E

Étude d'une équation différentielle ordinaire

Cet appendice est consacré à l'étude d'une équation différentielle ordinaire à coefficients affines.

Proposition E.1. *Soit $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, et $g, h : [0,T] \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables intégrables sur $[0,T]$. Alors l'équation*

$$\forall t \in [0,T],\ f(t) = x + \int_0^t g(s)ds + \int_0^t h(s)f(s)ds \tag{E.1}$$

admet comme unique solution continue sur $[0,T]$ la fonction

$$\varphi(t) = x \exp\left(\int_0^t h(r)dr\right) + \int_0^t g(s) \exp\left(\int_s^t h(r)dr\right) ds.$$

Remarque E.2.
- Si f est une fonction mesurable bornée sur $[0,T]$, alors la fonction $s \to g(s) + h(s)f(s)$, est intégrable sur $[0,T]$. Si en outre f est solution de (E.1), on en déduit que f est une fonction continue sur $[0,T]$. Ainsi l'unicité reste vraie dans la classe plus large des fonctions bornées sur $[0,T]$.
- Pour le choix $x = 1$, $g \equiv 0$ et $h \equiv -\lambda$ avec λ intégrable sur $[0,T]$, on en déduit que $\varphi(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(r)dr\right)$ vérifie $\varphi(t') = \varphi(t) - \int_t^{t'} \lambda(s)\varphi(s)ds$ pour $0 \leq t \leq t' \leq T$. Cette égalité est utilisée dans le Chap. 10 consacré à la fiabilité sous la forme

$$\int_t^{t'} \lambda(s) \exp\left(-\int_0^s \lambda(r)dr\right) ds = \exp\left(-\int_0^t \lambda(r)dr\right) - \exp\left(-\int_0^{t'} \lambda(r)dr\right). \tag{E.2}$$

– Lorsque les fonctions g et h sont continues sur $[0,T]$, la démonstration de la proposition E.1 est élémentaire. Soit en effet f une solution continue sur $[0,T]$. Comme la fonction $s \to g(s)+h(s)f(s)$ est continue sur $[0,T]$, on déduit de (E.1) que la fonction f est continûment dérivable sur $[0,T]$ et vérifie

$$\forall s \in [0,T],\ f'(s) = g(s) + h(s)f(s).$$

Donc pour tout s dans $[0,T]$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left[f(s)\exp\left(-\int_0^s h(r)dr\right)\right] &= (f'(s) - h(s)f(s))\exp\left(-\int_0^s h(r)dr\right) \\ &= g(s)\exp\left(-\int_0^s h(r)dr\right). \end{aligned}$$

En intégrant cette équation sur $[0,t]$, puis en multipliant le résultat par $\exp\left(\int_0^t h(r)dr\right)$, il vient

$$f(t) = \exp\left(\int_0^t h(r)dr\right)\left(x + \int_0^t g(s)\exp\left(-\int_0^s h(r)dr\right)ds\right) = \varphi(t).$$

Inversement, $\varphi(t)$ est une fonction continûment dérivable sur $[0,T]$ et en dérivant par rapport à t son expression donnée dans l'égalité précédente, on obtient qu'elle satisfait (E.1).

$\diamondsuit$

Pour démontrer la proposition dans le cas général, nous utiliserons le lemme suivant qui intervient également dans le Chap. 10.

Lemme E.3. *Soit $s \leq t$ et γ une fonction mesurable positive ou intégrable sur $[s,t]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$, on a*

$$\int_{s \leq s_{\sigma(1)} \leq s_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq s_{\sigma(n)} \leq t} \gamma(s_1)\ldots\gamma(s_n)ds_1\ldots ds_n = \frac{1}{n!}\left(\int_s^t \gamma(r)dr\right)^n.$$

Démonstration du lemme E.3. Par symétrie, la valeur I de l'intégrale

$$\int_{s \leq s_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq s_{\sigma(n)} \leq t} \gamma(s_1)\ldots\gamma(s_n)ds_1\ldots ds_n$$

ne dépend pas de σ. On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n}\int_{s \leq s_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq s_{\sigma(n)} \leq t} \gamma(s_1)\ldots\gamma(s_n)ds_1\ldots ds_n \\ &= \frac{1}{n!}\int_{[s,t]^n} \gamma(s_1)\ldots\gamma(s_n)ds_1\ldots ds_n = \frac{1}{n!}\left(\int_s^t \gamma(r)dr\right)^n. \end{aligned}$$

$\square$

Démonstration de la proposition E.1. On note $\mathcal{C}_T$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ et $\Phi : \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}_T$ l'application définie par

$$\Phi(f)(t) = x + \int_0^t g(s)ds + \int_0^t h(s)f(s)ds.$$

Une fonction φ élément de $\mathcal{C}_T$ est solution de (E.1) si et seulement si c'est un point fixe de Φ.
Pour $f, \tilde{f} \in \mathcal{C}_T$, on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\sup_{r\leq t} |\Phi(f)(r) - \Phi(\tilde{f})(r)| \leq \int_0^t |h(s_1)| \sup_{u\leq s_1} |f(u) - \tilde{f}(u)|ds_1.$$

En itérant cette inégalité, on obtient que la composée n-ième Φ^n de Φ vérifie

$$\begin{aligned}
&\sup_{r\leq t} |\Phi^n(f)(r) - \Phi^n(\tilde{f})(r)| \\
&\quad\leq \int_{0\leq s_n\leq s_{n-1}\leq\ldots\leq s_1\leq t} |h(s_1)\ldots h(s_n)| \sup_{u\leq s_n} |f(u) - \tilde{f}(u)|ds_n \ldots ds_1 \\
&\quad\leq \sup_{u\leq t} |f(u) - \tilde{f}(u)| \int_{0\leq s_n\leq s_{n-1}\leq\ldots\leq s_1\leq t} |h(s_1)\ldots h(s_n)|ds_n \ldots ds_1.
\end{aligned}$$

Avec le lemme E.3, on en déduit que

$$\sup_{r\leq T} |\Phi^n(f)(r) - \Phi^n(\tilde{f})(r)| \leq \frac{1}{n!} \left(\int_0^T |h(s)|ds\right)^n \sup_{u\leq T} |f(u) - \tilde{f}(u)|.$$

Pour N assez grand pour que $\left(\int_0^T |h(s)|ds\right)^N < N!$, l'application Φ^N est contractante. Comme $\mathcal{C}_T$ muni de la norme uniforme est un espace complet, on déduit du théorème de point fixe de Picard que Φ^N admet un unique point fixe φ. Comme $\Phi(\varphi) = \Phi(\Phi^N(\varphi)) = \Phi^N(\Phi(\varphi))$, on a $\Phi(\varphi) = \varphi$ i.e. φ est point fixe de Φ. Comme tout point fixe de Φ est point fixe de Φ^N, on conclut que Φ admet φ comme unique point fixe, c'est-à-dire que (E.1) admet une unique solution φ.
Pour identifier φ, on écrit $\varphi = \Phi^n(\varphi)$ c'est-à-dire que pour tout t dans $[0,T]$,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = {}& x\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{0\leq s_k\leq\ldots\leq s_1\leq t} h(s_k)\ldots h(s_1)ds_k \ldots ds_1\right) \\
&+ \int_0^t g(s)\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{s\leq s_k\leq\ldots\leq s_1\leq t} h(s_k)\ldots h(s_1)ds_k \ldots ds_1\right) ds \\
&+ \int_{0\leq s_n\leq s_{n-1}\leq\ldots\leq s_1\leq t} h(s_n)\varphi(s_n)h(s_{n-1})\ldots h(s_1)ds_n ds_{n-1} \ldots ds_1,
\end{aligned} \tag{E.3}$$

formule que l'on peut vérifier par récurrence sur n. D'après le lemme E.3, le premier terme du second membre est égal à $x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_0^t h(s)ds \right)^k$ et converge vers $x \exp \left(\int_0^t h(s)ds \right)$ lorsque n tend vers l'infini.
Toujours d'après le lemme E.3, le second terme du second membre est égal à $\int_0^t g(s) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_s^t h(r)dr \right)^k ds$. Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_s^t h(r)dr \right)^k$ converge vers $\exp \left(\int_s^t h(r)dr \right)$ lorsque n tend vers l'infini et

$$\left| g(s) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_s^t h(r)dr \right)^k \right| \leq |g(s)| \exp \left(\int_s^t |h(r)|dr \right)$$

où le membre de droite est intégrable sur $[0,t]$ par intégrabilité de g et h. Le théorème de convergence dominée assure donc que le second terme du second membre de (E.3) tend vers $\int_0^t g(s) \exp \left(\int_s^t h(r)dr \right) ds$ lorsque n tend vers l'infini.

Enfin la valeur absolue du troisième terme du second membre est majorée par $\sup_{r \leq t} |\varphi(r)| \left(\int_0^t |h(s)|ds \right)^n / n!$, ce qui assure que ce terme tend vers 0. En faisant tendre n vers l'infini dans (E.3), on conclut donc que

$$\forall t \in [0,T],\ \varphi(t) = x \exp \left(\int_0^t h(s)ds \right) + \int_0^t g(s) \exp \left(\int_s^t h(r)dr \right) ds.$$

$\square$