1

Chaînes de Markov à temps discret

Comme nous le verrons au cours des prochains chapitres, les chaînes de Markov permettent de modéliser de manière élémentaire, mais robuste, de nombreux phénomènes aléatoires où l'évolution future d'une quantité ne dépend du passé qu'au travers de sa valeur présente. Par exemple, si on note X_n l'état d'un stock de pièces détachées à l'instant n, D_{n+1} la demande (aléatoire) formulée par des clients, et $q \in \mathbb{N}^*$ la quantité (déterministe) de pièces détachées fabriquées entre les instants n et $n+1$, alors à l'instant $n+1$, l'état du stock est $X_{n+1} = (X_n + q - D_{n+1})^+$, où x^+ désigne la partie positive de $x \in \mathbb{R}$. Dans le cas où la demande est constituée de variables aléatoires indépendantes, alors l'évolution future $(X_k, k \geq n+1)$ ne dépend du passé $(X_k, k \in \{0, \ldots, n\})$ qu'au travers de l'état présent X_n. Cette propriété, dite propriété de Markov, est la base de la définition des chaînes de Markov (voir la définition 1.1.1).

Le but de ce chapitre est de présenter en un ensemble cohérent les objets mathématiques et certaines de leurs propriétés que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Plus précisément, dans les paragraphes 1.1, 1.2 et 1.3 nous énonçons la définition des chaînes de Markov et quelques propriétés élémentaires. Le paragraphe 1.4 présente le comportement asymptotique (convergence en loi) de la suite $(X_n, n \geq 1)$ sous certaines hypothèses. Ces résultats seront complétés dans le Chap. 2, lors de la démonstration de la convergence d'un algorithme stochastique d'optimisation : le recuit simulé. Dans les paragraphes 1.5 et 1.6, on s'intéresse au comportement asymptotique des moyennes temporelles de la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k)$. Dans l'exemple de la gestion de stock, si f est la fonction identité, alors $f(X_n) = X_n$ représente la quantité de pièces détachées à l'instant n et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k)$ la moyenne dans le temps de l'état du stock. Dans le paragraphe 1.5, on démontre le théorème ergodique : c'est la convergence presque sûre (p.s.) de ces moyennes temporelles vers une limite déterministe qui est l'espérance de $f(X^*)$, où la loi de X^*, notée π, est la loi stationnaire de la chaîne de Markov (i.e. si l'état initial de la chaîne de Markov, X_0, est aléatoire de loi π, alors la loi de X_n est π pour tout temps n). Le théorème ergodique est l'analogue de la loi forte des grands nombres pour les chaînes de Markov. On étudie également, au paragraphe 1.6, l'analogue du théorème central limite pour les chaînes de Markov, c'est-à-dire les fluctuations des moyennes temporelles autour de leur limite.

Le paragraphe 1.1 est élémentaire et nécessaire pour la compréhension de la plupart des chapitres qui suivent. Il en est de même des paragraphes 1.2, 1.3 et 1.4 qui comportent peu de démonstrations. En revanche les paragraphes 1.5 et 1.6 abordent des concepts plus difficiles, et les démonstrations détaillées qui sont présentées sont d'un niveau technique conséquent. Les résultats des paragraphes 1.5 et 1.6 seront essentiellement utilisés pour la recherche des mots exceptionnels de l'ADN (Chap. 6) et motiveront également une partie de l'analyse des files d'attente (Chap. 9). Il peuvent donc être omis jusqu'à la lecture de ces chapitres.

Enfin une vaste littérature sur les chaînes de Markov est disponible. Pour plus de détails, on pourra consulter les ouvrages [7, 8, 10] et les ouvrages plus spécialisés [3, 4, 5 ou 9].

1.1 Définition et propriétés

Soit E un espace discret, i.e. E est un espace au plus dénombrable muni de la topologie discrète, où tous les points de E sont isolés.

Définition 1.1.1. *On dit que la suite de variables aléatoires $X = (X_n, n \geq 0)$, à valeurs dans E, est une chaîne de Markov si elle possède la propriété de Markov : pour tous $n \in \mathbb{N}$, $y, x_0, \ldots, x_n \in E$, tels que $\mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x_n).$$

Remarquons que par définition des probabilités conditionnelles, si $\mathbb{P}(X_n = x_n) > 0$, alors $\sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x_n) = 1$.

Définition 1.1.2. *Une matrice $P = (P(x, y), x, y \in E)$ est dite matrice stochastique si et seulement si ses coefficients sont positifs et la somme sur une ligne des coefficients est égale à 1 :*

$$\boxed{\sum_{y \in E} P(x, y) = 1.}$$

Définition 1.1.3.

- *Soit $(Q_n, n \geq 1)$ une suite de matrices stochastiques. On dit que les matrices $(Q_n, n \geq 1)$ sont les matrices de transition de la chaîne de Markov X si pour tous $n \geq 1$ et $x \in E$ tels que $\mathbb{P}(X_{n-1} = x) > 0$, on a pour tout $y \in E$,*

$$Q_n(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x).$$

– *Soit P une matrice stochastique. On dit que la chaîne de Markov X est homogène, de matrice de transition P, si pour tous $n \geq 0$ et $x, y \in E$ tels que $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = P(x, y).$$

Par convention[1]*, on pose $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = P(x_n, y)$ si $\mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = 0$.*

Suivant les applications, il est parfois plus naturel de considérer la chaîne de Markov $X = (X_n, n \geq m)$ à partir d'un instant $m \in \mathbb{Z}$ quelconque. Enfin, comme les chaînes de Markov considérées sont, sauf cas particulier, homogènes, on omettra la plupart du temps le mot homogène.

Exemple 1.1.4. Reprenons l'exemple donné en introduction. On note X_n l'état d'un stock de pièces détachées à l'instant n, D_{n+1} la demande (aléatoire), et q la quantité (déterministe) constante de pièces détachées fabriquées. L'équation d'évolution de l'état du stock, entre les instants n et $n+1$, est $X_{n+1} = (X_n + q - D_{n+1})^+$. On suppose que la demande $(D_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires entières indépendantes et de même loi qu'une variable D : pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(D = k)$. Il est clair que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition : $P(x, y) = p_k$ si $y = x + q - k > 0$, et $P(x, 0) = \mathbb{P}(D \geq x + q) = \sum_{k \geq x+q} p_k$. $\Diamond$

Exemple 1.1.5. La marche aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}$, $S = (S_n, n \geq 0)$, est définie par $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$, où $Z = (Z_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/2$, et S_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendante de Z. On vérifie facilement que la marche aléatoire simple est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de matrice de transition : $P(x, y) = 0$ si $|x - y| \neq 1$ et $P(x, y) = 1/2$ si $|x - y| = 1$. $\Diamond$

Remarque 1.1.6. Dans les deux exemples précédents, on considère une suite de variables $X = (X_n, n \geq 0)$ définies pour $n \geq 0$ par $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$, où f est une fonction de $E \times F$ à valeurs dans E et $(U_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans F, de même loi, indépendantes entre elles et indépendantes de X_0. Sous ces hypothèses, X est une chaîne de Markov de matrice de transition P définie par $P(x, y) = \mathbb{P}(f(x, U_1) = y)$, pour $x, y \in E$.

Cette représentation permet de construire, pour toute matrice stochastique P, une chaîne de Markov ayant P comme matrice de transition (voir plus généralement le théorème d'extension de Kolmogorov, [1], appendice II). $\Diamond$

Le calcul suivant montre que la loi conditionnelle de X_2 sachant X_0 s'exprime facilement à l'aide de la matrice de transition. On a, si $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$,

[1] Cette convention est différente de celle donnée dans (A.3), mais elle permet d'alléger les calculs sans prêter à conséquence.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = y | X_0 = x) &= \frac{\mathbb{P}(X_2 = y, X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x)} \qquad (1.1)\\
&= \sum_{z \in E} \frac{\mathbb{P}(X_2 = y, X_1 = z, X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x)}\\
&= \sum_{z \in E_x} \frac{\mathbb{P}(X_1 = z, X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x)} \frac{\mathbb{P}(X_2 = y, X_1 = z, X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_1 = z, X_0 = x)}\\
&= \sum_{z \in E_x} \mathbb{P}(X_1 = z | X_0 = x) \mathbb{P}(X_2 = y | X_1 = z, X_0 = x)\\
&= \sum_{z \in E} P(x, z) P(z, y) = P^2(x, y),
\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition des probabilités conditionnelles pour la première égalité, la notation $E_x = \{z \in E\,; \mathbb{P}(X_1 = z, X_0 = x) > 0\}$ pour la troisième, la définition des chaînes de Markov et l'homogénéité pour la cinquième, et la notation P^2 pour le carré de la matrice P dans la dernière. Plus généralement, si P^k désigne la puissance k-ième, on obtient par récurrence $\mathbb{P}(X_k = y \mid X_0 = x) = P^k(x, y)$.

La proposition suivante permet de vérifier que l'évolution future d'une chaîne de Markov ne dépend du passé qu'au travers de sa valeur présente. Afin d'utiliser des notations concises, on note y_n^m le vecteur $(y_n, \dots, y_m)$ pour $n \leq m$.

Proposition 1.1.7. *Soit $m \geq 1$, $A \subset E^m$, et $I_n = \{(X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in A\}$ pour $n \geq 0$. On considère également pour $n \geq 1$, $J_n = \{(X_0, \dots, X_{n-1}) \in B\}$, où $B \subset E^n$. Si $\mathbb{P}(X_n = x_n, J_n) > 0$, alors on a*

$$\mathbb{P}(I_n | X_n = x_n, J_n) = \mathbb{P}(I_n | X_n = x_n) = \mathbb{P}(I_0 | X_0 = x_n).$$

Démonstration. On suppose que $\mathbb{P}(X_n = x_n, J_n) > 0$. La formule de composition des probabilités conditionnelles (A.4) implique que pour $x_{n+1}^{n+m} \in E^m$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}^{n+m} = x_{n+1}^{n+m} | X_n = x_n, J_n) = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k} | X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, J_n).$$

En décomposant suivant les valeurs possibles de $X_0, \dots, X_{n-1}$, il vient si $\mathbb{P}(X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, J_n) > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+k} &= x_{n+k} | X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, J_n)\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_n^{n+k} = x_n^{n+k}, J_n)}{\mathbb{P}(X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, J_n)}\\
&= \frac{\sum_{y_0^{n-1} \in B} \mathbb{P}(X_n^{n+k} = x_n^{n+k}, X_0^{n-1} = y_0^{n-1})}{\sum_{z_0^{n-1} \in B} \mathbb{P}(X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, X_0^{n-1} = z_0^{n-1})}.
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de Markov, le terme $\mathbb{P}(X_n^{n+k} = x_n^{n+k}, X_0^{n-1} = y_0^{n-1})$ est égal à

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k} | X_{n+k-1} = x_{n+k-1}) \mathbb{P}(X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, X_0^{n-1} = y_0^{n-1}).$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k} | X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, J_n) & \\ &= \mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k} | X_{n+k-1} = x_{n+k-1}) \\ &= P(x_{n+k-1}, x_{n+k}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'homogénéité pour la dernière égalité. On a ainsi obtenu que si $\mathbb{P}(X_n^{n+m-1} = x_n^{n+m-1}, J_n) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}^{n+m} = x_{n+1}^{n+m} | X_n = x_n, J_n) = \prod_{k=1}^{m} P(x_{n+k-1}, x_{n+k}). \tag{1.2}$$

Si $\mathbb{P}(X_n^{n+m-1} = x_n^{n+m-1}, J_n) = 0$, comme $\mathbb{P}(X_n = x_n, J_n) > 0$, on en déduit qu'il existe $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ tel que $\mathbb{P}(X_n^{n+k} = x_n^{n+k}, J_n) = 0$ et $\mathbb{P}(X_n^{n+k-1} = x_n^{n+k-1}, J_n) > 0$. Ceci implique, d'après les calculs précédents, que $P(x_{n+k-1}, x_{n+k}) = 0$, et donc (1.2) est également vraie si $\mathbb{P}(X_n^{n+m-1} = x_n^{n+m-1}, J_n) = 0$.

Des calculs similaires assurent que

$$\mathbb{P}(X_1^m = x_{n+1}^{n+m} | X_0 = x_n) = \prod_{k=1}^{m} P(x_{n+k-1}, x_{n+k}).$$

Ainsi on a $\mathbb{P}(X_{n+1}^{n+m} = x_{n+1}^{n+m} | X_n = x_n, J_n) = \mathbb{P}(X_1^m = x_{n+1}^{n+m} | X_0 = x_n)$. En sommant sur $x_{n+1}^{n+m} \in A$, il vient

$$\mathbb{P}(I_n | X_n = x_n, J_n) = \mathbb{P}(I_0 | X_0 = x_n) = \sum_{x_{n+1}^{n+m} \in A} \prod_{k=1}^{m} P(x_{n+k-1}, x_{n+k}). \tag{1.3}$$

Enfin, en choisissant $B = E^n$, on a $\{X_n = x_n, J_n\} = \{X_n = x_n\}$, et on déduit de l'égalité précédente que $\mathbb{P}(I_n | X_n = x_n) = \mathbb{P}(I_0 | X_0 = x_n)$. □

Remarque 1.1.8. On conserve les notations de la proposition 1.1.7. Dans la démonstration précédente, le dernier membre de droite des égalités (1.3) est bien défini même si $\mathbb{P}(X_n = x_n, J_n) = 0$. Par convention, si $\mathbb{P}(X_n = x_n, J_n) = 0$, on pose

$$\mathbb{P}(I_n | X_n = x_n, J_n) = \sum_{x_{n+1}^{n+m} \in A} \prod_{k=1}^{m} P(x_{n+k-1}, x_{n+k}),$$

et si $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 0$, $\mathbb{P}(I_0|X_0 = x_0) = \sum_{x_1^m \in A} \prod_{k=1}^m P(x_{k-1}, x_k)$. Avec cette convention, on a également que pour $x_1^m \in E^m$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}^{n+m} = x_1^m | X_n = x_0) = \prod_{k=1}^m P(x_{k-1}, x_k).$$

$\diamondsuit$

Définition 1.1.9. *Un événement I est dit presque sûr (p.s.) si $\mathbb{P}(I|X_0 = x) = 1$ pour tout $x \in E$.*

Soit ν_0 la loi de X_0 : $\nu_0(x) = \mathbb{P}(X_0 = x)$ pour tout $x \in E$. En décomposant suivant les valeurs possibles de X_0, on calcule la loi de X_1 :

$$\mathbb{P}(X_1 = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)\mathbb{P}(X_0 = x) = \sum_{x \in E} \nu_0(x) P(x, y).$$

On utilise la notation $\nu_0 P(y) = \sum_{x \in E} \nu_0(x) P(x, y)$. On peut l'interpréter comme le produit usuel entre le vecteur ligne $\nu_0 = (\nu_0(x)\,;\ x \in E)$ et la matrice P. Par récurrence, on vérifie que la loi de X_n est $\nu_0 P^n$.

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ positive ou bornée. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_n)|X_0 = x] &= \sum_{y \in E} f(y)\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) \\ &= \sum_{y \in E} P^n(x, y) f(y) = P^n f(x),\end{aligned}$$

où l'on considère dans la dernière égalité la fonction f comme un vecteur colonne et $P^n f$ est le produit de la matrice P^n par le vecteur colonne f. On a de plus

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum_{x \in \mathbb{E}} \mathbb{P}(X_n = x) f(x) = \nu_0 P^n f.$$

On retiendra que la multiplication à gauche de la matrice de transition concerne le calcul de loi, et la multiplication à droite le calcul d'espérance ou d'espérance conditionnelle.

1.2 Chaîne trace, états absorbants

Soit $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ une chaîne de Markov à valeurs dans E, de matrice de transition P.

Définition 1.2.1. *On dit que x est un état absorbant de la chaîne X si $P(x, x) = 1$, i.e. pour tout $y \neq x$, $P(x, y) = 0$.*

En particulier si la chaîne de Markov atteint un de ses points absorbants, elle ne peut plus s'en échapper.

On introduit les temps successifs de sauts de la chaîne X. On pose $S_0 = 0$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence

$$T_k = \inf\{n \geq 1\,;X_{S_{k-1}+n} \neq X_{S_{k-1}}\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = 0$, et $S_k = S_{k-1} + \max(T_k, 1)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Z_k = X_{S_k}$ et on note $R = \inf\{k \geq 1\,;T_k = 0\}$ avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, de sorte que $(Z_k, 0 \leq k < R)$ représente les états successifs différents de la chaîne X. En fait, on peut vérifier que s'il n'existe pas d'état absorbant alors p.s. $R = \infty$.

Théorème 1.2.2. *Le processus $Z = (Z_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov, appelée chaîne trace associée à X, de matrice de transition Q définie par :*

$$Q(x,y) = \begin{cases} \dfrac{P(x,y)}{1-P(x,x)}\mathbf{1}_{\{x\neq y\}} & \textit{si } x \textit{ n'est pas un état absorbant,} \\ \mathbf{1}_{\{x=y\}} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Les chaînes X et Z ont les mêmes points absorbants. De plus, conditionnellement à $(Z_0, \ldots, Z_n)$ les variables aléatoires $(T_1, \ldots, T_{n+1})$ sont indépendantes. Pour $1 \leq k \leq n+1$, conditionnellement à $(Z_0, \ldots, Z_n)$, on a $T_k = 0$ p.s. si Z_{k-1} est un point absorbant, sinon T_k suit la loi géométrique de paramètre $1 - P(Z_{k-1}, Z_{k-1})$.

Démonstration. Soit $n \geq 1$, $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$ et $t_1, \ldots, t_{n+1} \in \mathbb{N}$. On désire calculer

$$I = \mathbb{P}(Z_0 = x_0, \ldots, Z_{n+1} = x_{n+1}, T_1 = t_1, \ldots, T_{n+1} = t_{n+1}).$$

Si la condition suivante, notée (C), «pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, soit x_i n'est pas un point absorbant, $x_{i+1} \neq x_i$ et $t_{i+1} \geq 1$, soit x_i est un point absorbant et pour tout $j \in \{i+1, \ldots, n+1\}$ on a $x_j = x_i$ et $t_j = 0$», n'est pas vérifiée, alors par construction $I = 0$. Si la condition (C) est vérifiée, alors d'après la propriété de Markov, voir la deuxième partie de la remarque 1.1.8, il vient en posant $s_k = \sum_{i=1}^k \max(t_i, 1)$,

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{s_1-1} = x_0, X_{s_1} = x_1, \ldots \\ &\qquad \ldots, X_{s_n-1} = x_{n-1}, X_{s_n} = x_n, \ldots, X_{s_{n+1}-1} = x_n, X_{s_{n+1}} = x_{n+1}) \\ &= \nu_0(x_0) \prod_{i=1}^{n+1} P(x_{i-1}, x_{i-1})^{\max(t_i,1)-1} P(x_{i-1}, x_i), \end{aligned}$$

où $\nu_0(x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)$. On obtient, en utilisant la matrice de transition Q définie dans le théorème,

$$I = \nu_0(x_0) \prod_{i=1}^{n+1} Q(x_{i-1}, x_i) p_i (1 - p_i)^{\max(t_i,1)-1}, \tag{1.4}$$

avec la convention $0^0 = 1$ et la notation $p_j = 1 - P(x_{j-1}, x_{j-1})$ si x_{j-1} n'est pas un état absorbant et $p_j = 1$ sinon. (La notation peu naturelle, $p_j = 1$ si x_{j-1} est un état absorbant, permet de traduire le fait que la suite $(Z_k, k \in \mathbb{N})$ qui est naturellement définie jusqu'à l'instant où elle atteint un point absorbant, est prolongée artificiellement par la suite constante.) L'égalité (1.4) reste valide si la condition (C) n'est pas vérifiée, car alors les deux membres de l'égalité sont nuls. On en déduit donc, en sommant sur les valeurs possibles de $t_1, \ldots, t_{n+1}$, que pour tous $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$,

$$\mathbb{P}(Z_0 = x_0, \ldots, Z_{n+1} = x_{n+1}) = \nu_0(x_0) Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_n, x_{n+1}).$$

Comme Q est une matrice stochastique, ceci assure que $Z = (Z_k, k \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q. D'après la définition de Q, il est clair que les chaînes X et Z ont les mêmes points absorbants. En sommant (1.4) et l'équation précédente sur $x_{n+1} \in E$, et en faisant le rapport, on obtient pour $\mathbb{P}(Z_0 = x_0, \ldots, Z_n = x_n) > 0$, que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(T_1 = t_1, \ldots, T_{n+1} = t_{n+1} | Z_0 = x_0, \ldots, Z_n = x_n) \\ &\qquad = p_1 (1 - p_1)^{\max(t_1,1)-1} \cdots p_{n+1} (1 - p_{n+1})^{\max(t_{n+1},1)-1}. \end{aligned}$$

Ceci assure que conditionnellement à $(Z_0, \ldots, Z_n)$ les variables aléatoires $(T_1, \ldots, T_{n+1})$ sont indépendantes et on a $T_k = 0$ p.s. si Z_{k-1} est un point absorbant, sinon T_k suit la loi géométrique de paramètre $p_k = 1 - P(Z_{k-1}, Z_{k-1})$. □

1.3 Probabilités invariantes, réversibilité

Les probabilités invariantes jouent un rôle important dans l'étude des comportements asymptotiques des chaînes de Markov.

Soit $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ une chaîne de Markov à valeurs dans E, de matrice de transition P.

Définition 1.3.1. *Une probabilité π sur E est appelée probabilité invariante, ou probabilité stationnaire, de la chaîne de Markov si* $\boxed{\pi = \pi P}$.

En particulier, si la loi de X_0, notée ν_0, est une probabilité invariante, alors la loi de X_1 est $\nu_1 = \nu_0 P = \nu_0$, et en itérant, on obtient que X_n a même loi que X_0. La loi de X_n est donc constante, on dit aussi stationnaire, au cours du temps, d'où le nom de probabilité stationnaire.

Supposons que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Pour $x, y \in E$, on pose

$$Q(x, y) = \frac{\pi(y)P(y, x)}{\pi(x)}.$$

Comme π est une probabilité invariante, on a $\sum_{y \in E} \pi(y)P(y, x) = \pi(x)$. On en déduit que la matrice Q est une matrice stochastique. Si X_0 est distribué suivant la probabilité invariante π, on a pour $x, y \in E$, $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_{n+1} = x) = \frac{\mathbb{P}(X_n = y, X_{n+1} = x)}{\mathbb{P}(X_{n+1} = x)} = Q(x, y).$$

Plus généralement, il est facile de vérifier que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $y, x_1, \dots, x_k \in E$, avec $x_1 = x$, on a $\mathbb{P}(X_n = y | X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+k} = x_k) = Q(x, y)$. La matrice Q s'interprète comme la matrice de transition de la chaîne de Markov X après retournement du temps.

Définition 1.3.2. *On dit que la chaîne de Markov de matrice de transition P, ou plus simplement la matrice P, est réversible par rapport à la probabilité π si on a pour tous $x, y \in E$,*

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x). \tag{1.5}$$

En sommant (1.5) sur x, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 1.3.3. *Si la chaîne de Markov est réversible par rapport à la probabilité π, alors π est une probabilité invariante.*

Intuitivement si une chaîne est réversible par rapport à une probabilité invariante π, alors sous cette probabilité invariante la chaîne et la chaîne après retournement du temps ont même loi. Plus précisément, si la loi de X_0 est π, alors les vecteurs $(X_0, \dots, X_{n-1}, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.4 Chaînes irréductibles, chaînes apériodiques

Définition 1.4.1. *On dit qu'une chaîne de Markov, ou sa matrice de transition, est irréductible si la probabilité partant d'un point quelconque x de E, d'atteindre un point quelconque $y \in E$ en un nombre $n_{x,y}$ d'étapes est strictement positive, autrement dit : si pour tous $x, y \in E$, il existe $n = n_{x,y} \geq 1$ (dépendant a priori de x et y) tel que $P^n(x, y) > 0$.*

La condition $P^n(x, y) > 0$ est équivalente à l'existence de $x_0 = x$, x_1, ..., $x_n = y$ tels que $\prod_{k=1}^n P(x_{k-1}, x_k) > 0$.

Une chaîne possédant des états absorbants n'est pas irréductible (sauf si l'espace d'état est réduit à un point).

Par exemple, la marche aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}$, $(S_n, n \geq 0)$, définie dans l'exemple 1.1.5, est irréductible. Remarquons que, si S_0 est pair alors p.s. S_{2k} est pair et S_{2k+1} est impair. On assiste en fait à un phénomène périodique. La quantité $\mathbb{P}(S_n \text{ pair})$ prend successivement les valeurs 1 et 0. Ce phénomène motive la définition suivante.

Définition 1.4.2. *On dit qu'une chaîne de Markov est périodique de période $d \geq 1$ si l'on peut décomposer l'espace d'état E en une partition à d sous ensembles $C_1, \dots, C_d = C_0$, tels que pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$,*

$$\mathbb{P}(X_1 \in C_k \mid X_0 \in C_{k-1}) = 1.$$

On dit qu'une chaîne est apériodique si sa plus grande période est 1.

Le théorème suivant est un corollaire direct des propositions 1.5.5, 1.5.4 et du théorème 1.5.6, ainsi que de la remarque 1.5.7 pour le cas E fini.

Théorème 1.4.3. *Une chaîne de Markov irréductible possède au plus une probabilité invariante, π, et alors $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Si E est fini, alors toute chaîne de Markov irréductible possède une et une seule probabilité invariante.*

On admet le théorème suivant, appelé dans certains ouvrages théorème ergodique, concernant le comportement asymptotique des chaînes de Markov apériodiques et irréductibles (voir [3] théorèmes 4.2.1 et 4.2.4, [7] théorème 2.6.18 ou [2] dans un contexte plus général).

Théorème 1.4.4. *Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov apériodique, irréductible. Si elle possède une (unique) probabilité invariante, π, alors pour tout $x \in E$ on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x)$, i.e. la suite des lois des variables X_n converge étroitement vers l'unique probabilité invariante. Si elle ne possède pas de probabilité invariante, alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = 0$ pour tout $x \in E$.*

Nous démontrerons au Chap. 2 la convergence en loi de la chaîne de Markov sous d'autres hypothèses ne faisant pas directement intervenir le caractère apériodique (voir le théorème 2.1.2).

1.5 Théorème ergodique

On considère $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov, de matrice de transition P, sur un espace E discret. On rappelle la notation $y_n^m = (y_n, \dots, y_m)$ pour $m \geq n$. L'objet de ce paragraphe est l'étude du comportement asymptotique des moyennes temporelles, à savoir

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=r}^{n} f(X_{k-r+1}^k),$$

quand n tend vers l'infini, où f est une fonction réelle ou vectorielle.

Exemple 1.5.1. Un brin d'ADN (acide désoxyribonucléique) est une macromolécule composée d'une succession de bases ou nucléotides. Il existe quatre bases différentes : adénine (`A`), cytosine (`C`), guanine (`G`) et thymine (`T`). On suppose que la séquence d'ADN, $y_1 \ldots y_N$, de longueur N est la réalisation d'une chaîne de Markov $(Y_n, n \geq 1)$ à valeurs dans $E = \{\mathtt{A}, \mathtt{C}, \mathtt{G}, \mathtt{T}\}$ et de matrice de transition P. On s'intéresse au nombre d'occurrences d'un mot $w = w_1 \ldots w_h$ de longueur h dans l'ADN. Ce nombre d'occurrences est la réalisation de la variable aléatoire

$$N_w = \sum_{k=h}^{N} \mathbf{1}_{\{Y_{k-h+1}^k = w\}}.$$

Au chapitre 6, on comparera le nombre d'occurrences observé avec le nombre théorique attendu. Intuitivement, si le mot w a un rôle biologique, alors la valeur observée de N_w sera certainement différente des valeurs observées dues au hasard. Pour cela, il faut déterminer la loi de N_w. Il est difficile de calculer explicitement et numériquement cette loi. En revanche les théorèmes ergodiques permettent d'étudier son comportement asymptotique lorsque N tend vers l'infini. $\diamondsuit$

Définition 1.5.2. *On définit le temps de retour en x par*

$$T(x) = \inf \{k \geq 1\,; X_k = x\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. *On dit qu'un état x est récurrent si* $\mathbb{P}(T(x) < \infty | X_0 = x) = 1$, *sinon on dit que l'état est transient.*

Lemme 1.5.3. *On a les propriétés suivantes.*

(i) Un état x est transient si et seulement si $\mathbb{P}(X_n = x$ pour une infinité de $n | X_0 = x) = 0$. On a alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x | X_0 = x) < \infty$.

(ii) Un état x est récurrent si et seulement si $\mathbb{P}(X_n = x$ pour une infinité de $n | X_0 = x) = 1$. On a alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x | X_0 = x) = \infty$.

(iii) Si X est une chaîne irréductible, alors soit tous les états sont transients, on dit alors que la chaîne est transiente et $\{X_n = x$ pour un nombre fini de $n\}$ est p.s. pour tout $x \in E$, soit tous les états sont récurrents, on dit alors que la chaîne est récurrente et $\{X_n = x$ pour une infinité de $n\}$ est p.s. pour tout $x \in E$.

Démonstration. On considère les événements $I = \{X_n = x$ pour un nombre fini de $n\}$ et

$$F_n = \{X_n = x, X_{n+k} \neq x \text{ pour tout } k \geq 1\}.$$

En décomposant suivant les valeurs du dernier temps de passage de la chaîne en x, on obtient

$$\mathbb{P}(I | X_0 = x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(F_n | X_0 = x).$$

On remarque que F_n est la limite décroissante quand m tend vers l'infini de $F_{n,m} = \{X_n = x, X_{n+k} \neq x, k \in \{1, \ldots, m\}\}$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(F_{n,m}|X_0 = x) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{n+k} \neq x, k \in \{1, \ldots, m\}|X_n = x, X_0 = x)\mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x) \\
&\qquad = \mathbb{P}(F_{0,m}|X_0 = x)\mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé pour la dernière égalité la proposition 1.1.7 avec $I_n = \{X_{n+k} \neq x, k \in \{1, \ldots, m\}\}$ et $J_n = \{X_0 = x\}$. Par convergence dominée, on en déduit

$$\mathbb{P}(F_n|X_0 = x) = \mathbb{P}(F_0|X_0 = x)\mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x). \tag{1.6}$$

Il vient alors

$$\mathbb{P}(I|X_0 = x) = \mathbb{P}(F_0|X_0 = x) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x).$$

(*i*) Si $\mathbb{P}(F_0|X_0 = x) > 0$ (i.e. l'état x est transient), alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x) < \infty$. De cette dernière inégalité on déduit que la variable aléatoire $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}$ est finie $\mathbb{P}(\cdot|X_0 = x)$-p.s., c'est-à-dire $\mathbb{P}(I|X_0 = x) = 1$.

(*ii*) Si $\mathbb{P}(F_0|X_0 = x) = 0$ (i.e. l'état x est récurrent), alors on déduit de (1.6) que $\mathbb{P}(F_n|X_0 = x) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Comme $I = \cup_{n \geq 0} F_n$, cela implique que $\mathbb{P}(I|X = x) = 0$. Donc, $\mathbb{P}(\cdot|X_0 = x)$-p.s. la variable aléatoire $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}$ est infinie. En particulier, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x) = \infty$.

On démontre (*iii*). Supposons que la chaîne est irréductible. Soit x et y deux états. Il existe deux entiers, r et s, tels que $\mathbb{P}(X_r = x|X_0 = y) > 0$ et $\mathbb{P}(X_s = y|X_0 = x) > 0$. On remarque alors, en utilisant la propriété 1.1.7, c'est-à-dire la propriété de Markov, que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+r+s} = x|X_0 = x) \\
&\qquad \geq \mathbb{P}(X_{n+r+s} = x, X_{n+s} = y, X_s = y|X_0 = x) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_r = x|X_0 = y)\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = y)\mathbb{P}(X_s = y|X_0 = x),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+r+s} = y|X_0 = y) \\
&\qquad \geq \mathbb{P}(X_{n+r+s} = y, X_{n+r} = x, X_r = x|X_0 = y) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_s = y|X_0 = x)\mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x)\mathbb{P}(X_r = x|X_0 = y).
\end{aligned}$$

Cela implique que les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = y|X_0 = y)$ sont de même nature (convergentes ou divergentes). Ainsi les deux états sont soit tous les deux récurrents soit tous les deux transients. Les états d'une chaîne irréductible sont donc soit tous récurrents soit tous transients.

Pour conclure, remarquons qu'en utilisant la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+s} = x|X_0 = x) &\geq \mathbb{P}(X_{n+s} = x, X_s = y|X_0 = x)\\ &= \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = y)\mathbb{P}(X_s = y|X_0 = x),\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+r} = x|X_0 = y) &\geq \mathbb{P}(X_{n+r} = x, X_r = x|X_0 = y)\\ &= \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x)\mathbb{P}(X_r = x|X_0 = y).\end{aligned}$$

Cela implique que les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = x)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = x|X_0 = y)$ sont de même nature. Ainsi si x est un état transient, les sommes sont finies et $\{X_n = x$ pour un nombre fini de $n\}$ est presque sûr, et si x est un état récurrent, les sommes sont infinies et $\{X_n = x$ pour une infinité de $n\}$ est presque sûr. □

Le temps moyen de retour d'un état x est défini par

$$\mu(x) = \mathbb{E}[T(x) \mid X_0 = x] \in [0, \infty].$$

Notons que, comme $T(x) \geq 1$, on a $\mu(x) \geq 1$. On pose

$$\boxed{\pi(x) = \frac{1}{\mu(x)}\,.}$$

Proposition 1.5.4. *Soit* $X = (X_n, n \geq 0)$ *une chaîne de Markov irréductible. Pour tout* $x \in E$*, on a*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \pi(x). \tag{1.8}$$

De plus, soit $\pi(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$*, soit* $\pi(x) > 0$ *pour tout* $x \in E$*. Dans ce dernier cas les états sont nécessairement récurrents, et on dit que la chaîne est* ***récurrente positive****. Si* $\pi(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$*, alors soit les états sont transients soit les états sont récurrents. Dans ce dernier cas, on dit que la chaîne est* ***récurrente nulle****.*

Démonstration. Si la chaîne possède un état transient alors tous les états sont transients. Pour tout $x \in E$, on a alors $\mathbb{P}(T(x) = \infty|X_0 = x) > 0$ ainsi que $\mu(x) = +\infty$. D'après (*iii*) du lemme 1.5.3, les variables aléatoires $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}}$ sont finies p.s. et donc p.s. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}} = 0$.

Supposons que la chaîne possède un état récurrent, alors tous les états sont récurrents. Soit alors $x \in E$. D'après (*iii*) du lemme 1.5.3, on visite p.s. un nombre infini de fois l'état x. On peut alors définir les temps de retours successifs en x. On note $T_1 = T(x)$, et par récurrence on définit pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = \inf\{k \geq 1\,; X_{S_n+k} = x\},$$

où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$. Par convention, on pose $S_0 = 0$. Les variables aléatoires $(T_n, n \geq 1)$ sont p.s. finies.

On montre dans un premier temps que T_1 et T_2 sont indépendants. En effet, on a en utilisant la propriété de Markov, et plus particulièrement la proposition 1.1.7, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_1 = k_1, T_2 = k_2 | X_0 = y)\\
&= \mathbb{P}(X_{k_1} = x, X_{k_1+k_2} = x, X_k \neq x\\
&\qquad\qquad \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, k_1 - 1, k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2 - 1\} | X_0 = y)\\
&= \mathbb{P}(X_{k_1} = x, X_k \neq x \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, k_1 - 1\} | X_0 = y)\\
&\qquad\qquad \mathbb{P}(X_{k_1+k_2} = x, X_k \neq x \text{ pour tout } k \in \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2 - 1\}\\
&\qquad\qquad\qquad |X_0 = y, X_k \neq x \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, k_1 - 1\}, X_{k_1} = x)\\
&= \mathbb{P}(X_{k_1} = x, X_k \neq x \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, k_1 - 1\} | X_0 = y)\\
&\qquad\qquad \mathbb{P}(X_{k_2} = x, X_k \neq x \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, k_2 - 1\} | X_0 = x)\\
&= \mathbb{P}(T_1 = k_1 | X_0 = y)\mathbb{P}(T_1 = k_2 | X_0 = x).
\end{aligned}$$

On en déduit que T_1 et T_2 sont indépendants. De plus la loi de T_2 est la loi de T_1 conditionnellement à $X_0 = x$. De manière similaire, on montre que les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_n$ sont indépendantes et que les variables aléatoires $T_2, \ldots, T_n$ ont même loi.

On en déduit donc que les variables aléatoires $(T_n, n \geq 1)$ sont indépendantes, et les variables aléatoires $(T_n, n \geq 2)$ ont même loi que T_1 conditionnellement à $X_0 = x$.

Comme T_1 est fini, on déduit du corollaire A.3.14 que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu(x) \quad \text{p.s.}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère $n(m)$ le nombre de fois où l'on a visité x entre les instants 1 et m soit,

$$n(m) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}}. \tag{1.9}$$

En particulier, on a p.s. $\lim_{m\to\infty} n(m) = \infty$. Remarquons que $n(m)$ est l'unique entier tel que $S_{n(m)} \leq m < S_{n(m)+1}$. Ainsi on a $\dfrac{n(m)}{n(m)+1}\dfrac{n(m)+1}{S_{n(m)+1}} < \dfrac{n(m)}{m} \leq \dfrac{n(m)}{S_{n(m)}}$, et il vient que p.s.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n(m)}{m} = \frac{1}{\mu(x)} = \pi(x). \tag{1.10}$$

On en déduit que p.s.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{X_k=x\}} = \lim_{m\to\infty} \frac{n(m)}{m} = \pi(x).$$

Il reste à vérifier que si $\mu(x) = \infty$, alors $\mu(y) = \infty$ pour tout $y \in E$. Comme la variable aléatoire $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$ est bornée par 1, on déduit du théorème de convergence dominée que pour tout $y \in E$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X_k = y|X_0 = y) = \pi(y).$$

On déduit de (1.7), que si $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X_k = x|X_0 = x) = 0$ (i.e. $\mu(x) = +\infty$), alors $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X_k = y|X_0 = y) = 0$ et donc $\mu(y) = +\infty$. Cela termine la démonstration de la proposition. □

Proposition 1.5.5. *Une chaîne irréductible qui est transiente ou récurrente nulle, ne possède pas de probabilité invariante.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une probabilité invariante ν. Soit X_0 de loi ν. Par convergence dominée, on obtient, en prenant l'espérance dans (1.8), et en utilisant le fait que pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{P}(X_k = x) = \nu(x)$, que $\nu(x) = 0$ pour tout $x \in E$. En particulier, ν n'est pas une probabilité, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de probabilité invariante. □

Si f est une fonction définie sur E soit positive, soit intégrable par rapport à π (i.e. $\sum_{x\in E} \pi(x)\,|f(x)| < \infty$), alors on note

$$(\pi, f) = \sum_{x\in E} \pi(x) f(x).$$

On a le résultat de convergence suivant appelé théorème ergodique.

Théorème 1.5.6. *Soit X une chaîne de Markov sur E, irréductible et récurrente positive. Le vecteur $\pi = (\pi(x), x \in E)$ est l'unique probabilité invariante de la chaîne de Markov. De plus, pour toute fonction f définie sur E, telle que $f \geq 0$ ou $(\pi, |f|) < \infty$, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} (\pi, f). \tag{1.11}$$

La moyenne temporelle est donc égale à la moyenne spatiale par rapport à la probabilité invariante.

Remarque 1.5.7. Ces résultats se simplifient dans le cas où l'espace d'état est fini. En effet, dans ce cas, toute chaîne de Markov irréductible est récurrente positive (comme E est fini, on peut sommer (1.8) pour $x \in E$, et obtenir ainsi que $\sum_{x\in E} \pi(x) = 1$). En particulier, elle possède une unique probabilité invariante, notée π. Remarquons alors que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$, d'après la proposition 1.5.4. ♢

Exemple 1.5.8. Suite de l'exemple 1.1.4. La quantité $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ correspond au stock moyen. Intuitivement, cette quantité converge si la demande est plus forte que les commandes ($\mathbb{E}[D] > q$) et explose sinon. Nous nous contentons de montrer que si la chaîne de Markov $X = (X_n, n \geq 0)$ est irréductible, alors elle possède une unique probabilité invariante dès que $\mathbb{E}[D] > q$. Remarquons que la condition d'irréductibilité est satisfaite par exemple si $\mathbb{P}(D > q) > 0$ et $\mathbb{P}(D = q-1) > 0$. En effet, dans ce cas, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_k = 0|X_0 = k) \geq \mathbb{P}(D_1 > q, \ldots, D_k > q) > 0$$

ainsi que

$$\mathbb{P}(X_k = k|X_0 = 0) \geq \mathbb{P}(D_1 = q-1, \ldots, D_k = q-1) > 0.$$

En particulier, pour tous $k, j \in \mathbb{N}$, on a en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+j} = k|X_0 = j) &\geq \mathbb{P}(X_{k+j} = k, X_j = 0|X_0 = j)\\ &= \mathbb{P}(X_{k+j} = k|X_j = 0, X_0 = j)\mathbb{P}(X_j = 0|X_0 = j)\\ &= \mathbb{P}(X_k = k|X_0 = 0)\mathbb{P}(X_j = 0|X_0 = j) > 0.\end{aligned}$$

La condition d'irréductibilité est donc satisfaite.

Enfin, l'exercice 1.5.9 permet de calculer sur un cas élémentaire la probabilité invariante, et de vérifier que le stock moyen a alors une limite finie dès que $\mathbb{E}[D] > q$.

On suppose que $\mathbb{E}[D] > q > 0$ et que la chaîne de Markov X est irréductible. Pour démontrer qu'elle possède une unique probabilité invariante, il suffit de vérifier, d'après la proposition 1.5.4 et le théorème 1.5.6, que $\mathbb{E}[T|X_0 = 0] < \infty$, où $T = \inf\{n \geq 1\,; X_n = 0\}$ est le premier temps de retours en 0. Pour cela, on introduit une suite auxiliaire définie par $Y_0 = 0$ et $Y_{n+1} = Y_n + q - D_{n+1}$. Remarquons que sur l'événement $\{T > n\}$, on a $X_{k+1} = X_k + q - D_{k+1} = Y_{k+1}$ pour tout $k < n$. En particulier, il vient

$$\mathbb{P}(T > n|X_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 > 0, \ldots, Y_n > 0) \leq \mathbb{P}(Y_n > 0) \leq \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y_n}],$$

pour tout $\lambda \geq 0$. D'autre part, comme $Y_n = nq - \sum_{k=1}^n D_k$, on a

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y_n}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{n\lambda q - \lambda\sum_{k=1}^n D_k}] = \mathrm{e}^{n\lambda q}\, g(\lambda)^n,$$

où $g(\lambda) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda D}]$ est la transformée de Laplace de D. La transformée de Laplace est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, voir le paragraphe A.1.8 en appendice.

On a $g'(\lambda) = -\mathbb{E}[D\,\mathrm{e}^{-\lambda D}]$, et $\lim_{\lambda\to 0^+} g'(\lambda) = -\mathbb{E}[D] < -q$. Donc, pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit, on a $g(\lambda) - 1 < -\lambda q$, et

$$\mathbb{P}(T > n|X_0 = 0) \leq \mathrm{e}^{n\lambda q}\, g(\lambda)^n \leq \mathrm{e}^{n[\lambda q + \log(1-\lambda q)]}.$$

Pour λ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petits, on a $\lambda q + \log(1 - \lambda q) \leq -\varepsilon$ et

$$\mathbb{P}(T > n|X_0 = 0) \leq \mathrm{e}^{-n\varepsilon}.$$

Comme $\mathbb{E}[T|X_0 = 0] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T > n|X_0 = 0)$, cela implique également que $\mathbb{E}[T|X_0 = 0] < \infty$. Cela suffit pour démontrer l'existence d'une unique probabilité invariante. $\lozenge$

Exercice 1.5.9. Suite de l'exemple 1.5.8. On suppose que $q = 1$ et la demande peut prendre trois valeurs : 0,1 ou 2. On pose $p_k = \mathbb{P}(D = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. On suppose que ces trois probabilités sont strictement positives.

1. Vérifier que la chaîne de Markov X est irréductible.
2. Calculer la probabilité invariante si $\mathbb{E}[D] > 1$ (i.e. si $p_2 > p_0$). On pourra s'inspirer des calculs faits au paragraphe 9.2.1, avec $\lambda = p_0$ et $\mu = p_2$.
3. En déduire que si $\mathbb{E}[D] > 1$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ possède une limite p.s. et la calculer.

$\blacklozenge$

Démonstration du théorème 1.5.6. Soit $x \in E$. On considère la suite des temps de retours en x, $(T_n, n \geq 1)$, définie dans la démonstration de la proposition 1.5.4. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$. On introduit les excursions hors de l'état x, c'est-à-dire les variables aléatoires $(Y_n, n \geq 1)$ à valeurs dans $\bigcup_{k\geq 1}\{k\} \times E^{k+1}$ définies par

$$Y_n = (T_n, X_{S_{n-1}}, X_{S_{n-1}+1}, \ldots, X_{S_n}).$$

Un calcul analogue à celui effectué dans la démonstration de la proposition 1.5.4 assure que, pour tout $N \geq 2$, les variables aléatoires $(Y_n, n \in \{1, \ldots, N\})$ sont indépendantes et que les variables aléatoires $(Y_n, n \in \{2, \ldots, N\})$ ont pour loi celle de Y_1 sous $\mathbb{P}(\cdot|X_0 = x)$. En particulier, cela implique que les variables aléatoires $(Y_n, n \geq 1)$ sont indépendantes, et que les variables aléatoires $(Y_n, n \geq 2)$ ont même loi.

Soit f une fonction réelle positive finie définie sur E. On pose

$$F(Y_n) = \sum_{i=1}^{T_n} f(X_{S_{n-1}+i}).$$

Les variables aléatoires $(F(Y_n), n \geq 2)$ sont positives, indépendantes et de même loi. Comme $F(Y_1)$ est positif et fini, on en déduit, grâce au corollaire A.3.14, que p.s. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n F(Y_k) = \mathbb{E}[F(Y_1)|X_0 = x]$. On a bien sûr

$$\mathbb{E}[F(Y_1)|X_0 = x] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{T_1} f(X_i)\Big|X_0 = x\Big]. \tag{1.12}$$

Remarquons que l'on a l'égalité $\displaystyle\frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{S_n} f(X_i) = \frac{n}{S_n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(Y_k)$. Comme p.s. on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{\pi(x)}$, on en déduit que p.s.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{S_n} f(X_i) = \pi(x)\mathbb{E}[F(Y_1)|X_0 = x].$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère l'entier $n(m) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k = x\}}$. En particulier, on a $S_{n(m)} \leq m < S_{n(m)+1}$ et p.s. $\lim_{m\to\infty} n(m) = \infty$. On a les inégalités

$$\frac{S_{n(m)}}{S_{n(m)+1}}\frac{1}{S_{n(m)}}\sum_{i=1}^{S_{n(m)}} f(X_i) \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(X_i) \leq \frac{S_{n(m)+1}}{S_{n(m)}}\frac{1}{S_{n(m)+1}}\sum_{i=1}^{S_{n(m)+1}} f(X_i).$$

Comme $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{n+1}\frac{n}{S_n}\frac{n+1}{n} = 1$ p.s., on en déduit que p.s.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(X_i) = \pi(x)\mathbb{E}[F(Y_1)|X_0 = x]. \tag{1.13}$$

En choisissant $f(z) = \mathbf{1}_{\{z=y\}}$, on déduit de la proposition 1.5.4 et de (1.12), que

$$\pi(y) = \pi(x)\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{T_1}\mathbf{1}_{\{X_i=y\}}\Big|X_0 = x\Big]. \tag{1.14}$$

En sommant sur $y \in E$, il vient par convergence monotone, $\sum_{y\in E}\pi(y) = \pi(x)\mathbb{E}[T_1|X_0 = 1] = 1$. On en déduit que $\pi = (\pi(x), x \in E)$ est une probabilité. Enfin remarquons que grâce à (1.14), et par convergence monotone,

$$\begin{aligned}\pi(x)\mathbb{E}[F(Y_1)|X_0 = x] &= \sum_{y\in E} f(y)\pi(x)\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{T_1}\mathbf{1}_{\{X_i=y\}}\Big|X_0 = x\Big]\\ &= \sum_{y\in E} f(y)\pi(y) = (\pi, f).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Enfin si f est de signe quelconque, on utilise la décomposition $f = f_+ - f_-$, où $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. On déduit de ce qui précède que p.s.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_+(X_i) = (\pi, f_+) \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_-(X_i) = (\pi, f_-).$$

Si $(\pi, |f|)$ est fini, par soustraction des deux termes, on en déduit que p.s.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(X_i) = (\pi, f). \tag{1.16}$$

Vérifions que π est une probabilité invariante. Soit ν la loi de X_0. On pose

$$\bar{\nu}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \nu P^i(x).$$

Par convergence dominée, on déduit de (1.8), en prenant l'espérance, que $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(x) = \pi(x)$ pour tout $x \in E$. Soit f bornée. Par convergence dominée, en prenant l'espérance dans (1.16), il vient

$$(\bar{\nu}_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\pi, f).$$

En choisissant $f(\cdot) = P(\cdot, y)$, on a $(\bar{\nu}_n, f) = \bar{\nu}_n P(y) = \frac{n+1}{n} \bar{\nu}_{n+1}(y) - \frac{1}{n}\, \nu P(y)$. Par passage à la limite, il vient

$$\pi P(y) = \pi(y).$$

On en déduit donc que π est une probabilité invariante. Soit ν une probabilité invariante. Avec les notations précédentes, on obtient alors que $\bar{\nu}_n = \nu$. Or, on a vu que $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(x) = \pi(x)$. Donc $\nu = \pi$ et π est l'unique probabilité invariante. □

On peut généraliser le théorème ergodique à des fonctions multivariées. Pour cela on considère le lemme technique suivant.

Lemme 1.5.10. *Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov sur E, irréductible, récurrente positive, de matrice de transition P et de probabilité invariante π. Soit $p \geq 2$. On pose $\tilde{X}_n = X_{n-p+1}^n$ pour $n \geq p-1$. Soit $\tilde{E} = \{x_1^p \in E^p \,;\, \prod_{k=1}^{p-1} P(x_k, x_{k+1}) > 0\}$. La suite $\tilde{X} = (\tilde{X}_n, n \geq p)$ est une chaîne de Markov sur $\tilde{E}$, irréductible, positive récurrente, de matrice de transition $\tilde{P}(x_1^p, y_1^p) = \mathbf{1}_{\{x_2^p = y_1^{p-1}\}} P(y_{p-1}, y_p)$, et de probabilité invariante $\tilde{\pi}(x_1^p) = \pi(x_1) \prod_{k=1}^{p-1} P(x_k, x_{k+1})$.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que le processus $\tilde{X} = (\tilde{X}_n, n \geq p)$ est une chaîne de Markov irréductible sur $\tilde{E}$ avec la matrice de transition annoncée dans le lemme. Vérifions que la probabilité $\tilde{\pi}(x_1^p) = \pi(x_1) \prod_{k=1}^{p-1} P(x_k, x_{k+1})$

est une probabilité invariante (et aussi la seule d'après la proposition 1.5.5 et le théorème 1.5.6). En effet, il vient pour $y_1^p \in \tilde{E}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}\tilde{P}(y_1^p) &= \sum_{x_1^p \in \tilde{E}} \tilde{\pi}(x_1^p)\tilde{P}(x_1^p, y_1^p) \\
&= \sum_{x_1^p \in E^p} \pi(x_1) \prod_{k=1}^{p-1} P(x_k, x_{k+1}) \mathbf{1}_{\{x_2^p = y_1^{p-1}\}} P(y_{p-1}, y_p) \\
&= \sum_{x_2^p \in E^p} \pi(x_2) \prod_{k=2}^{p-1} P(x_k, x_{k+1}) \mathbf{1}_{\{x_2^p = y_1^{p-1}\}} P(y_{p-1}, y_p) \\
&= \pi(y_1) \prod_{k=1}^{p-2} P(y_k, y_{k+1}) P(y_{p-1}, y_p) \\
&= \tilde{\pi}(y_1^p),
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé $\sum_{x_1 \in E} \pi(x_1)P(x_1, x_2) = \pi(x_2)$ pour la troisième égalité. □

Le corollaire suivant est alors une conséquence directe du théorème ergodique et du lemme 1.5.10.

Corollaire 1.5.11. *Soit $p \geq 1$. Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov sur E, irréductible, récurrente positive, de matrice de transition P et de probabilité invariante π. Pour toute fonction g définie sur E^p, positive ou telle que $\sum_{x_1^p = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p} |g(x_1^p)| \, \pi(x_1) \prod_{k=1}^{p-1} P(x_k, x_{k+1}) < \infty$, alors on a*

$$
\frac{1}{n} \sum_{k=p}^{n} g(X_{k-p+1}^k) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \sum_{x_1^p \in E^p} g(x_1^p)\pi(x_1) \prod_{k=1}^{p-1} P(x_k, x_{k+1}).
$$

Nous aurons également besoin dans le prochain paragraphe des formules suivantes. Soit g une fonction définie sur E^2 positive ou bien telle que $\sum_{y \in E} |g(x, y)| \, P(x, y) < \infty$, alors on note

$$
Pg(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)g(x, y).
$$

Lemme 1.5.12. *Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov sur E, irréductible, récurrente positive, de matrice de transition P et de probabilité invariante π. Soit f une fonction réelle définie sur E, positive ou bien telle que $(\pi, |f|) < \infty$. Alors on a*

$$
\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T(x)} f(X_k) \Big| X_0 = x \Big] = \frac{(\pi, f)}{\pi(x)},
$$

où $T(x)$ est le temps de retour en x. Soit g une fonction réelle définie sur E^2, positive ou bien telle que $(\pi, P\,|g|) < \infty$. Alors on a

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T(x)} g(X_{k-1}, X_k)\Big| X_0 = x\Big] = \frac{(\pi, Pg)}{\pi(x)}.$$

Démonstration. La première égalité se déduit de (1.12) et de (1.15).

Pour la deuxième égalité, on reprend la démonstration du théorème 1.5.6 en remplaçant $F(Y_n)$, où $Y_n = (T_n, X_{S_{n-1}}, X_{S_{n-1}+1}, \ldots, X_{S_n})$ est la n-ième excursion hors de l'état x, par

$$G(Y_n) = \sum_{i=1}^{T_n} g(X_{S_{n-1}+i-1}, X_{S_{n-1}+i}).$$

Des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du théorème 1.5.6 assurent l'analogue de (1.13) : p.s. on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{m} g(X_{i-1}, X_i) = \pi(x)\mathbb{E}[G(Y_1)|X_0 = x],$$

et $\mathbb{E}[G(Y_1)|X_0 = x] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T(x)} g(X_{k-1}, X_k)\Big| X_0 = x\Big]$. D'autre part, le corollaire 1.5.11, avec $p = 2$, assure que p.s.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{m} g(X_{i-1}, X_i) = (\pi, Pg).$$

On en déduit donc la deuxième égalité du lemme. □

1.6 Théorème central limite

On peut dans certains cas préciser la vitesse de convergence dans le théorème ergodique à l'aide du théorème central limite (TCL) pour les chaînes de Markov. C'est l'objet de ce paragraphe.

On considère une chaîne de Markov sur E, $X = (X_n, n \geq 0)$, irréductible, récurrente positive, de matrice de transition P et de probabilité invariante π. Rappelons la notation introduite à la fin du paragraphe précédent : si g est une fonction définie sur E^2 soit positive, soit telle que $\sum_{y\in E} |g(x, y)|\, P(x, y) < \infty$, alors on note

$$Pg(x) = \sum_{y\in E} P(x, y)g(x, y).$$

Théorème 1.6.1. *Soit g une fonction définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $(\pi, P\,|g|) < \infty$ et il existe $x \in E$ avec $s(x)^2 = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{T(x)} [g(X_{k-1}, X_k) - (\pi, Pg)]\Big)^2 \big| X_0 = x\Big]$ fini. On note $\sigma^2 = \pi(x)s(x)^2$. Pour toute loi initiale de X_0, on a*

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_{k-1}, X_k) - (\pi, Pg)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{\textit{Loi}}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Si on choisit g de la forme $g(x,y) = f(y)$, alors on a $(\pi, Pg) = (\pi, f)$ dès que f est positive ou $(\pi, |f|)$ est fini. Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème précédent.

Corollaire 1.6.2. *Si $(\pi, |f|) < \infty$ et s'il existe $x \in E$ tel que $s(x)^2 = \mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{T(x)}[f(X_k) - (\pi, f)])^2 | X_0 = x] < \infty$, alors on a*

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - (\pi, f)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 = s(x)^2\pi(x)$.

Démonstration du théorème 1.6.1. On reprend les notations de la démonstration du théorème 1.5.6. On pose pour $n \geq 1$

$$G(Y_n) = \sum_{r=1}^{T_n}[g(X_{S_{n-1}+r-1}, X_{S_{n-1}+r}) - (\pi, Pg)].$$

Les variables aléatoires $(G(Y_n), n \geq 2)$ sont indépendantes, de même loi et de carré intégrable avec, pour $n \geq 2$, $\mathbb{E}[G(Y_n)^2] = s(x)^2$. La définition $\pi(x) = 1/\mu(x)$ et la deuxième égalité du lemme 1.5.12 impliquent que pour $n \geq 2$, $\mathbb{E}[G(Y_n)] = 0$. On déduit du théorème central limite que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n} G(Y_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{Loi}} \mathcal{N}(0, s(x)^2).$$

Toujours en utilisant la notation $n(m)$ définie dans (1.9), on a $S_{n(m)} \leq m < S_{n(m)+1}$, et

$$\begin{aligned}
&\sqrt{m}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=2}^{n(m)} G(Y_k) + \frac{1}{\sqrt{m}} G(Y_1) + \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=S_{n(m)}+1}^{m}[g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)].
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{m\to\infty} n(m)/m = \pi(x)$ p.s., d'après (1.10), on déduit du théorème de Slutsky A.3.12 que

$$\sqrt{\frac{n(m)}{m}}\frac{1}{\sqrt{n(m)}}\sum_{k=2}^{n(m)} G(Y_k) \xrightarrow[m\to\infty]{\textbf{Loi}} \sqrt{\pi(x)}\mathcal{N}(0, s(x)^2) = \mathcal{N}(0, s(x)^2\pi(x)).$$

Comme $S_{n(m)} \leq m < S_{n(m)+1}$, on a la majoration suivante

$$\left| \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=S_{n(m)+1}}^{m} [g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)] \right| \\ \leq \sqrt{\frac{n(m)}{S_{n(m)}}} \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \sum_{i=S_{n(m)}+1}^{S_{n(m)+1}} |g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)| \,.$$

On pose $Z_n = \sum_{i=S_n+1}^{S_{n+1}} |g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)|$ pour tout $n \geq 2$. Les variables $(Z_n, n \geq 2)$ sont indépendantes et de même loi. De plus on a, grâce à la deuxième égalité du lemme 1.5.12,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{T(x)} |g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)| \,\Big| X_0 = x \Big] \\ &= (\pi, P\,|g - (\pi, Pg)|)/\pi(x). \end{aligned}$$

On déduit de l'inégalité $|Pg| \leq P\,|g|$ et de l'invariance de la probabilité π, que $(\pi, P\,|g - (\pi, Pg)|) \leq (\pi, P(|g| + |(\pi, Pg)|)) \leq 2(\pi, P\,|g|) < \infty$. De l'inégalité $\mathbb{P}(n^{-1/2} Z_n > \varepsilon) \leq n^{-1/2}\mathbb{E}[Z_n]/\varepsilon$, on déduit que la suite $(n^{-1/2} Z_n, n \geq 1)$ converge en probabilité vers 0. Comme $(S_{n(m)}/m, m \geq 1)$ converge p.s. vers 1, cela implique que la suite $(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=S_{n(m)+1}}^{m} [g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)], m \geq 1)$ converge en probabilité vers 0. Bien sûr, $(\frac{1}{\sqrt{m}} G(Y_1), m \geq 1)$ converge en probabilité vers 0. On déduit du théorème de Slutsky A.3.12 que

$$\sqrt{m} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} g(X_{k-1}, X_k) - (\pi, Pg) \right) \xrightarrow[n \to \infty]{\textbf{Loi}} \mathcal{N}(0, s(x)^2 \pi(x)).$$

On a démontré ce résultat, pour toute loi initiale de X_0. □

On peut expliciter dans le théorème précédent la valeur de σ^2 dans le cas particulier, qui nous sera utile au Chap. 6, où $g(x, y) = h(x, y) - Ph(x)$. Remarquons que, si $(\pi, P\,|h|) < \infty$, alors on a $(\pi, Pg) = (\pi, Ph) - (\pi, P(Ph)) = 0$, car π est une probabilité invariante.

Comme $(P(x, y), y \in E)$ est une probabilité sur E, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$(Ph)^2(x) = \Big(\sum_{y \in E} P(x, y) h(x, y) \Big)^2 \leq \sum_{y \in E} P(x, y) h(x, y)^2 = Ph^2(x).$$

En particulier si $(\pi, Ph^2) < \infty$ alors $(\pi, (Ph)^2) < \infty$.

Proposition 1.6.3. *Soit h une fonction définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $(\pi, Ph^2) < \infty$. Pour toute loi initiale de X_0, on a*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [h(X_{k-1}, X_k) - Ph(X_{k-1})] \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 = (\pi, Ph^2) - (\pi, (Ph)^2)$.

Remarque 1.6.4. On désire calculer explicitement la valeur de σ^2, grâce à la proposition précédente, pour le cas particulier du corollaire 1.6.2, où $g(x, y) = f(y)$. Pour cela, on admet que si $(\pi, |f|) < \infty$, alors il existe, à une constante additive près, une unique fonction F telle que $(\pi, |F|) < \infty$ et F est solution de l'équation de Poisson : pour tout $x \in E$,

$$F(x) - PF(x) = f(x) - (\pi, f),$$

où $PF(x) = \sum_{z\in E} P(x, z)F(z)$. Comme $(\pi, P\,|F|) = (\pi, |F|) < \infty$, on remarque que $P\,|F|$ ainsi que PF sont bien définis, et donc l'équation de Poisson a un sens. On pourra consulter le Chap. 9 de [6] pour l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de Poisson. Si on suppose de plus que $(\pi, F^2) < \infty$, alors on peut appliquer la proposition 1.6.3 avec $h(x, y) = F(y)$ et en déduire que

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - (\pi, f)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 = (\pi, Ph^2) - (\pi, (Ph)^2) = (\pi, F^2) - (\pi, (PF)^2)$. En pratique on utilise le TCL pour donner un intervalle de confiance pour l'estimation de (π, f) par la simulation de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$. La variance σ^2, qui intervient dans l'intervalle de confiance, ne peut être directement estimée sur la simulation d'une seule réalisation car cela nécessite de résoudre l'équation de Poisson. Cette difficulté nous conduira à utiliser la proposition 1.6.3 plutôt que le résultat apparemment plus naturel du corollaire 1.6.2. ♢

Démonstration de la proposition 1.6.3. On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$(\pi, |Ph|) \leq (\pi, P\,|h|) \leq (\pi, Ph^2)^{1/2} < \infty.$$

Ainsi, si on pose pour $x, y \in E$, $g(x, y) = h(x, y) - Ph(x)$, on a $(\pi, P\,|g|) < \infty$. En utilisant le fait que π est invariante, il vient $(\pi, Pg) = (\pi, Ph) - (\pi, P(Ph)) = 0$. Pour appliquer le théorème 1.6.1, il faut vérifier que

$$s(x)^2 = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{T(x)} [h(X_{k-1}, X_k) - Ph(X_{k-1})]\Big)^2 \Big| X_0 = x\Big]$$

est fini. Puis il faut calculer la valeur de $s(x)^2$ pour conclure la démonstration. (Les arguments qui suivent sont inspirés de la démonstration du TCL ergodique à partir de la théorie des martingales, voir par exemple [5]. Comme nous avons choisi de ne pas recourir aux martingales, nous retrouvons par le calcul certains résultats intermédiaires qui sont des conséquences bien connues des propriétés des martingales.) On pose $H_k = h(X_{k-1}, X_k) - Ph(X_{k-1})$ et $M_n = \sum_{k=1}^{T(x)\wedge n} H_k$ avec la convention $M_0 = 0$ et $a \wedge b = \min(a, b)$. On définit $M = \sum_{k=1}^{T(x)} H_k = \lim_{n\to\infty} M_n$. On désire donc calculer $\mathbb{E}[M^2|X_0 = x] = s(x)^2$. Pour cela, dans une première étape on calcule $\mathbb{E}[H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq l\}}|X_0 = x]$ pour $k \leq l$, puis $\mathbb{E}[M_n^2]$. On vérifiera dans une seconde étape que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[M^2]$.

Première étape. On suppose $1 \leq k < l$, et on remarque que l'événement $\{T(x) \geq l\}$ peut aussi s'écrire $\{X_r \neq x, \forall r \in \{1, \ldots, l-1\}\}$. En conditionnant par rapport aux valeurs de X_0^{l-1}, on obtient que pour $x_0^{l-1} \in E^l$, avec $x_0 = x$, s'il existe $r \in \{1, \ldots, l-1\}$ tel que $x_r = x$, alors

$$\mathbb{E}[H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq l\}}|X_0^{l-1} = x_0^{l-1}] = 0,$$

et si $x_r \neq x$ pour tout $r \in \{1, \ldots, l-1\}$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq l\}}|X_0^{l-1} = x_0^{l-1}] \\
&\quad = \mathbb{E}[(h(x_{k-1}, x_k) - Ph(x_{k-1}))(h(x_{l-1}, X_l) - Ph(x_{l-1}))|X_0^{l-1} = x_0^{l-1}] \\
&\quad = (h(x_{k-1}, x_k) - Ph(x_{k-1}))\mathbb{E}[h(x_{l-1}, X_l) - Ph(x_{l-1})|X_0^{l-1} = x_0^{l-1}] \\
&\quad = (h(x_{k-1}, x_k) - Ph(x_{k-1}))\mathbb{E}[h(x_{l-1}, X_l) - Ph(x_{l-1})|X_{l-1} = x_{l-1}] \\
&\quad = (h(x_{k-1}, x_k) - Ph(x_{k-1}))(Ph(x_{l-1}) - Ph(x_{l-1})) \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété de Markov pour la troisième égalité. Il vient donc en multipliant $\mathbb{E}[H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq l\}}|X_0^{l-1} = x_0^{l-1}] = 0$ par $\mathbb{P}(X_0^{l-1} = x_0^{l-1}|X_0 = x)$ et en sommant sur $x_1^{l-1} \in E^{l-1}$ que, pour $1 \leq k < l$,

$$\mathbb{E}[H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq l\}}|X_0 = x_0] = 0. \tag{1.17}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[M_n^2|X_0 = x] \\
&\qquad = \mathbb{E}\Big[\sum_{1\leq k,l\leq n} H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq \max(k,l)\}}\Big|X_0 = x_0\Big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T(x)\wedge n} H_k^2\Big|X_0 = x_0\Big] + 2\sum_{1\leq k<l\leq n} \mathbb{E}[H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq l\}}|X_0 = x_0] \\
&\qquad = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T(x)\wedge n} H_k^2\Big|X_0 = x_0\Big].
\end{aligned}$$

En particulier, on déduit du théorème de convergence monotone puis de la deuxième égalité du lemme 1.5.12 que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2|X_0 = x] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T(x)} (h(X_{k-1}, X_k) - Ph(X_{k-1}))^2 \Big| X_0 = x_0\Big]\\ &= \frac{1}{\pi(x)}(\pi, P((h-Ph)^2)),\end{aligned}$$

avec la convention $(h - Ph)(x, y) = h(x, y) - Ph(x)$. Remarquons que

$$(\pi, P((h-Ph)^2)) = (\pi, Ph^2) - 2(\pi, P(hPh)) + (\pi, P(Ph)^2).$$

Comme pour tout $x \in E$, $P(hPh)(x) = \sum_{y\in E} P(x, y)h(x, y)Ph(x) = (Ph(x))^2$ et π est invariante, on obtient $(\pi, P((h - Ph)^2)) = (\pi, Ph^2) - (\pi, (Ph)^2)$, et cette quantité est finie. On a ainsi obtenu que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2|X_0 = x] = \frac{(\pi, Ph^2) - (\pi, (Ph)^2)}{\pi(x)}.$$

Seconde étape. Nous vérifions que $\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} M_n^2|X_0 = x] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2|X_0 = x]$. Pour cela, on remarque que pour $m \geq n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_m - M_n)^2|X_0 = x] &= \sum_{n+1\leq k,l\leq m} \mathbb{E}[H_k H_l \mathbf{1}_{\{T(x)\geq \max(k,l)\}}|X_0 = x]\\ &= \sum_{n+1\leq k\leq m} \mathbb{E}[H_k^2 \mathbf{1}_{\{T(x)\geq k\}}|X_0 = x]\\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=T(x)\wedge(n+1)}^{T(x)\wedge m} H_k^2 \Big| X_0 = x\Big],\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (1.17) pour la deuxième égalité. On en déduit que

$$\sup_{m\geq n} \mathbb{E}[(M_m - M_n)^2|X_0 = x] \leq \mathbb{E}\Big[\sum_{k=T(x)\wedge(n+1)}^{T(x)} H_k^2 \Big| X_0 = x\Big].$$

Par convergence dominée, on obtient que $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} \mathbb{E}[(M_m - M_n)^2|X_0 = x] = 0$. Le lemme de Fatou A.1.17 implique

$$\liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}[(M_m - M_n)^2|X_0 = x] \geq \mathbb{E}[(M - M_n)^2|X_0 = x].$$

On en déduit donc que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(M - M_n)^2|X_0 = x] = 0.$$

Comme $\left|M^2 - M_n^2\right| \leq (M - M_n)^2 + 2\,|M_n|\,|M - M_n|$, il vient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\left|M^2 - M_n^2\right| |X_0 = x] \\ &\quad \leq \mathbb{E}[(M - M_n)^2|X_0 = x] + 2\mathbb{E}[M_n^2|X_0 = x]^{1/2}\mathbb{E}[(M - M_n)^2|X_0 = x]^{1/2}\end{aligned}$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\left|M^2 - M_n^2\right| |X_0 = x] = 0$. En particulier, cela implique $\mathbb{E}[M^2|X_0 = x] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2|X_0 = x]$.

En conclusion, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma^2 = s(x)^2\pi(x) &= \mathbb{E}[M^2|X_0 = x]\pi(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2|X_0 = x]\pi(x) \\ &= (\pi, Ph^2) - (\pi, (Ph)^2),\end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de la définition de M, la troisième de la seconde étape, et la quatrième de la première étape. □

On a le corollaire suivant pour une version vectorielle de la proposition 1.6.3.

Corollaire 1.6.5. *Soit $h = (h_1, \ldots, h_d)$ une fonction vectorielle définie sur E^2. On note $\|h\|^2 = \sum_{i=1}^d h_i^2$. Si $(\pi, P\|h\|^2)$ est fini, on a la convergence en loi suivante :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n [h(X_{k-1}, X_k) - Ph(X_{k-1})] \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{Loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

où $Ph = (Ph_1, \ldots, Ph_d)$ et la matrice $\Sigma = (\Sigma_{i,j}, 1 \leq i, j \leq d)$ est définie par

$$\Sigma_{i,j} = (\pi, P(h_i h_j)) - (\pi, (Ph_i)(Ph_j)).$$

Démonstration. Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose $h_\lambda = \sum_{i=1}^d \lambda_i h_i$. Comme $(\pi, P\|h\|^2) < \infty$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $(\pi, Ph_\lambda^2) < \infty$, et l'on déduit de la proposition 1.6.3 que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n [h_\lambda(X_{k-1}, X_k) - Ph_\lambda(X_{k-1})] \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma_\lambda^2),$$

avec $\sigma_\lambda^2 = (\pi, Ph_\lambda^2) - (\pi, (Ph_\lambda)^2)$, ce qui implique le corollaire. □

Références

1. P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
2. A.A. Borovkov. *Ergodicity and stability of stochastic processes.* John Wiley & Sons, Chichester, 1998.

3. P. Brémaud. *Markov chains. Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues.* Springer texts in applied mathematics. Springer, 1998.
4. K. Chung. *Markov chains with stationary transition probabilities.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, seconde édition, 1967.
5. M. Duflo. *Random iterative models*, volume 34 d'*Applications of Mathematics.* Springer, Berlin, 1997.
6. E.A. Feinberg et A. Shwartz, editors. *Handbook of Markov decision processes. Methods and applications.* International Series in Operations Research & Management Science. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.
7. J. Lacroix. *Chaînes de Markov et processus de Poisson.* Cours de DEA, Paris VI, `http://www.proba.jussieu.fr/supports.php`, 2002.
8. P. Mazliak, L. Priouret et P. Baldi. *Martingales et chaînes de Markov.* Hermann, 1998.
9. S.P. Meyn et R.L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability.* Springer-Verlag, London, 1993.
10. B. Ycart. *Modèles et algorithmes markoviens*, volume 39 de *Mathématiques & Applications.* Springer, Berlin, 2002.