D

Convergence en variation sur un espace discret

Soit $\nu = (\nu(x), x \in E)$ une mesure signée (ou vecteur) sur E, espace dénombrable, muni de la topologie discrète. La norme en variation de ν est définie par $\|\nu\| = \frac{1}{2}\sum_{x\in E} |\nu(x)|$. Cela correspond à la moitié de la norme L^1 de ν vu comme vecteur de $\mathbb{R}^E$.

Définition D.1. *On dit qu'une suite de mesures $(\nu_n, n \geq 1)$ converge en variation vers ν si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \|\nu_n - \nu\| = 0$.*

Lemme D.2. *Soit $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. On note $\nu_n = (\nu_n(x) = \mathbb{P}(Y_n = x), x \in E)$ la loi de Y_n. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans E de loi $\nu = (\nu(x) = \mathbb{P}(Y = x), x \in E)$. Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :*

(i) La suite $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers Y.

(ii) Pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(x) = \nu(x)$.

(iii) La suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en variation vers ν.

Démonstration. Nous démontrons les implications suivantes : $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

On note x_k, $k \in \mathbb{N}^*$, les éléments de E.

On suppose (i). Comme E est muni de la topologie discrète, toutes les fonctions réelles sur E sont continues. Donc, pour toute fonction réelle bornée f définie sur E, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(Y_n)] = \mathbb{E}[f(Y)]$. En prenant $f(y) = \mathbf{1}_{\{y=x_k\}}$, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(x_k) = \nu(x_k).$$

Donc (i) implique (ii).

Montrons que (ii) implique (iii). On suppose (ii). On a alors pour $K \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\nu_n - \nu\| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} |\nu_n(x_k) - \nu(x_k)| + \frac{1}{2}\sum_{k\geq K+1} (\nu_n(x_k) + \nu(x_k)).$$

Comme ν et ν_n sont des probabilités, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq K+1} \nu_n(x_k) = 1 - \sum_{k=1}^{K} \nu_n(x_k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \nu(x_k) - \sum_{k=1}^{K} \nu_n(x_k) \\ &\leq \sum_{k\geq K+1} \nu(x_k) + \sum_{k=1}^{K} |\nu_n(x_k) - \nu(x_k)|.\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\|\nu_n - \nu\| \leq \sum_{k=1}^{K} |\nu_n(x_k) - \nu(x_k)| + \sum_{k\geq K+1} \nu(x_k).$$

Le second terme du membre de droite est arbitrairement petit (uniformément en n) pour K grand tandis qu'à K fixé, le premier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc $\lim_{n\to+\infty} \|\nu_n - \nu\| = 0$ et (ii) implique (iii).

Il reste donc à démontrer que (iii) implique (i). Cela découle de l'inégalité $|\mathbb{E}[f(Y_n)] - \mathbb{E}[f(Y)]| \leq 2\,\|\nu_n - \nu\| \sup_{k\in\mathbb{N}^*} |f(x_k)|$. $\square$