pour décrire le temps de défaut d'une entreprises, c'est-à-dire l'instant où cette entreprise cesse de rembourser ses dettes. \diamond

Exercice 10.1.6. Quelles sont les densités associées aux taux de défaillance

$$\lambda(t) = \frac{\mathbf{1}_{\{t < 1\}}}{1-t} \text{ et } \lambda(t) = \alpha \frac{\mathbf{1}_{\{t \geq 1\}}}{t} \text{ où } \alpha > 0 ?$$

 \blacklozenge

Il est courant de considérer que la courbe du taux de défaillance $t \rightarrow \lambda(t)$ d'un matériel a une forme de baignoire. Dans une première phase, il est décroissant : c'est la période de rodage où les éventuels défauts de fabrication peuvent entraîner une panne. Puis, dans une seconde phase, il est approximativement constant : c'est la période de vie utile où on ne découvre plus de défauts de fabrication et où le matériel n'est pas encore fragilisé par son utilisation. Enfin, dans une troisième phase, il est croissant : c'est la période de vieillissement où l'usure du matériel liée à son utilisation devient sensible. Le corollaire suivant caractérise les lois avec taux de défaillance constant :

Corollaire 10.1.7. *Le taux de défaillance de la variable aléatoire T est constant et égal à $\lambda > 0$ si et seulement si T suit la loi exponentielle de paramètre λ i.e. admet $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ comme densité sur \mathbb{R}_+ .*

Démonstration. Si T suit la loi exponentielle, $\bar{F}(t) = \int_t^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda s) ds = \exp(-\lambda t)$ et $\lambda(t) = f(t)/\bar{F}(t) = \lambda$.

Réciproquement, si le taux de défaillance de T est constant égal à $\lambda > 0$, d'après la remarque 10.1.5, T possède la densité $\lambda e^{-\int_0^t \lambda ds} = \lambda e^{-\lambda t}$ sur \mathbb{R}_+ . \square

L'interprétation physique d'un taux de défaillance constant est que le matériel ne vieillit pas (il ne rajeunit pas non plus) : $\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s)$ ce qui s'écrit aussi $\bar{F}(t + s) = \bar{F}(t)\bar{F}(s)$. On retrouve la propriété d'absence de mémoire des variables exponentielles (voir le lemme 8.1.5).

10.1.3 Taux de défaillance monotone, lois NBU

Définition 10.1.8. La variable T et sa loi sont dites **IFR** (*Increasing Failure Rate*) si le taux de défaillance $t \rightarrow \lambda(t)$ est croissant sur \mathbb{R}_+ . Elle sont dites **DFR** (*Decreasing Failure Rate*) s'il est décroissant.

Lorsque la durée de vie d'un matériel est IFR (resp. DFR), plus le temps passe sans que le matériel ait connu de panne, plus (resp. moins) ce matériel est fragile.

Exemple 10.1.9. Le taux de défaillance de la loi de Weibull sur \mathbb{R}_+ de paramètre (α, β) est

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}.$$

Donc cette loi est DFR pour $\beta \in]0, 1[$ et IFR pour $\beta > 1$. Pour $\beta = 1$ le taux de défaillance est constant et on retrouve la loi exponentielle de paramètre $1/\alpha$. \diamond

Remarque 10.1.10. Dans le cas IFR, λ est strictement positif sur $]t_0, +\infty[$ où $t_0 = \inf\{t \geq 0 : \lambda(t) > 0\}$. Avec la définition du taux de défaillance on en déduit que la fiabilité \bar{F} est strictement positive sur $]t_0, +\infty[$. Par décroissance de \bar{F} , on a donc

$$\forall t \geq 0, \bar{F}(t) > 0.$$

Cette propriété reste vraie dans le cas DFR puisque d'après la proposition 10.1.4, $\bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right) \geq e^{-\lambda(0)t}$. \diamond

Exercice 10.1.11. La loi gamma de paramètre (λ, α) avec $\lambda, \alpha > 0$ a pour densité $f(t) = \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} / \Gamma(\alpha)$.

1. Montrer que son taux de défaillance vérifie

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{1 + (\alpha - 1) \int_1^{+\infty} s^{\alpha-2} e^{-\lambda t(s-1)} ds}.$$

2. En déduire que cette loi est DFR pour $\alpha \leq 1$ et IFR pour $\alpha \geq 1$.
3. Vérifier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda$.

◆

Une propriété très intéressante des variables IFR d'espérance μ est que l'on peut minorer sur $[0, \mu]$ la fiabilité qui leur est associée par $\exp(-t/\mu)$ (c'est-à-dire la fiabilité associée à une variable exponentielle d'espérance μ).

Proposition 10.1.12. *Si T est IFR d'espérance μ , alors $\forall t \in [0, \mu]$, $\bar{F}(t) \geq \exp(-t/\mu)$.*

La figure 10.1 illustre cette proposition en représentant sur l'intervalle de temps $[0, 2]$ la fiabilité associée à plusieurs lois d'espérance $\mu = 1$. On constate que sur l'intervalle de temps $[0, 1]$, les courbes correspondant aux lois IFR (Weibull $(\frac{1}{\Gamma(4/3)}, 3)$, Weibull $(\frac{1}{\Gamma(3/2)}, 2)$, gamma $(3, 3)$ et gamma $(2, 2)$) sont effectivement au-dessus de la courbe en trait plein associée à la loi exponentielle de paramètre 1. Elles passent en dessous de cette courbe en trait plein au-delà du temps 1. Les fiabilités associées aux lois DFR (Weibull $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et gamma $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) sont au-dessous de la courbe de la loi exponentielle sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. En fait pour une loi DFR, on peut inverser toutes les inégalités écrites plus loin dans la démonstration de la proposition 10.1.12 pour obtenir : $\forall t \in [0, \mu]$, $\bar{F}(t) \leq \exp(-t/\mu)$. Pour effectuer cette démonstration, il est utile d'introduire la notion de taux de défaillance cumulé :

Définition 10.1.13. *On appelle taux de défaillance cumulé de T la fonction $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.*

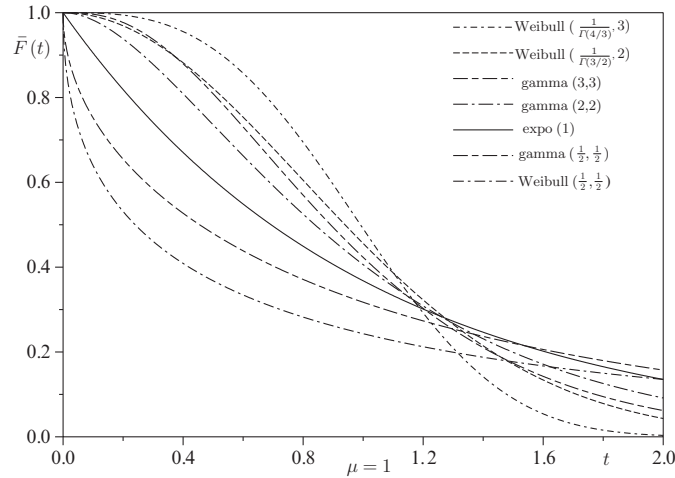


Fig. 10.1. Représentation de la fiabilité $t \rightarrow \bar{F}(t)$ pour diverses lois d'espérance $\mu = 1$

Démonstration de la proposition 10.1.12. Par croissance de λ , si $0 \leq s \leq t$, $\Lambda(t) - \Lambda(s) \geq \lambda(s)(t - s)$. Cette inégalité reste vraie si $0 \leq t \leq s$, les deux membres étant alors négatifs. En choisissant $s = \mathbb{E}[T]$, on en déduit que

$$\forall t \geq 0, \Lambda(t) \geq \Lambda(\mathbb{E}[T]) + \lambda(\mathbb{E}[T])(t - \mathbb{E}[T]).$$

Donc $\Lambda(T) \geq \Lambda(\mathbb{E}[T]) + \lambda(\mathbb{E}[T])(T - \mathbb{E}[T])$ et en prenant l'espérance, on obtient que $\mathbb{E}[\Lambda(T)] \geq \Lambda(\mathbb{E}[T])$. En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Lambda(T)] &= \int_0^{+\infty} f(t) \int_0^t \lambda(s) ds dt = \int_0^{+\infty} \lambda(s) \int_s^{+\infty} f(t) dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda(s) \bar{F}(s) ds = \int_0^{+\infty} f(s) ds = 1. \end{aligned}$$

Donc $\Lambda(\mu) \leq 1$. En utilisant la convexité de Λ qui découle de la croissance de λ , on obtient que

$$\forall t \leq \mu, \Lambda(t) \leq \frac{\mu - t}{\mu} \Lambda(0) + \frac{t}{\mu} \Lambda(\mu) \leq 0 + \frac{t}{\mu}.$$

Par la proposition 10.1.4, on conclut que $\forall t \leq \mu, \bar{F}(t) \geq \exp(-t/\mu)$. \square

La notion suivante est couramment utilisée pour traduire le vieillissement d'un matériel.

Définition 10.1.14. La variable T et sa loi sont dites **NBU** (New Better than Used) si

$$\forall s, t \geq 0, \bar{F}(t + s) \leq \bar{F}(t) \bar{F}(s) \quad (10.3)$$

c'est-à-dire si

$$\forall s, t \geq 0 \text{ avec } \mathbb{P}(T > t) > 0, \mathbb{P}(T > t + s | T > t) \leq \mathbb{P}(T > s).$$

Cette notion est plus faible que IFR.

Proposition 10.1.15. Si la variable T est IFR, alors $\forall s, t, s', t' \geq 0$ avec $s + t = s' + t'$ et $\max(s, t) \leq \max(s', t')$, $\bar{F}(t) \bar{F}(s) \geq \bar{F}(t') \bar{F}(s')$. En particulier toute loi IFR est NBU.

Démonstration. Quitte à échanger s et t (resp. s' et t'), on suppose que $s \leq t$ et $s' \leq t'$.

On a alors $0 \leq \max(s', t') - \max(s, t) = t' - t = s - s'$. La croissance du taux de défaillance λ entraîne que $\int_t^{t'} \lambda(u) du \geq \int_{s'}^s \lambda(u) du$. En ajoutant $\int_0^t \lambda(u) du + \int_0^{s'} \lambda(u) du$ aux deux membres de cette inégalité, on en déduit

$$\int_0^{t'} \lambda(u) du + \int_0^{s'} \lambda(u) du \geq \int_0^t \lambda(u) du + \int_0^s \lambda(u) du.$$

On conclut grâce à la proposition 10.1.4 que $\bar{F}(t) \bar{F}(s) \geq \bar{F}(t') \bar{F}(s')$. Avec le choix $t' = t + s$, $s' = 0$ on en déduit que toute loi IFR est NBU. \square

Exercice 10.1.16. Montrer que la loi uniforme sur $[0, u]$ (où $u > 0$) et la loi de taux de défaillance $\lambda(t) = 2 \times \mathbf{1}_{\{1 \leq t < 2\}} + \mathbf{1}_{\{t \geq 2\}}$ sont NBU mais pas IFR. \blacklozenge

Pour mieux comprendre les propriétés IFR, DFR et NBU, nous introduisons maintenant la notion d'ordre stochastique, qui est un ordre partiel :

Définition 10.1.17. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles de fonctions de répartition respectives F_1 et F_2 non nécessairement définies sur le même espace de probabilité. On dit que X_1 est stochastiquement inférieure à X_2 et on note $X_1 \prec_{st} X_2$ si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \mathbb{P}(X_2 > x) \text{ i.e. } F_1(x) \geq F_2(x).$$

La proposition suivante précise la signification de cette notion d'ordre :

Proposition 10.1.18. On a $X_1 \prec_{st} X_2$ si et seulement si on peut construire un couple $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ vérifiant $\mathbb{P}(\tilde{X}_1 \leq \tilde{X}_2) = 1$ avec \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 respectivement de même loi que X_1 et que X_2 .

Démonstration. Si \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 ont respectivement même loi que X_1 et X_2 et vérifient $\mathbb{P}(\tilde{X}_1 \leq \tilde{X}_2) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_1 > x) = \mathbb{P}(\tilde{X}_1 > x) \leq \mathbb{P}(\tilde{X}_2 > x) = \mathbb{P}(X_2 > x)$ et on a $X_1 \prec_{st} X_2$.

Pour démontrer la condition nécessaire, on utilise la méthode d'inversion de la fonction de répartition. Pour $i = 1, 2$ on note F_i^{-1} l'inverse généralisé de F_i défini par $F_i^{-1}(y) = \inf\{x : F_i(x) \geq y\}$ pour $y \in]0, 1[$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) \geq F_2(x)$, on a

$$\forall y \in]0, 1[, F_1^{-1}(y) \leq F_2^{-1}(y). \quad (10.4)$$

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. D'après la proposition C.5, les variables aléatoires $\tilde{X}_1 = F_1^{-1}(U)$ et $\tilde{X}_2 = F_2^{-1}(U)$ ont respectivement même loi que X_1 et X_2 . En outre, d'après (10.4), $\mathbb{P}(\tilde{X}_1 \leq \tilde{X}_2) = 1$. \square

Pour en revenir à la fiabilité, on suppose que la durée de vie T d'un matériel vérifie $\forall t \geq 0, \mathbb{P}(T > t) = \bar{F}(t) > 0$ (condition satisfaite par exemple dans les cas IFR et DFR d'après la remarque 10.1.10). On appelle alors durée de survie à l'instant t , une variable aléatoire positive τ_t qui suit la loi conditionnelle de $T - t$ sachant $T > t$ i.e. qui vérifie pour tout $s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_t > s) = \mathbb{P}(T - t > s | T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \exp\left(-\int_t^{t+s} \lambda(u) du\right).$$

Notons que la durée de vie T a même loi que la durée de survie initiale τ_0 . On traduit facilement les propriétés IFR, DFR et NBU en termes de comparaison entre les durées de survie aux différents instants.

Proposition 10.1.19. *Si T est IFR (resp. DFR) alors la durée de survie à l'instant t associée est stochastiquement décroissante en t i.e. pour $0 \leq s \leq t$, $\tau_t \prec_{st} \tau_s$ (resp. croissante en t i.e. pour $0 \leq s \leq t$, $\tau_s \prec_{st} \tau_t$).*

Lorsque $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(T > t) > 0$, la loi de T est NBU si et seulement si $\forall t \geq 0$, $\tau_t \prec_{st} T$ ($\Leftrightarrow \forall t \geq 0$, $\tau_t \prec_{st} \tau_0$).

Remarque 10.1.20.

- La proposition 10.1.18 permet de comprendre en quoi une durée de vie NBU est plus grande que les durées de survie associées.
- La loi exponentielle de paramètre λ est « new equivalent to used » au sens où la loi de la durée de survie τ_t à l'instant t associée est la même quel que soit t .

◇

10.2 Simulation d'une variable aléatoire de taux de défaillance donné

Nous allons présenter deux méthodes spécifiques permettant de simuler, à partir d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, une variable aléatoire de taux de défaillance $\lambda(t)$ où $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda(r) dr = +\infty, \quad (10.5)$$

et $\lambda(s) = 0$ pour tout $s \geq \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \lambda(r) dr = +\infty\}$ (convention : $\inf \emptyset = +\infty$). Pour les méthodes classiques de simulation de variables aléatoires (méthode du rejet, méthode d'inversion de la fonction de répartition,...), nous renvoyons au paragraphe A.2.3.

10.2.1 Inversion du taux de défaillance cumulé

Lemme 10.2.1. *Soit $\Lambda^{-1}(x) = \inf\{t \geq 0 : \Lambda(t) \geq x\}$ l'inverse généralisé du taux de défaillance cumulé $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$. Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ alors $\Lambda^{-1}(-\log(U))$ a pour taux de défaillance $t \rightarrow \lambda(t)$.*

Remarque 10.2.2. Si T a pour taux de défaillance $t \rightarrow \lambda(t)$, alors T a même loi que $\Lambda^{-1}(-\log(U))$. On déduit d'une généralisation de (C.2) avec F remplacée par Λ , que $\Lambda(\Lambda^{-1}(-\log(U))) = -\log(U)$. Donc $\Lambda(T)$ a même loi que $-\log(U)$, c'est-à-dire $\Lambda(T)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1. On retrouve ainsi que $\mathbb{E}[\Lambda(T)] = 1$, propriété obtenue dans la démonstration de la proposition 10.1.12. ◇

Démonstration. L'équivalence (C.1) relie les ensembles de niveau d'une fonction de répartition et ceux de son inverse généralisé. Cette relation se généralise

à toute fonction croissante et continue à droite et s'écrit dans le cas du taux de défaillance cumulé $\Lambda^{-1}(x) \leq t \Leftrightarrow x \leq \Lambda(t)$. Avec la croissance stricte de la fonction exponentielle, on en déduit que $\{\Lambda^{-1}(-\log(U)) \leq t\} = \{-\log(U) \leq \Lambda(t)\} = \{U \geq \exp(-\Lambda(t))\}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\Lambda^{-1}(-\log(U)) \leq t) = 1 - \exp(-\Lambda(t)) = \int_0^t \lambda(s) \exp\left(-\int_0^s \lambda(r) dr\right) ds,$$

en utilisant (E.2) pour la dernière égalité. Ainsi, la fonction de répartition de $\Lambda^{-1}(-\log(U))$ est égale à celle associée à la loi de densité $f(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi (proposition C.2), T a pour densité f et donc pour taux de défaillance λ . \square

Exemple 10.2.3. Pour la loi de Weibull sur \mathbb{R}_+ de paramètre (α, β) où $\alpha, \beta > 0$, on a

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \quad \Lambda(t) = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \alpha x^{1/\beta}.$$

Donc si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, $T = \alpha(-\log(U))^{1/\beta}$ suit la loi de Weibull de paramètre (α, β) . Dans le cas particulier $\beta = 1$, on retrouve le résultat classique suivant lequel $-\alpha \log(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $1/\alpha$. \diamond

Remarque 10.2.4. Il est facile de voir que cette technique est très proche de la méthode d'inversion de la fonction de répartition présentée dans la proposition C.5. En effet, de l'égalité $\forall t \geq 0, F(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}$, on déduit facilement que F^{-1} et Λ^{-1} , les inverses généralisés respectifs de F et Λ sont reliés par

$$\forall y \in]0, 1[, F^{-1}(y) = \Lambda^{-1}(-\log(1 - y)).$$

Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, comme U a même loi que $1 - U$, on en déduit que $F^{-1}(U) = \Lambda^{-1}(-\log(1 - U))$ a même loi que $\Lambda^{-1}(-\log(U))$. \diamond

10.2.2 Méthode des pannes fictives

On suppose que le taux de défaillance est majoré par $\bar{\lambda} < +\infty$. On se donne deux suites indépendantes $(U_n, n \in \mathbb{N}^*)$ et $(V_n, n \in \mathbb{N}^*)$ de variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = -\log(V_n)/\bar{\lambda}$. Les variables X_n sont alors indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\bar{\lambda}$.

La variable X_n s'interprète comme la durée entre la $(n - 1)$ -ième panne et la n -ième panne si bien que les instants successifs des pannes sont les $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On note $\nu = \inf\{n \geq 1 : U_n \leq \lambda(S_n)/\bar{\lambda}\}$ et $T = S_\nu$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$ et $S_{+\infty} = +\infty$. Les pannes indexées par $n \in \{1, \dots, \nu - 1\}$ ne sont pas prises en compte : ce sont les pannes fictives dont la méthode tire son nom.

Proposition 10.2.5. *Sous l'hypothèse (10.5) les variables aléatoires ν et T sont finies presque sûrement (i.e. $\mathbb{P}(\nu < +\infty) = \mathbb{P}(T < +\infty) = 1$) et le taux de défaillance de la variable T est la fonction $t \rightarrow \lambda(t)$.*

Démonstration. On a, avec la convention $S_0 = 0$,

$$\mathbb{P}(T > t) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n \leq t < S_{n+1}, S_\nu > t) = \sum_{n \geq 0} p_n. \quad (10.6)$$

où $p_n = \mathbb{P}(S_n \leq t < S_{n+1}, \nu \geq n+1)$. En utilisant les définitions des S_k et de ν , on obtient que pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}\left(X_1 + \dots + X_n \leq t < X_1 + \dots + X_{n+1}, \right. \\ &\quad \left. U_1 > \frac{\lambda(X_1)}{\bar{\lambda}}, \dots, U_n > \frac{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}{\bar{\lambda}}\right) \\ &= \int_{x_1 + \dots + x_n \leq t < x_1 + \dots + x_{n+1}} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\lambda(x_1 + \dots + x_k)}{\bar{\lambda}}\right) \\ &\quad \bar{\lambda}^{n+1} \exp(-\bar{\lambda}(x_1 + \dots + x_{n+1})) dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \exp(-\bar{\lambda}t) \int_{x_1 + \dots + x_n \leq t} \prod_{k=1}^n (\bar{\lambda} - \lambda(x_1 + \dots + x_k)) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

par intégration en la variable x_{n+1} sur $]t - x_1 - \dots - x_n, +\infty[$. En effectuant le changement de variables de jacobien 1 : $s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, \dots, s_n = x_1 + \dots + x_n$ puis en utilisant le lemme E.3, on obtient

$$\begin{aligned} p_n &= \exp(-\bar{\lambda}t) \int_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq t} \prod_{k=1}^n (\bar{\lambda} - \lambda(s_k)) ds_1 \dots ds_n \\ &= \exp(-\bar{\lambda}t) \frac{1}{n!} \left(\int_0^t (\bar{\lambda} - \lambda(s)) ds \right)^n. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Avec (10.6), on en déduit que

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\bar{\lambda}t} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\bar{\lambda}t - \int_0^t \lambda(s) ds \right)^n = \exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right).$$

On conclut que T a pour taux de défaillance $\lambda(t)$ comme à la fin de la démonstration du lemme 10.2.1. En outre, d'après (10.5),

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T > t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right) = 0.$$

Et comme par convention $T = +\infty$ lorsque $\nu = +\infty$, on conclut que

$$\mathbb{P}(\nu = +\infty) = 0.$$

□

Exercice 10.2.6. On s'intéresse à l'espérance du nombre de pannes ν que l'on doit générer afin de construire T .

1. Montrer que $\nu = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\nu \geq n\}}$ et en déduire que $\mathbb{E}[\nu] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\nu \geq n)$.
2. En vous inspirant de la démonstration de la proposition 10.2.5, vérifier que pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(\nu \geq n) = \int_0^{+\infty} e^{-\bar{\lambda}t} (\bar{\lambda} - \lambda(t)) \frac{\left(\bar{\lambda}t - \int_0^t \lambda(s)ds\right)^{n-2}}{(n-2)!} dt.$$

$$\text{En déduire que } \mathbb{P}(\nu \geq n) = \bar{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\bar{\lambda}t} \frac{\left(\bar{\lambda}t - \int_0^t \lambda(s)ds\right)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

3. Conclure que

$$\mathbb{E}[\nu] = \bar{\lambda} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right) dt.$$

4. En déduire que $\mathbb{E}[\nu] = \bar{\lambda}\mathbb{E}[T]$. Retrouver ce résultat en remarquant que $T = \sum_{n \geq 1} X_n \mathbf{1}_{\{\nu \geq n\}}$ et que les variables aléatoires X_n et $\mathbf{1}_{\{\nu \geq n\}}$ sont indépendantes.
5. Donner une fonction de taux de défaillance $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \bar{\lambda}]$ telle que $\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt = +\infty$ et $\mathbb{E}[\nu] = +\infty$.
6. Lorsque $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right) dt < +\infty$, comment a-t-on intérêt à choisir $\bar{\lambda}$ pour minimiser les calculs ?

◆

10.3 Étude de stratégies de maintenance

On considère un matériel qui est immédiatement remplacé lors de chaque panne par un matériel identique. Les durées de vie successives $(\tau_i, i \in \mathbb{N}^*)$ sont supposées indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de densité f sur \mathbb{R}_+ et intégrables. On note F la fonction de répartition commune des τ_i et $\bar{F} = 1 - F$. Des remplacements préventifs peuvent être effectués avant les pannes. Chaque remplacement (préventif ou consécutif à une panne) entraîne un coût $c > 0$. On associe également à chaque panne un surcoût $k \times c$ où $k > 0$. L'introduction de ce surcoût se justifie facilement en pratique : par exemple si on s'intéresse à un matériel informatique de stockage de données, à la différence d'un remplacement préventif, une panne peut entraîner des pertes

de données ou bien si le matériel est un composant d'un système plus gros, lors des pannes de ce système, il faut prendre en compte le coût de recherche du composant en cause.

Après avoir étudié les instants de pannes en absence de remplacement préventif, nous nous intéresserons à deux stratégies de maintenance préventive :

- le remplacement suivant l'âge qui consiste à remplacer préventivement tout matériel ayant atteint l'âge $s > 0$ sans avoir connu de panne,
- le remplacement par bloc qui consiste à remplacer le matériel de façon préventive aux instants ls pour $l \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, nous présenterons sous forme de problème un modèle de fiabilité de logiciel où les durées entre pannes ne sont pas identiquement distribuées.

10.3.1 Éléments de renouvellement

Définition 10.3.1. On appelle processus de renouvellement une suite $(\tau_i, i \in \mathbb{N}^*)$ de variables aléatoires positives intégrables d'espérance μ , de fonction de répartition F et vérifiant $\mathbb{P}(\tau_i = 0) < 1$.

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$. La fonction de comptage du processus de renouvellement est définie comme suit : pour $t \geq 0$, $N_t = \max\{n \geq 1, S_n \leq t\}$ (avec la convention $\max \emptyset = 0$). On a aussi $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$.

Dans un contexte de fiabilité, l'hypothèse $\mathbb{P}(\tau_i = 0) < 1$ n'est pas restrictive car comme le cas $\tau_i = 0$ correspond au remplacement par un matériel déjà en panne, il est même naturel de supposer $\mathbb{P}(\tau_i = 0) = 0$. La variable S_n représente l'instant de la n -ième panne et la fonction de comptage N_t le nombre de pannes avant l'instant t .

La loi de la variable N_t est donnée par $\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(\tau_1 > t)$ et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n \leq t) - \mathbb{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1} \leq t). \end{aligned}$$

Exemple 10.3.2. Lorsque les τ_i suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on retrouve le processus de Poisson de paramètre λ introduit dans le paragraphe 8.4 : d'après la proposition 8.4.2, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt . \diamond

Proposition 10.3.3. Presque sûrement, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}$ où μ est l'espérance commune des variables aléatoires τ_i .

Démonstration. La démonstration repose sur la loi forte des grands nombres qui implique que presque sûrement, $S_n/n = (\tau_1 + \dots + \tau_n)/n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mu$. Comme pour $t \geq S_n$, $N_t \geq n$ on a presque sûrement $\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t = +\infty$. Par définition de la fonction de comptage $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$, ce qui implique

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}.$$

La passage à la limite $t \rightarrow +\infty$ dans cet encadrement entraîne que presque sûrement, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t/N_t = \mu$. \square

La remarque suivante sera utile ultérieurement dans l'étude du coût associé à la stratégie de remplacement par bloc.

Remarque 10.3.4. Si les variables τ_i possèdent la densité f , alors pour $n \geq 1$, la variable S_n a une densité et avec la convention $S_0 = 0$ on obtient

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(S_{N_t} = t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N_t = n, S_n = t) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n = t) = 0.$$

\diamond

L'espérance de la fonction de comptage joue un rôle important dans l'étude des processus de renouvellement :

Définition 10.3.5. On appelle fonction de renouvellement la fonction $t \rightarrow M(t) = \mathbb{E}[N_t]$.

Exemple 10.3.6. Lorsque le processus de renouvellement est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt . Donc, comme l'espérance d'une variable de Poisson est égale à son paramètre, $M(t) = \mathbb{E}[N_t] = \lambda t$. \diamond

Proposition 10.3.7. Pour tout $t \geq 0$, $M(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) < +\infty$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

En outre, si les variables τ_i possèdent la densité f , la fonction M est continue et satisfait l'équation de renouvellement

$$\forall t \geq 0, \quad M(t) = \int_0^t (1 + M(t-s))f(s)ds. \quad (10.8)$$

Démonstration. En prenant l'espérance dans l'égalité $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$, on obtient $M(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t)$. Or

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}] \leq \mathbb{E}[e^{t-S_n}] = e^t (\mathbb{E}[e^{-\tau_1}])^n. \quad (10.9)$$

Donc comme $\mathbb{E}[e^{-\tau_1}] < 1$ (τ_1 est une variable positive non identiquement nulle), $M(t) \leq e^t \sum_{n \geq 1} (\mathbb{E}[e^{-\tau_1}])^n < +\infty$.

On a $S_{N_t+1} = \tau_1 + \sum_{k \geq 2} \tau_k \mathbf{1}_{\{N_t \geq k-1\}}$. Pour $k \geq 2$, l'événement $\{N_t \geq k-1\} = \{\tau_1 + \dots + \tau_{k-1} \leq t\}$ est indépendant de τ_k . Avec la linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{N_t+1}] &= \mathbb{E}[\tau_1] + \sum_{k \geq 2} \mathbb{E}[\tau_k] \mathbb{P}(N_t \geq k-1) \\ &= \mathbb{E}[\tau_1] \left(1 + \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq k-1} \mathbb{P}(N_t = n) \right) \\ &= \mathbb{E}[\tau_1] \left(1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(N_t = n) \right) \\ &= \mathbb{E}[\tau_1] (1 + M(t)). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Comme $S_{N_t+1} \geq t$ implique que $\mathbb{E}[S_{N_t+1}] \geq t$, on en déduit que $\frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$ et $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$.

Pour montrer que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$, on introduit N_t^u et $M^u(t)$ la fonction de comptage et la fonction de renouvellement associées aux variables aléatoires $(\min(\tau_i, u), i \geq 1)$ où $u > 0$. On pose également $S_n^u = \sum_{i=1}^n \min(\tau_i, u)$ pour $n \geq 1$. On a $S_{N_t^u+1}^u \leq t+u$, ce qui entraîne $\mathbb{E}[S_{N_t^u+1}^u] \leq t+u$. En écrivant (10.10) pour ce nouveau processus de renouvellement, on obtient

$$\frac{M^u(t)}{t} \leq \frac{1}{\mathbb{E}[\min(\tau_1, u)]} + \frac{u}{t \mathbb{E}[\min(\tau_1, u)]} - \frac{1}{t}.$$

Comme $N_t \leq N_t^u$, on a $M(t) \leq M^u(t)$, ce qui assure que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mathbb{E}[\min(\tau_1, u)]}$. Lorsque u tend vers l'infini, $\mathbb{E}[\min(\tau_1, u)]$ tend vers μ et on conclut que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

Supposons désormais que les variables τ_i possèdent la densité f . Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \leq t) &= \mathbb{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n \leq t) \\ &= \int_{t_1 + \dots + t_n \leq t} f(t_1) \dots f(t_n) dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_0^t f(t_n) \left(\int_{t_1 + \dots + t_{n-1} \leq t-t_n} f(t_1) \dots f(t_{n-1}) dt_1 \dots dt_{n-1} \right) dt_n \\ &= \int_0^t f(s) \mathbb{P}(S_{n-1} \leq t-s) ds. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Donc

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}(\tau_1 \leq t) + \sum_{n \geq 2} \int_0^t f(s) \mathbb{P}(S_{n-1} \leq t-s) ds \\ &= \int_0^t f(s) ds + \int_0^t f(s) \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k \leq t-s) ds = \int_0^t (1 + M(t-s)) f(s) ds. \end{aligned}$$

Enfin pour établir la continuité de M il suffit de remarquer qu'avec (10.11), le théorème de convergence dominée entraîne que $t \rightarrow \mathbb{P}(S_n \leq t)$ est continue. D'après (10.9), pour $t \in [0, t^*]$, $\mathbb{P}(S_n \leq t)$ est majoré par $e^{t^*} (\mathbb{E}[e^{-\tau_1}])^n$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc le théorème de convergence dominée pour les séries implique que $t \rightarrow \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) = M(t)$ est continue sur $[0, t^*]$. Comme t^* est arbitraire, la fonction de renouvellement est continue sur \mathbb{R}_+ . \square

On peut exprimer la transformée de Laplace $\tilde{M}(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} M(t) dt$, $\alpha > 0$ de la fonction de renouvellement en fonction de celle des variables aléatoires τ_i . En effet, lorsque les variables τ_i possèdent la densité f , d'après (10.8),

$$\tilde{M}(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha s} \int_0^t (1+M(t-s)) f(s) ds dt = \left(\frac{1}{\alpha} + \tilde{M}(\alpha) \right) \mathbb{E}[e^{-\alpha \tau_1}],$$

d'où l'on tire $\tilde{M}(\alpha) = \frac{\mathbb{E}[e^{-\alpha \tau_1}]}{\alpha(1 - \mathbb{E}[e^{-\alpha \tau_1}])}$. D'après la proposition 6.12 p. 164

[5], cette formule reste valable même lorsque les τ_i n'ont pas de densité. Mais en général on ne sait pas inverser la transformée de Laplace donnée par cette formule pour expliciter la fonction de renouvellement $M(t)$. Toutefois, dans le cas particulier traité dans l'exercice suivant, le calcul explicite de $M(t)$ est possible (voir également [2] p. 57 pour d'autres exemples plus compliqués).

Exercice 10.3.8. On suppose que les variables τ_i suivent la loi gamma de paramètre $(\lambda, 2)$ (où $\lambda > 0$) de densité $\lambda^2 t \exp(-\lambda t)$ sur \mathbb{R}_+ .

1. En remarquant que la loi gamma de paramètre $(\lambda, 2)$ est la loi de la somme de deux variables exponentielles de paramètre λ indépendantes, vérifier que

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(\tilde{N}_t = 2n) + \mathbb{P}(\tilde{N}_t = 2n + 1)$$

où \tilde{N}_t est un processus de Poisson de paramètre λ .

2. En déduire que

$$M(t) = \frac{\mathbb{E}[\tilde{N}_t]}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\tilde{N}_t = 2n + 1).$$

3. Conclure que

$$M(t) = \frac{\lambda t}{2} + \frac{e^{-2\lambda t}}{4} - \frac{1}{4}. \quad (10.12)$$



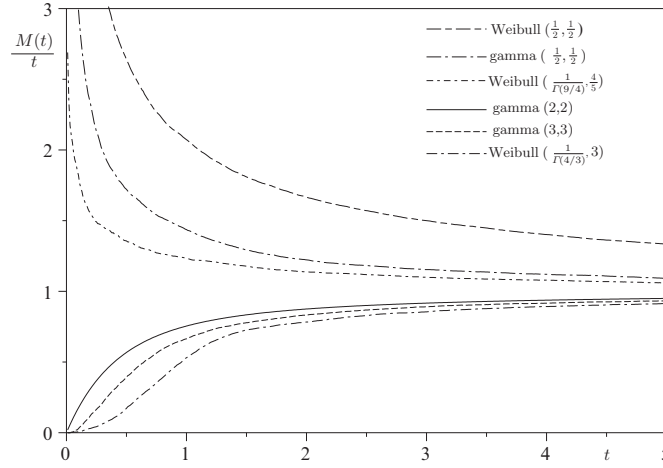


Fig. 10.2. Représentation de $t \rightarrow M(t)/t$ pour diverses lois d'espérance $\mu = 1$

Plutôt que de représenter $t \rightarrow M(t)$ qui est une fonction croissante, nous avons choisi sur la Fig. 10.2 de représenter $t \rightarrow \frac{M(t)}{t}$ pour diverses lois d'espérance $\mu = 1$. Pour la loi gamma de paramètre $(2, 2)$, nous avons tracé en trait plein l'expression analytique $1 + \frac{e^{-4t}-1}{4t}$ de $\frac{M(t)}{t}$ déduite de (10.12). Pour chacune des autres lois, nous avons tracé $t \rightarrow \frac{1}{tJ} \sum_{j=1}^J \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tau_1^j + \dots + \tau_n^j \leq t\}}$ pour $J = 10\,000$ réalisations indépendantes $(\tau_i^j, i \geq 1), 1 \leq j \leq J$ du processus de renouvellement correspondant à cette loi. Les différentes courbes illustrent bien le résultat de convergence $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ énoncé dans la proposition 10.3.7. Au vu de la figure, il peut sembler que la fonction $\frac{M(t)}{t}$ est croissante dans le cas IFR et décroissante dans le cas DFR. Mais on sait seulement démontrer que la fonction de renouvellement est sous-linéaire dans le cas IFR au sens où $\forall r, s \geq 0, M(r+s) \leq M(r) + M(s)$ (voir le théorème 2.3 p. 52 dans [2]). Cette propriété est plus faible que la décroissance de $\frac{M(t)}{t}$ qui assure que $M(r+s) \leq (r+s) \min\left(\frac{M(r)}{r}, \frac{M(s)}{s}\right)$. Dans le cas DFR, on a $\forall r, s \geq 0, M(r+s) \geq M(r) + M(s)$.

10.3.2 Remplacement suivant l'âge

Dans cette stratégie, le matériel est remplacé de manière préventive dès qu'il atteint l'âge $s > 0$ sans avoir connu de panne. Ainsi la i -ième durée de fonctionnement devient $\min(\tau_i, s)$. Soit R_t^A le nombre total de remplacements effectués sur l'intervalle de temps $[0, t]$. Notons que R_t^A est la fonction de comptage du processus de renouvellement $(\min(\tau_i, s), i \in \mathbb{N}^*)$. Le coût Z_i supporté lors du i -ième cycle est égal au coût c auquel s'ajoute le surcoût kc si le i -ième remplacement est consécutif à une panne i.e. si $\tau_i \leq s$. Ainsi

$Z_i = c(1 + k\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq s\}})$. On souhaite trouver l'âge s qui minimise le coût sur un horizon infini. C'est pourquoi on s'intéresse au comportement asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$ du coût par unité de temps sur $[0, t]$:

$$C_t^A = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{R_t^A} Z_i.$$

Proposition 10.3.9. *Pour tout $s \in]0, +\infty]$ (le cas $s = +\infty$ correspondant à l'absence de remplacement préventif), presque sûrement,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C_t^A = \frac{\mathbb{E}[Z_1]}{\mathbb{E}[\min(\tau_1, s)]} = c \times \gamma_A(s, k) \quad \text{où} \quad \boxed{\gamma_A(s, k) = \frac{1 + kF(s)}{\int_0^s \bar{F}(t) dt}}.$$

Démonstration. Les variables $Z_i = c + k\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq s\}}$ sont indépendantes, identiquement distribuées et intégrables. Par la loi forte des grands nombres on en déduit que presque sûrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \mathbb{E}[Z_1]$. On a

$$C_t^A = \frac{R_t^A}{t} \times \frac{1}{R_t^A} \sum_{i=1}^{R_t^A} Z_i.$$

D'après la proposition 10.3.3, p.s., $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_t^A/t = 1/\mathbb{E}[\min(\tau_1, s)]$ ce qui implique en particulier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_t^A = +\infty$. D'où p.s., $\lim_{t \rightarrow +\infty} C_t^A = \mathbb{E}[Z_1]/\mathbb{E}[\min(\tau_1, s)]$.

On conclut en remarquant que $\mathbb{E}[Z_1] = c(1 + k\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq s\}}]) = c(1 + kF(s))$ et que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\min(\tau_1, s)] &= \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\min(\tau_1, s) > t\}} dt \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{s > t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} dt \right] \\ &= \int_0^s \bar{F}(t) dt. \end{aligned}$$

□

Pour $k > 0$ fixé, la fonction $s \rightarrow \gamma_A(s, k)$ est continue sur $]0, +\infty]$. Comme $\lim_{s \rightarrow 0+} \gamma_A(s, k) = +\infty$, on en déduit l'existence d'un âge de remplacement $s_A(k) \in]0, +\infty]$ optimal au sens où

$$\gamma_A(s_A(k), k) = \inf_{s \in]0, +\infty]} \gamma_A(s, k).$$

Lorsque $s_A(k) = \infty$, il est optimal de se contenter de remplacer le matériel lors des pannes.

Exemple 10.3.10. Lorsque les variables τ_i suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$ et

$$\forall s \in]0, +\infty[, \gamma_A(s, k) = \lambda \left(\frac{1}{1 - e^{-\lambda s}} + k \right) > \lambda(1 + k) = \gamma_A(+\infty, k),$$

si bien que quel que soit le facteur multiplicatif $k > 0$, $s_A(k) = +\infty$. Ainsi, il est optimal de se contenter de remplacer le matériel lors des pannes. \diamond

Remarque 10.3.11. Si on ne connaît pas explicitement la loi des τ_i , une stratégie possible est la stratégie minimax qui consiste à choisir la valeur de l'âge de remplacement qui minimise le maximum du coût sur toutes les lois possibles. Supposons par exemple que l'on connaît seulement $\mathbb{E}[\tau_1] = \mu$. Pour toutes les lois d'espérance μ , on a $\gamma_A(+\infty, k) = (1 + k)/\mu$. Cette valeur est inférieure pour tout $s \in]0, +\infty[$ à la valeur $\gamma_A(s, k)$ associée à la loi exponentielle de paramètre $1/\mu$ et donc au maximum du coût sur toutes les lois d'espérance μ . Ainsi la stratégie minimax consiste alors à ne pas effectuer de remplacement préventif. \diamond

Il est naturel qu'il soit optimal de ne pas effectuer de remplacement préventif lorsque les τ_i suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ car cette loi est « sans vieillissement » ce qui se traduit mathématiquement par la constance de son taux de défaillance. En revanche, si la durée de vie est IFR (non constante) le matériel vieillit et le remplacer préventivement peut devenir intéressant au moins lorsque le facteur multiplicatif k est suffisamment grand. En effet, plus k est grand plus le surcoût $k \times c$ associé aux pannes est grand.

Proposition 10.3.12. Si la durée de vie du matériel est IFR, alors pour tout $k > 0$, $s_A(k) = \inf \{s \in \mathbb{R}_+, \lambda(s) \int_0^s \bar{F}(t) dt - F(s) \geq 1/k\}$ (convention $\inf \emptyset = +\infty$) est un âge de remplacement préventif optimal.

En outre, $s_A(k)$ est une fonction décroissante telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_A(k) = 0$. Elle est infinie ou finie suivant que $k < 1/(\mathbb{E}[\tau_1] \lim_{s \rightarrow +\infty} \lambda(s) - 1)$ ou $k > 1/(\mathbb{E}[\tau_1] \lim_{s \rightarrow +\infty} \lambda(s) - 1)$.

Exemple 10.3.13.

- Pour la loi de Weibull sur \mathbb{R}_+ de paramètre (α, β) avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$, le taux de défaillance $\lambda(s) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\beta-1}$ est croissant et vérifie $\lim_{s \rightarrow +\infty} \lambda(s) = +\infty$ si bien que $s_A(k) < +\infty$ pour tout $k > 0$.
- La loi gamma de paramètre (λ, α) (voir l'exercice 10.1.11) a pour espérance α/λ et la limite à l'infini de son taux de défaillance est λ . Lorsque $\alpha > 1$, son taux de défaillance est strictement croissant. La proposition 10.3.12 assure donc que l'âge de remplacement optimal $s_A(k)$ est fini si et seulement si $1/(\alpha - 1) < k$. La figure 10.3 représente $s \rightarrow \gamma_A(s, 6)$ pour $\alpha = 2, \lambda = 1$. Comme $1/(2-1) = 1 < 6$, $s_A(6) < +\infty$.

\diamond

Démonstration. Si on suppose que la densité commune f des τ_i est continue, la fonction $s \rightarrow \gamma_A(s, k)$ est dérivable et pour $s > 0$,

$$\gamma_A(s, k) = \gamma_A(1, k) + \int_1^s \left[\frac{kf(r)}{\int_0^r \bar{F}(t)dt} - \frac{\bar{F}(r)(1 + kF(r))}{(\int_0^r \bar{F}(t)dt)^2} \right] dr.$$

Cette formule reste vraie lorsque f n'est pas nécessairement continue; on la retrouve en remarquant que pour la fonction continûment dérivable $g(r) = 1/\int_0^r \bar{F}(t)dt - 1/\int_0^1 \bar{F}(t)dt$,

$$\begin{aligned} \int_1^s f(r)g(r)dr &= \int_1^s f(r) \int_1^r g'(u)dudr = \int_1^s g'(u)(F(s) - F(u))du \\ &= F(s)g(s) - \int_1^s g'(r)F(r)dr + \frac{g(s)}{k} - \frac{1}{k} \int_1^s g'(r)dr \end{aligned}$$

et en multipliant les deux membres extrêmes de cette égalité par k . En introduisant $h(r) = \lambda(r) \int_0^r \bar{F}(t)dt - F(r)$, on a donc pour $s > 0$,

$$\gamma_A(s, k) = \gamma_A(1, k) + \int_1^s \frac{k\bar{F}(r)}{(\int_0^r \bar{F}(t)dt)^2} \left(h(r) - \frac{1}{k} \right) dr. \quad (10.13)$$

La croissance du taux de défaillance λ entraîne que pour $r < s$,

$$\lambda(s) \int_0^s \bar{F}(t)dt - \lambda(r) \int_0^r \bar{F}(t)dt \geq \int_r^s \lambda(t)\bar{F}(t)dt = F(s) - F(r).$$

Ainsi la fonction h est croissante. Comme $s_A(k) = \inf\{r > 0, h(r) \geq 1/k\}$, l'équation (10.13) assure que l'âge de remplacement $s_A(k)$ est optimal. La fonction h est nulle en 0 et vérifie $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = \mathbb{E}[\tau_1] \lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda(r) - 1 \geq h(0) = 0$. On en déduit que $s_A(k)$ décroît avec k , tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ et vaut $+\infty$ ou est fini suivant que $k < 1/(\mathbb{E}[\tau_1] \lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda(r) - 1)$ ou $k > 1/(\mathbb{E}[\tau_1] \lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda(r) - 1)$. \square

En suivant une stratégie de remplacement suivant l'âge, on ne peut prévoir que la date du prochain remplacement préventif. Si on souhaite planifier les dates de tous les remplacements préventifs à l'avance, il faut se tourner vers la stratégie de remplacement par bloc.

10.3.3 Remplacement préventif par bloc

C'est la stratégie qui consiste à remplacer le matériel aux dates ls pour $l = 1, 2, \dots$ et lors des pannes. Ainsi les dates des remplacements préventifs sont connues à l'avance. La terminologie remplacement par bloc provient de ce qu'en pratique cette stratégie est employée pour remplacer simultanément des ensembles (« blocks » en anglais) de composants (ex : les lampes d'éclairage public dans une rue). Soit N_t^B le nombre de pannes sur $[0, t]$ lorsque l'on suit la

stratégie de remplacement par bloc de période $s > 0$. Pour $l \geq 1$, les variables $N_{ls}^B - N_{(l-1)s}^B$ sont indépendantes et ont même loi que la fonction de comptage N_s du processus de renouvellement $(\tau_i, i \in \mathbb{N}^*)$. D'après la remarque 10.3.4, avec probabilité 1, il n'y a pas de panne aux instants ls , $l \geq 1$ si bien que le coût par unité de temps sur l'intervalle $[0, t]$ est :

$$C_t^B = c \times \frac{(1+k)N_t^B + [t/s]}{t},$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x . À nouveau, on s'intéresse au comportement asymptotique de ce coût pour $t \rightarrow +\infty$.

Proposition 10.3.14. *Pour tout $s \in]0, +\infty[$, presque sûrement,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C_t^B = c \times \gamma_B(s, k) \quad \text{où} \quad \gamma_B(s, k) = \frac{(1+k)M(s) + 1}{s},$$

et $M(s) = \mathbb{E}[N_s]$ est la fonction de renouvellement associée au processus $(\tau_i, i \in \mathbb{N}^*)$.

Démonstration. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} [t/s]/t = \lim_{t \rightarrow +\infty} ([t/s] + 1)/t = 1/s$. En outre, l'inégalité $N_{[t/s]s}^B \leq N_t^B \leq N_{[t/s]s+s}^B$ entraîne

$$\frac{[t/s]}{t} \times \frac{1}{[t/s]} \sum_{l=1}^{[t/s]} (N_{ls}^B - N_{(l-1)s}^B) \leq \frac{N_t^B}{t} \leq \frac{[t/s] + 1}{t} \times \frac{1}{[t/s] + 1} \sum_{l=1}^{[t/s] + 1} (N_{ls}^B - N_{(l-1)s}^B).$$

Comme par la loi forte des grands nombres, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (N_{ls}^B - N_{(l-1)s}^B) = M(s),$$

on obtient que presque sûrement, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t^B/t = M(s)/s$ et on conclut facilement. \square

Comme d'après la proposition 10.3.7, la fonction de renouvellement $M(s)$ est continue, la fonction $s \rightarrow \gamma_B(s, k)$ est continue sur $]0, +\infty[$. La limite presque sûre du coût par unité de temps en absence de remplacement préventif est, d'après le paragraphe consacré au remplacement suivant l'âge, $c\gamma_A(+\infty, k)$. On pose donc $\gamma_B(+\infty, k) = \gamma_A(+\infty, k) = \frac{1+k}{\mathbb{E}[\tau_1]}$. Comme $\lim_{s \rightarrow +\infty} M(s)/s = 1/\mathbb{E}[\tau_1]$ d'après la proposition 10.3.7, la fonction $s \rightarrow \gamma_B(s, k)$ est continue sur $]0, +\infty]$. Or $\lim_{s \rightarrow 0+} \gamma_B(s, k) = +\infty$. D'où l'existence d'une période de remplacement $s_B(k) \in]0, +\infty]$ optimale au sens où

$$\gamma_B(s_B(k), k) = \inf_{s \in]0, +\infty]} \gamma_B(s, k).$$

Lorsque $s_B(k) = +\infty$, il est optimal de se contenter de remplacer le matériel lors des pannes.

En général, à la différence de l'exemple qui suit, la fonction de renouvellement n'est pas connue de façon explicite et il faut utiliser des méthodes numériques pour déterminer $s_B(k)$.

Exemple 10.3.15. Si les τ_i sont des variables exponentielles de paramètre $\lambda > 0$, $M(s) = \lambda s$ et

$$\forall s \in]0, +\infty[, \gamma_B(s, k) = (1+k)\lambda + \frac{1}{s} > (1+k)\lambda = \gamma_B(+\infty, k),$$

si bien que $s_B(k) = +\infty$ pour tout $k > 0$.

En outre, en raisonnant comme dans la remarque 10.3.11, on vérifie que dans le cas où on ne connaît la loi des τ_i qu'au travers de son espérance $\mathbb{E}[\tau_1]$, la stratégie minimax optimale consiste à ne pas effectuer de remplacement préventif. \diamond

Dans la stratégie de remplacement par bloc de période s , les matériels remplacés préventivement aux instants ls , $l \in \mathbb{N}^*$ ont fonctionné sans panne pendant des durées aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $[0, s]$. Intuitivement, du fait de ce caractère aléatoire, on peut penser que quel que soit s , le coût associé à cette stratégie est plus élevé que le coût associé à la stratégie de remplacement suivant l'âge optimal. L'objet de l'exercice suivant est de vérifier ce résultat lorsque les τ_i suivent la loi gamma de paramètre $(\lambda, 2)$; la Fig. 10.3 l'illustre dans le cas où $\lambda = 1$ et $k = 6$.

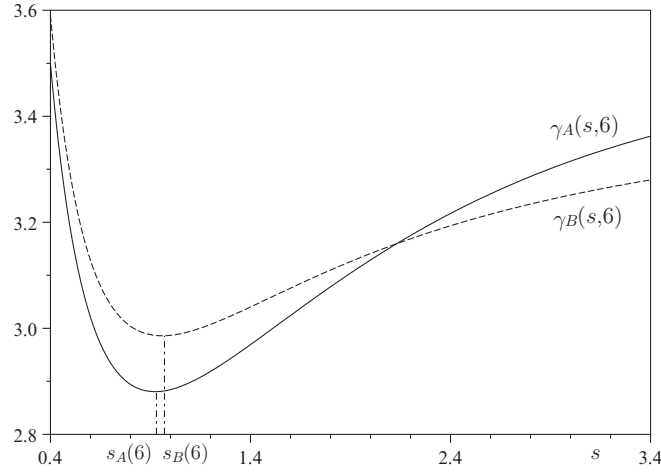


Fig. 10.3. Comparaison de $s \rightarrow \gamma_A(s, k)$ et de $s \rightarrow \gamma_B(s, k)$ lorsque $k = 6$ et que les durées de vie τ_i suivent la loi gamma de paramètre $(1, 2)$

Exercice 10.3.16. On suppose que les τ_i suivent la loi gamma de paramètre $(\lambda, 2)$ (densité $f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$) et on rappelle que d'après (10.12), $M(s) = \frac{\lambda s}{2} + \frac{e^{-2\lambda s}}{4} - \frac{1}{4}$.

1. Vérifier que $\frac{\partial \gamma_B}{\partial s}(s, k)$ a même signe que $1 - \frac{4}{1+k} - g(s)$ où $g(s) = (1 + 2\lambda s)e^{-2\lambda s}$.
2. Vérifier que g est une fonction continue strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $g(0) = 1$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$. On note $g^{-1} :]0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ son inverse.
3. Vérifier que si $k \leq 3$, $s_B(k) = +\infty$ et en déduire que $\gamma_A(s_A(k), k) \leq \gamma_A(s_B(k), k)$.
4. Montrer que si $k > 3$, $s_B(k) = g^{-1}\left(\frac{k-3}{1+k}\right)$. Vérifier que sur l'intervalle $]3, +\infty[$, la fonction s_B est continue et décroît strictement de $+\infty$ à 0. Déterminer sa fonction inverse $k_B(s)$.
5. Vérifier que pour $t > 0$, $\bar{F}(t) = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$ puis que pour $s > 0$,

$$\int_0^s \bar{F}(t) dt = \frac{1}{\lambda} (2 - (2 + \lambda s)e^{-\lambda s}). \quad (10.14)$$

En déduire que

$$[\gamma_B(s, k_B(s)) - \gamma_A(s, k_B(s))] \times e^{2\lambda s} (1 - g(s)) \int_0^s \bar{F}(t) dt = h(\lambda s),$$

où $h(x) = (x - 1)e^x - 4 + (5 + 5x + 2x^2)e^{-x}$.

6. En calculant $e^x h'(x)/x$, vérifier que la fonction h est croissante sur $]0, +\infty[$ puis qu'elle est positive sur cet intervalle. En déduire que $\forall s > 0$, $\gamma_A(s, k_B(s)) \leq \gamma_B(s, k_B(s))$
7. Conclure que pour tout $k > 0$, $\gamma_A(s_A(k), k) \leq \gamma_B(s_B(k), k)$.



10.3.4 Comparaisons entre les remplacements suivant l'âge et par bloc

Afin d'effectuer des comparaisons, pour $s > 0$ fixé, on note

- N_t , N_t^A et N_t^B les nombres de pannes jusqu'à l'instant t respectivement sans remplacement préventif, sous la stratégie de remplacement suivant l'âge s et sous la stratégie de remplacement par bloc de période s ,
- r_t^A et r_t^B les nombres de remplacements préventifs effectués avant t respectivement sous la stratégie suivant l'âge et sous la stratégie de remplacement par bloc,
- $R_t^A = N_t^A + r_t^A$ et $R_t^B = N_t^B + r_t^B$ les nombres totaux de remplacements effectués avant t respectivement sous la stratégie suivant l'âge et sous la stratégie de remplacement par bloc.

Pour comparer des variables aléatoires qui ne sont pas forcément définies sur le même espace de probabilité, on utilise la notion d'ordre stochastique introduite dans la définition 10.1.17. Le prochain théorème énonce rigoureusement l'idée naturelle suivante : sous des hypothèses de vieillissement du matériel (New Better than Used ou Increasing Failure Rate), le nombre de pannes est moins important dans le cas de remplacements préventifs qu'en l'absence de maintenance.

Théorème 10.3.17. *Pour tout $s > 0$, on a les comparaisons suivantes entre la stratégie de remplacement suivant l'âge s , la stratégie de remplacement par bloc de période s et la stratégie qui consiste à ne pas faire de remplacement préventif :*

1. $\forall t \geq 0, r_t^B = [t/s]$ et $\mathbb{P}(r_t^A \leq r_t^B) = 1$.
2. $\forall t \geq 0, \mathbb{P}(N_t \leq R_t^A \leq R_t^B) = 1$. En particulier, le nombre total de remplacements augmente lorsqu'on applique une stratégie de maintenance préventive.
3. Si la durée de vie du matériel est NBU, alors $\forall t \geq 0, N_t^A \prec_{st} N_t$ et $N_t^B \prec_{st} N_t$.
4. Si la durée de vie du matériel est IFR, alors $\forall t \geq 0, N_t^B \prec_{st} N_t^A \prec_{st} N_t$.
5. Si la durée de vie du matériel est DFR, alors $\forall t \geq 0, N_t \prec_{st} N_t^A \prec_{st} N_t^B$.

Démonstration. 1. Il suffit de remarquer que le nombre de remplacements préventifs sur $[0, t]$ en suivant la stratégie par bloc est $r_t^B = [t/s]$ tandis que dans la stratégie de remplacement suivant l'âge, comme la durée entre deux remplacements préventifs successifs est au moins s , il y en a au plus $[t/s]$ sur l'intervalle $[0, t]$.

2. Soit $(\tau_i, i \in \mathbb{N}^*)$ des variables indépendantes de densité commune f qui représentent les durées de vie successives du matériel. On note S_n (resp. S_n^A et S_n^B) l'instant du n -ième remplacement sans maintenance préventive (resp. avec maintenance préventive suivant l'âge ou par bloc). Si on pose $S_0 = S_0^A = S_0^B = 0$, on a les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, S_n &= S_{n-1} + \tau_n, \quad S_n^A = S_{n-1}^A + \min(\tau_n, s) \\ \text{et } S_n^B &= \min(S_{n-1}^B + \tau_n, ([S_{n-1}^B/s] + 1)s). \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(S_n \geq S_n^A \geq S_n^B) = 1$ et donc que $\mathbb{P}(\forall n \geq 1, S_n \geq S_n^A \geq S_n^B) = 1$. Les nombres de remplacements avant t étant obtenus comme des fonctions de comptage i.e.

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}, \quad R_t^A = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n^A \leq t\}}, \quad R_t^B = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n^B \leq t\}},$$

on conclut que $\mathbb{P}(N_t \leq R_t^A \leq R_t^B) = 1$.

3. Pour $i \geq 1$, soit T_i^A la durée entre la $(i-1)$ -ième panne et la i -ième panne lorsque le matériel est remplacé préventivement dès qu'il atteint l'âge

$s > 0$. Par convention, T_1^A est l'instant de la première panne. Les variables $(T_i^A, i \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes et identiquement distribuées. On note \bar{F}^A la fiabilité associée. On a pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\bar{F}^A(t) &= \mathbb{P}(T_1^A > t) = \mathbb{P}(\tau_1 > s, \dots, \tau_{[t/s]} > s, \tau_{[t/s]+1} > t - [t/s]s) \\ &= \bar{F}(s)^{[t/s]} \bar{F}(t - [t/s]s).\end{aligned}$$

Si la durée de vie est NBU, en utilisant (10.3), on obtient par récurrence que $\forall n \geq 0$, $\bar{F}(ns) \leq \bar{F}(s)^n$. On en déduit que $\bar{F}(t) \leq \bar{F}([t/s]s) \bar{F}(t - [t/s]s) \leq \bar{F}^A(t)$, à nouveau par la propriété NBU. Ainsi $\tau_1 \prec_{st} T_1^A$.

Notons F^{-1} et F_A^{-1} les inverses généralisés (voir définition C.4) des fonctions de répartition $1 - \bar{F}(t)$ et $1 - \bar{F}^A(t)$ et posons $\tilde{\tau}_i = F^{-1}(U_i)$ et $\tilde{T}_i^A = F_A^{-1}(U_i)$ où $(U_i, i \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. D'après la proposition C.5, les variables aléatoires $(\tilde{\tau}_i, i \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes et de même loi que τ_1 et les variables aléatoires $(\tilde{T}_i^A, i \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes et de même loi que T_1^A . En outre, par un raisonnement analogue à celui effectué dans la démonstration de la proposition 10.1.18, $\mathbb{P}(\forall i \geq 1, \tilde{\tau}_i \leq \tilde{T}_i^A) = 1$. On en déduit que pour tout $t \geq 0$, les fonctions de comptage $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_n \leq t\}}$ et $\tilde{N}_t^A = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_1^A + \dots + \tilde{T}_n^A \leq t\}}$ vérifient $\mathbb{P}(\tilde{N}_t^A \leq N_t) = 1$. Comme elles ont respectivement même loi que N_t et N_t^A , on conclut que $N_t^A \prec_{st} N_t$.

Pour traiter le cas du remplacement par bloc de période s , on remarque que si on note $(T_i^B, i \geq 1)$ les durées entre les pannes successives, par comparaison avec le remplacement suivant l'âge, on a $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(T_1^B > t) = \bar{F}^A(t)$ et on pose $\bar{F}_0^B(t) = \bar{F}^A(t)$. En revanche, rien n'assure que les variables T_i^B soient indépendantes et identiquement distribuées : si une panne a lieu à l'instant u ($\neq ls, \forall l \geq 1$), les dates des remplacements préventifs successifs étant données par ls pour $l \geq ([u/s] + 1)$, la probabilité pour que la panne suivante ait lieu après une durée strictement supérieure à t est, si on note $v = ([u/s] + 1)s - u$ la durée à courir jusqu'au prochain remplacement préventif,

$$\bar{F}_v^B(t) = \begin{cases} \bar{F}(t) & \text{si } t \leq v \\ \bar{F}(v) \bar{F}(s)^{[(t-v)/s]} \bar{F}(t - v - [(t-v)/s]s) & \text{sinon} \end{cases}$$

(dans le cas $u = ls$ la probabilité est $\bar{F}_0^B(t)$). La propriété NBU entraîne que $\forall v \in [0, s[$, $\forall t \geq 0$, $\bar{F}_v^B(t) \geq \bar{F}(t)$. On conclut par une construction qui repose sur les mêmes idées mais qui est un peu plus compliquée que celle effectuée pour le remplacement suivant l'âge : si pour $v \in [0, s[$, $F_{B,v}^{-1}$ désigne l'inverse généralisé de la fonction de répartition $1 - \bar{F}_v^B$, on pose $\tilde{T}_1^B = F_{B,0}^{-1}(U_1)$ et pour $i \geq 2$, $\tilde{T}_i^B = F_{B,V_{i-1}}^{-1}(U_i)$ où

$$V_{i-1} = ([(\tilde{T}_1^B + \dots + \tilde{T}_{i-1}^B)/s] + 1)s - \tilde{T}_1^B - \dots - \tilde{T}_{i-1}^B.$$

La suite (\tilde{T}_i^B) a même loi que la suite (T_i^B) et vérifie $\mathbb{P}(\forall i \geq 1, \tilde{T}_i^B \geq \tilde{\tau}_i) = 1$. Donc les fonctions de comptage $\tilde{N}_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_n \leq t\}}$ et

$\tilde{N}_t^B = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_1^B + \dots + \tilde{T}_n^B \leq t\}}$ qui ont respectivement même loi que N_t et N_t^B vérifient $\mathbb{P}(\tilde{N}_t^B \leq \tilde{N}_t) = 1$. Ainsi $N_t^B \prec_{st} N_t$.

4. Comme toute loi IFR est NBU (voir proposition 10.1.15), la seule propriété à montrer est $N_t^B \prec_{st} N_t^A$. D'après ce qui précède, il suffit pour cela de montrer que

$$\forall v \in [0, s[, \forall t \geq 0, \bar{F}_v^B(t) \geq \bar{F}^A(t).$$

Soit donc $v \in [0, s[$ et $t \geq 0$. Nous distinguons trois cas

Cas 1 : $t \leq v$.

$$\text{Alors } \bar{F}_v^B(t) = \bar{F}(t) = \bar{F}^A(t).$$

Cas 2 : $t \geq v$ et $[(t-v)/s] = [t/s]$.

Alors $v + (t-v - [(t-v)/s]s) = t - [t/s]s$, et d'après la propriété NBU,

$$\bar{F}(v)\bar{F}(t-v - [(t-v)/s]s) \geq \bar{F}(t - [t/s]s).$$

En multipliant cette inégalité par $\bar{F}(s)^{[(t-v)/s]} = \bar{F}(s)^{[t/s]}$ et en utilisant les définitions de \bar{F}_v^B et \bar{F}^A , on obtient l'inégalité souhaitée.

Cas 3 : $t \geq v$ et $[(t-v)/s] = [t/s] - 1$.

Alors $v + (t-v - [(t-v)/s]s) = s + (t - [t/s]s)$ et le plus grand des quatre termes dans cette égalité est s . Par la proposition 10.1.15, on en déduit que

$$\bar{F}(v)\bar{F}(t-v - [(t-v)/s]s) \geq \bar{F}(s)\bar{F}(t - [t/s]s);$$

on conclut en multipliant cette inégalité par $\bar{F}(s)^{[(t-v)/s]} = \bar{F}(s)^{[t/s]-1}$.

5. Il suffit de remarquer que dans le cas DFR, on peut échanger le sens de toutes les inégalités portant sur \bar{F} , \bar{F}^A et \bar{F}^B écrites dans la démonstration des points 3 et 4. \square

Remarque 10.3.18. D'après les démonstrations des propositions 10.3.9 et 10.3.14, presque sûrement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} (R_t^A, R_t^B, N_t^A, N_t^B) = \left(\frac{1}{\int_0^s \bar{F}(t)dt}, \frac{1+M(s)}{s}, \frac{F(s)}{\int_0^s \bar{F}(t)dt}, \frac{M(s)}{s} \right).$$

- Le point 2 du théorème précédent implique que $\frac{1}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} \leq \frac{1+M(s)}{s}$. Si $\bar{F}(s) < 1$, cette inégalité est même stricte. En effet, $R_s^B = N_s^B + 1 = N_s^A + 1$ et $\sum_{i=1}^{R_s^B} \min(\tau_i, s) \geq s$. Comme $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{R_s^B} \min(\tau_i, s) = s) = \mathbb{P}(\tau_1 \geq s) + \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(\tau_1 + \dots + \tau_k = s) = \bar{F}(s) + 0$, dans le cas où $\bar{F}(s) < 1$, on en déduit que $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{R_s^B} \min(\tau_i, s)] > s$. Les variables aléatoires $\left(\sum_{i=R_{ls}^B+1}^{R_{(l+1)s}^B} \min(\tau_i, s), l \geq 0 \right)$ sont indépendantes et identiquement distribuées et la loi forte des grands nombres assure que lorsque $l \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{l} \sum_{i=1}^{R_{ls}^B} \min(\tau_i, s) = \frac{R_{ls}^B}{l} \times \frac{1}{R_{ls}^B} \sum_{i=1}^{R_{ls}^B} \min(\tau_i, s)$ converge presque sûrement d'une part vers $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{R_s^B} \min(\tau_i, s)] > s$ et d'autre part vers $(1+M(s)) \times \int_0^s \bar{F}(t)dt$.

- Le point 4 du théorème précédent entraîne que dans le cas IFR, $\frac{F(s)}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} \geq \frac{M(s)}{s}$ mais il semble difficile de trouver une condition simple qui assure que cette inégalité est stricte. Si on suppose qu'elle l'est et que $\bar{F}(s) < 1$, comme

$$\gamma_A(s, k) = \frac{1}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} + \frac{kF(s)}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} \text{ et } \gamma_B(s, k) = \frac{1 + M(s)}{s} + \frac{kM(s)}{s},$$

on obtient que $\gamma_A(s, k)$ est inférieur ou supérieur à $\gamma_B(s, k)$ suivant que k est inférieur ou supérieur à $\kappa(s) = \frac{(1+M(s)) \int_0^s \bar{F}(t)dt - s}{sF(s) - M(s) \int_0^s \bar{F}(t)dt}$. Intuitivement cela traduit l'idée suivante : comme dans la stratégie par bloc, il y a plus de remplacements préventifs et moins de pannes que dans la stratégie suivant l'âge, il faut que le surcoût lié aux pannes représenté par le facteur multiplicatif k soit assez important pour la stratégie par bloc soit préférable à la stratégie suivant l'âge.

L'exercice 10.3.19 ci-dessous a pour objet de démontrer que l'inégalité $\frac{F(s)}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} \geq \frac{M(s)}{s}$ est stricte dans le cas de la loi gamma de paramètre $(\lambda, 2)$. Notons que dans le cas de la loi gamma de paramètre $(1, 2)$, d'après la Fig. 10.3, les courbes $s \rightarrow \gamma_A(s, 6)$ et $s \rightarrow \gamma_B(s, 6)$ se croisent pour s de l'ordre de 2.13 et que l'on peut vérifier que $\kappa(2.13) = 6.0015$.

◇

Exercice 10.3.19. On suppose que les variables aléatoires τ_i suivent la loi gamma de paramètre $(\lambda, 2)$.

1. En utilisant (10.14), vérifier que $\frac{F(s)}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2 s e^{-\lambda s}}{2(2 - (2 + \lambda s)e^{-\lambda s})}$.
2. En déduire que $\frac{F(s)}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} - \frac{M(s)}{s} = \frac{e^{-2\lambda s} g(\lambda s)}{2s(2 - (2 + \lambda s)e^{-\lambda s})}$ où

$$g(x) = e^{2x} - 1 - x^2 e^x - (2 + x) \sinh(x).$$
3. Vérifier que le développement en série entière de g s'écrit

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{avec} \quad a_n = \begin{cases} 2^n - n(n-1) - 2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^n - n^2 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Conclure que $\forall s > 0, \frac{F(s)}{\int_0^s \bar{F}(t)dt} > \frac{M(s)}{s}$.

◆

10.3.5 Durées entre pannes non identiquement distribuées

Dans le paragraphe qui précède, nous avons supposé les durées de vie successives indépendantes et identiquement distribuées. Mais le choix de durées de

vie indépendantes mais non identiquement distribuées est parfois plus naturel du point de vue de la modélisation. Le problème suivant est consacré à un tel modèle introduit par Moranda [9] dans le cadre de la fiabilité des logiciels. Pour une présentation détaillée des modèles de fiabilité des logiciels, on pourra se référer à [12].

Problème 10.3.20. Les dates successives où sont découvertes les erreurs d'un logiciel sont décrites de la manière suivante : la durée τ_n entre la découverte de la $(n-1)$ -ième erreur et celle de la n -ième erreur suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda\beta^{n-1}$. Les variables $(\tau_n, n \geq 1)$ sont supposées indépendantes. Les paramètres λ et β sont strictement positifs avec $\beta < 1$ ce qui traduit l'hypothèse que les durées entre les erreurs sont croissantes (au sens de l'ordre stochastique). Cette hypothèse semble raisonnable même s'il arrive qu'en corrigeant une erreur, on en introduise une nouvelle. Pour $t \geq 0$, on note N_t le nombre d'erreurs découvertes à l'instant t et $M(t) = \mathbb{E}[N_t]$. L'objectif de ce problème est d'étudier la durée de test T optimale du logiciel dans les deux cas suivants :

- la durée de service du logiciel est $t_1 > 0$ i.e. le logiciel fonctionnera sur l'intervalle temporel $[T, T + t_1]$.
- la date de fin de service du logiciel est $t_2 > 0$ i.e. il fonctionnera sur $[T, t_2]$ si $T < t_2$.

On affecte

- un coût $a > 0$ à la correction d'une erreur pendant la phase de test.
- un coût b à la correction d'une erreur pendant la phase opérationnelle : pour tenir compte du déficit d'image causé auprès des utilisateurs, il faut supposer b grand devant a .
- un coût $c > 0$ par unité de temps de test : ce coût tient compte à la fois du coût interne des tests et des opportunités de ventes perdues du fait que le logiciel n'est pas encore sur le marché.

On souhaite trouver la durée T qui minimise l'espérance du coût total :

$$C_1(T) = aM(T) + b(M(T + t_1) - M(T)) + cT \quad \text{dans le premier cas,}$$

$$C_2(T) = aM(T) + b(M(t_2) - M(T))^+ + cT \quad \text{dans le second.}$$

1. a) Montrer, en vous inspirant de la proposition 10.3.7 que

$$\forall T \geq 0, M(T) < +\infty$$

et que la fonction $T \rightarrow M(T)$ est continue. Qu'en déduit-on pour les fonctions de coût moyen C_1 et C_2 ?

- b) En remarquant que N_t est une chaîne de Markov à temps continu de générateur $\forall n, n' \in \mathbb{N}, A(n, n') = \lambda\beta^n(\mathbf{1}_{\{n'=n+1\}} - \mathbf{1}_{\{n'=n\}})$, vérifier formellement que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \mathbb{E}[N_{t+h} - N_t | N_t = n] = \lambda\beta^n$ puis que $M'(t) = \lambda \mathbb{E}[\beta^{N_t}]$, résultat que l'on peut justifier rigoureusement. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} M'(t) = 0$.

Vérifier que si $s > t, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N_s > N_t | N_t = n) > 0$ et conclure que $M'(t)$ est une fonction strictement décroissante.

- c) Montrer l'existence de $T_{\text{opt}}^1 \in [0, +\infty[$ et $T_{\text{opt}}^2 \in [0, t_2]$ qui minimisent respectivement C_1 et C_2 . Montrer T_{opt}^2 est unique puis que $T_{\text{opt}}^2 = 0$ si et seulement si $\lambda(b-a) \leq c$.
2. Nous allons vérifier, grâce à la transformation de Laplace que $M(t)$ est égale à

$$g(t) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \frac{(\lambda t)^{j+1}}{(j+1)!} \prod_{i=1}^j (1 - \beta^i)$$

avec la convention $\prod_{i=1}^0 (1 - \beta^i) = 1$.

- a) On rappelle que la fonction Γ d'Euler définie par

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-s} ds$$

vérifie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

Montrer que la transformée de Laplace $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} g(s) ds$ de g est égale pour tout $\alpha > \lambda$ à

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j \frac{\lambda^{j+1}}{\alpha^{j+2}} \sum_{m=0}^j (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq j} \beta^{i_1 + \dots + i_m},$$

avec la convention que la dernière somme vaut 1 lorsque $m = 0$.

- b) i. Remarquer que $M(s) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n \leq s)$.
- ii. Pour $\alpha > 0$, calculer $\mathbb{E}[e^{-\alpha(\tau_1 + \dots + \tau_n)}]$.
- iii. Remarquer que $\forall t \geq 0, e^{-\alpha t} = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \mathbf{1}_{\{t \leq s\}} ds$ et en déduire $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \mathbb{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n \leq s) ds$.
- iv. Conclure que la transformée de Laplace de M est donnée par : $\forall \alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} M(s) ds = \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 1} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda \beta^{k-1}}{\alpha + \lambda \beta^{k-1}}.$$

- c) On admet que l'égalité des deux transformées de Laplace pour tout α dans $] \lambda, +\infty[$ entraîne l'égalité de M et g et on se donne $\alpha > \lambda$.
- i. Vérifier que

$$\frac{\lambda \beta^{k-1}}{\alpha + \lambda \beta^{k-1}} = \sum_{l \geq 1} (-1)^{l+1} \frac{(\lambda \beta^{k-1})^l}{\alpha^l}.$$

- ii. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} M(s) ds$ est égal à

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j \frac{\lambda^{j+1}}{\alpha^{j+2}} \sum_{n=1}^{j+1} (-1)^{n+1} \sum_{\substack{l_1, \dots, l_n \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_n = j+1}} \beta^{l_2 + 2l_3 + \dots + (n-1)l_n}.$$

- iii. En effectuant successivement les changements d'indice $i_1 = l_n$, $i_2 = l_n + l_{n-1}, \dots, i_{n-1} = l_n + l_{n-1} + \dots + l_2$ puis $m = n - 1$ conclure à l'égalité de M et de g .
- 3. a) En simulant un grand nombre de trajectoires indépendantes de la chaîne de Markov à temps continu N_t , vérifier par la méthode de Monte-Carlo la validité de la formule donnant $M(t)$ pour plusieurs valeurs de λ, β et t .
- b) En utilisant cette formule, tracer $T \rightarrow C_1(T)$ et $T \rightarrow C_2(T)$ lorsque $\lambda = 2, \beta = 0.4, a = 1, b = 5, c = 2, t_1 = t_2 = 5$. Déterminer numériquement les valeurs optimales T_{opt}^1 et T_{opt}^2 correspondantes. Estimer par la méthode Monte-Carlo les probabilités pour qu'aucune erreur ne soit détectée pendant la phase de service du logiciel ($[T_{\text{opt}}^1, T_{\text{opt}}^1 + t_1]$ dans le premier cas et $[T_{\text{opt}}^2, t_2]$ dans le second).
- c) Étudier la dépendance de T_{opt}^1 et T_{opt}^2 en faisant varier les différents paramètres autour des valeurs qui précèdent. On représentera en particulier la dépendance de T_{opt}^1 en fonction de la durée de service t_1 .



10.4 Éléments de fiabilité des systèmes complexes

Ce paragraphe est une introduction à la fiabilité des systèmes complexes. La fonction de structure formalise la manière dont l'état du système dépend de celui de ses composants élémentaires. Cet outil permet de calculer la disponibilité du système ou bien un minorant de cette disponibilité en fonction des disponibilités des composants.

10.4.1 Fonction de structure, coupes

On considère un système complexe constitué de n composants numérotés de 1 à n . On associe au i -ième composant la variable x_i qui vaut 1 si le composant fonctionne et 0 s'il est en panne.

Définition 10.4.1. Soit $\Phi : x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \rightarrow \Phi(x) \in \{0, 1\}$ la fonction de l'état des composants qui vaut 1 lorsque le système fonctionne et 0 sinon. Cette fonction est appelée fonction de structure du système.

Le système est dit cohérent si

- lorsque tous les composants sont en panne le système est en panne : $\Phi(0, \dots, 0) = 0$,
- lorsque tous les composants fonctionnent, le système fonctionne :

$$\Phi(1, \dots, 1) = 1,$$

- Φ est croissante i.e. si $\forall 1 \leq i \leq n, x_i \leq y_i, \Phi(x) \leq \Phi(y)$, ce qui traduit l'idée naturelle suivante : si le système marche et qu'un composant est réparé, le système reste en marche (de façon symétrique, si le système est en panne et qu'un composant tombe en panne, il reste en panne).

Dans la suite, on s'intéresse uniquement aux systèmes cohérents.

Exemple 10.4.2.

- système série : fonctionne lorsque les n composants fonctionnent, $\Phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i$.
- système parallèle : fonctionne lorsque l'un au moins des n composants fonctionne, $\Phi(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$
- système k sur n : fonctionne si k composants au moins fonctionnent, $\Phi(x) = \mathbf{1}_{\{x_1 + \dots + x_n \geq k\}}$ (par exemple, un avion peut continuer à voler si deux au moins de ses trois réacteurs marchent). Un système série est un système n sur n tandis qu'un système parallèle est un système 1 sur n . \diamond

Pour déterminer la fonction de structure il est utile d'introduire la notion de coupe :

Définition 10.4.3. On appelle coupe un ensemble de composants dont la panne simultanée entraîne la panne du système. Une coupe est dite minimale si elle ne contient pas d'autres coupes. L'ordre d'une coupe est le nombre de composants qui la constituent.

Les composants qui apparaissent dans des coupes d'ordre faible sont des composants sensibles : si un composant est dans une coupe d'ordre 1, sa panne entraîne celle du système.

Pour en revenir à la fonction de structure, on note p le nombre de coupes minimales et pour $1 \leq j \leq p$, on note $K_j \subset \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des composants de la j -ième coupe minimale. Le système fonctionne si et seulement si un composant au moins de chacune des coupes minimales fonctionne ce qui entraîne que

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^p \left(1 - \prod_{i \in K_j} (1 - x_i) \right).$$

Intuitivement, on peut lire cette formule de la façon suivante : les p coupes minimales sont en série tandis que les composants de chacune de ces coupes sont en parallèle. On peut développer cette expression et utiliser le fait que $x_i \in \{0, 1\}$ entraîne $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_i^k = x_i$ pour la simplifier. L'expression obtenue est un polynôme en $x = (x_1, \dots, x_n)$ tel que le degré de x_i dans chaque monôme qui le constitue est au plus 1. Donc c'est une fonction affine en chacun des x_i . De cette manière, nous étendons Φ en une fonction affine en chacune de ses variables et définie sur $[0, 1]^n$. Abusivement, cette fonction est

toujours appelée fonction de structure du système. La cohérence du système entraîne qu'elle est croissante en chacune de ses variables.

Exercice 10.4.4. Vérifier que la fonction de structure d'un système 2 sur 4 s'écrit

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = & x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ & - 2x_1x_2x_3 - 2x_1x_2x_4 - 2x_1x_3x_4 - 2x_2x_3x_4 + 3x_1x_2x_3x_4.\end{aligned}$$

◆

10.4.2 Calcul de la disponibilité

On représente l'état à l'instant t du i -ième composant par une variable aléatoire $X_i(t)$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. La disponibilité du composant est alors $d_i(t) = \mathbb{P}(X_i(t) = 1) = \mathbb{E}[X_i(t)]$. On suppose les composants indépendants, ce qui se traduit par l'indépendance des variables $X_i(t)$. Alors, pour un monôme de la forme $\beta \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n X_i(t)^{\alpha_i} \right] = \prod_{i=1}^n (\mathbb{E}[X_i(t)])^{\alpha_i}.$$

Comme $\Phi(\{0, 1\}^n) \subset \{0, 1\}$ et que la fonction Φ est une somme de tels monômes, la disponibilité du système à l'instant t est donnée par

$$\begin{aligned}D(t) &= \mathbb{P}(\Phi(X_1(t), \dots, X_n(t)) = 1) = \mathbb{E}[\Phi(X_1(t), \dots, X_n(t))] \\ &= \Phi(\mathbb{E}[X_1(t)], \dots, \mathbb{E}[X_n(t)]) = \Phi(d_1(t), \dots, d_n(t)).\end{aligned}\quad (10.15)$$

Exemple 10.4.5.

- pour un système série, $D(t) = \prod_{i=1}^n d_i(t)$,
- pour un système parallèle, $D(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_i(t))$.

◇

Comme le calcul exact de la disponibilité $D(t)$ repose sur le développement et la simplification de la fonction de structure Φ expliqués au paragraphe précédent, lorsque le nombre de coupes minimales est grand, ce calcul devient très long. C'est pourquoi il est intéressant de disposer d'un encadrement de la disponibilité.

Pour obtenir cet encadrement, on note A_j l'événement : «les composants de la j -ième coupe minimale sont en panne à l'instant t ». On a $D(t) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^p A_j)$. On peut évaluer $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^p A_j)$ par la formule de Poincaré (appelée également formule du crible) :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^p A_j \right) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k})$$

mais le calcul exact revient à celui effectué avec la fonction de structure. On va plutôt donner un encadrement de $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^p A_j\right)$. On majore cette probabilité par $\sum_{j=1}^p \mathbb{P}(A_j)$ et on la minore par la somme $\sum_{j=1}^p \mathbb{P}(B_j)$ des probabilités des événements disjoints B_j : « les composants de la j -ième coupe sont en panne ; tous les autres fonctionnent ». Ainsi,

$$1 - \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(A_j) \leq D(t) \leq 1 - \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(B_j),$$

encadrement qui se réécrit en exprimant les probabilités des événements A_j et B_j :

Lemme 10.4.6.

$$1 - \sum_{j=1}^p \prod_{i \in K_j} (1 - d_i(t)) \leq D(t) \leq 1 - \sum_{j=1}^p \prod_{i \in K_j} (1 - d_i(t)) \prod_{i \in K_j^c} d_i(t).$$

Le tableau 10.1 illustre l'encadrement donné par ce lemme sur l'exemple d'un système k sur $n = 10$ composants avec $k \in \{5, 6, \dots, 10\}$ lorsque pour $i \in \{1, \dots, 10\}$, $d_i(t) = 0.9$. Dans ce cas particulier où les composants, supposés indépendants, ont tous même fiabilité, comme le système fonctionne lorsqu'au moins k composants fonctionnent, la disponibilité du système est $D(t) = \mathbb{P}(N \geq k)$ où N suit la loi binomiale de paramètre $(n, p) = (10, 0.9)$. On constate que quand la disponibilité est très proche de 1, l'encadrement est bon mais que la précision se dégrade notablement avec la disponibilité.

Remarque 10.4.7. C'est surtout la minoration de la disponibilité qui est intéressante car elle va dans le sens de la sécurité. En effet, pour vérifier que des objectifs de disponibilité minimale sont atteints, il suffit de le faire pour la minoration. Elle revient à ne conserver dans la formule du crible $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^p A_j\right) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} w_k$ avec $w_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k})$ que le premier terme w_1 . Si le système est fiable, les probabilités des A_j sont faibles et il est raisonnable de penser que les termes négligés sont d'un ordre inférieur. Les données numériques du Tableau 10.1 pour $k \leq 8$ confirment cette intuition. \diamond

Tableau 10.1. Majoration et minoration de la disponibilité $D(t)$ d'un système k sur $n = 10$ lorsque $d_i(t) = 0.9$

k	5	6	7	8	9	10
Majoration	0.9998622	0.9985120	0.9888397	0.9426044	0.8062898	0.6125795
$D(t)$	0.9998531	0.9983651	0.9872048	0.9298092	0.7360989	0.3486784
Minoration	0.99979	0.99748	0.979	0.88	0.55	0

Exercice 10.4.8. Montrer que pour $1 \leq l \leq p$,

$$\sum_{k=1}^l (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k})$$

est une majoration de $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^p A_j)$ lorsque l est impair et une minoration lorsque l est pair.

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur p et pour passer de l'hypothèse de récurrence au rang p à l'hypothèse au rang $p+1$, écrire

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{p+1} A_j\right) = \mathbb{P}(A_{p+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^p A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^p (A_j \cap A_{p+1})\right).$$

◆

Il est facile d'en déduire des minoration et des majorations de la disponibilité mais l'erreur commise n'est pas nécessairement décroissante avec l .

En l'absence de réparations, la fiabilité $\bar{F}_i(t)$ du i -ième composant est égale à sa disponibilité $d_i(t)$. En outre, comme le système est cohérent, son état se dégrade avec le temps et il fonctionne en t si et seulement si il a fonctionné sur tout l'intervalle $[0, t]$. Ainsi sa fiabilité $\bar{F}(t)$ est égale à sa disponibilité $D(t)$. Donc $\bar{F}(t) = \Phi(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$. Comme la fonction de structure Φ est croissante et minorée par celle du système série (cas le plus défavorable), avec la proposition 10.1.12, on obtient :

Lemme 10.4.9. *En l'absence de réparation, si les durées de vie de chacun des composants sont des variables IFR indépendantes d'espérances respectives μ_1, \dots, μ_n , alors pour tout $t \leq \min(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$,*

$$\bar{F}(t) \geq \Phi(\exp(-t/\mu_1), \dots, \exp(-t/\mu_n)) \geq \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i}\right).$$

10.4.3 Facteurs d'importance

Il peut être intéressant d'évaluer l'influence de l'un des n composants sur la disponibilité du système pour pouvoir identifier les composants les plus sensibles et déterminer les actions à entreprendre pour augmenter la disponibilité. De nombreux facteurs d'importance ont été introduits à cet effet dans la littérature fiabiliste. Nous nous contenterons d'en présenter un seul ici et nous renvoyons aux ouvrages de Aven et Jensen [1] et de Coccozza-Thivent [5] pour plus de détails.

Le facteur d'importance de Birnbaum F_i est défini comme la dérivée de la disponibilité du système par rapport à celle du i -ième composant. D'après (10.15),

$$F_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(d_1(t), \dots, d_n(t)).$$

Pour x un vecteur de $[0, 1]^n$, on note $(1_i, x)$ (resp. $(0_i, x)$) le vecteur obtenu en remplaçant la i -ième composante de x par 1 (resp. par 0). On note respectivement $d(t)$ et $X(t)$ les vecteurs $(d_1(t), \dots, d_n(t))$ et $(X_1(t), \dots, X_n(t))$. Comme Φ est affine en chacune de ces variables, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(d_1(t), \dots, d_n(t)) = \Phi(1_i, d(t)) - \Phi(0_i, d(t)).$$

Puis en reprenant le raisonnement effectué pour établir (10.15), on remarque que $\Phi(1_i, d(t)) = \mathbb{E}[\Phi(1_i, X(t))]$ et $\Phi(0_i, d(t)) = \mathbb{E}[\Phi(0_i, X(t))]$.

Donc $F_i = \mathbb{E}[\Phi(1_i, X(t)) - \Phi(0_i, X(t))]$. Comme les vecteurs $(1_i, X(t))$ et $(0_i, X(t))$ sont dans $\{0, 1\}^n$, leur image par la fonction de structure est dans $\{0, 1\}$. Avec la croissance de Φ , on en déduit que

$$F_i = \mathbb{P}(\Phi(1_i, X(t)) = 1, \Phi(0_i, X(t)) = 0).$$

Ainsi le facteur d'importance de Birnbaum s'interprète comme la probabilité pour que le système fonctionne à l'instant t si le i -ème composant fonctionne alors que le système serait en panne si le i -ème composant l'était.

Références

1. T. Aven et U. Jensen. *Stochastic models in reliability*, volume 41 de *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1999.
2. R.E. Barlow et F. Proschan. *Mathematical theory of reliability*, volume 17 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
3. A. Birolini. *On the use of stochastic processes in modeling reliability problems*, volume 252 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
4. J.L. Bon. *Fiabilité des systèmes : méthodes mathématiques*. Masson, 1995.
5. C. Coccozza-Thivent. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, volume 28 de *Mathématiques et Applications (SMAI)*. Springer-Verlag, 1997.
6. I.B. Gertsbakh. *Statistical reliability theory*, volume 4 de *Probability : Pure and Applied*. Marcel Dekker Inc., New York, 1989.
7. A. Høyland et M. Rausand. *System reliability theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.

8. N. Limnios. *Arbres de défaillances*. Hermes, 1991.
9. P.B. Moranda. Prediction of software reliability and its applications. In *Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium, Washington D.C.*, pages 327–332, 1975.
10. S. Osaki. *Stochastic system reliability modeling*, volume 5 de *Series in Modern Applied Mathematics*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1985.
11. A. Pagès et M. Gondran. *Fiabilité des systèmes*. Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France. Eyrolles, 1980.
12. N.D. Singpurwalla et S.P. Wilson. *Statistical methods in software engineering*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1999. Reliability and risk.
13. W.A. Thompson, Jr. *Point process models with applications to safety and reliability*. Chapman and Hall, New York, 1988.