MATHÉMATIQUES
&
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :
G. Allaire et M. Benaïm

57

Jean-François Delmas
Benjamin Jourdain

Modèles aléatoires

Applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant

Springer

Jean-François Delmas
Benjamin Jourdain

École Nationale des Ponts et Chaussées
CERMICS
6 et 8, avenue Blaise Pascal
Cité Descartes - Champs-sur-Marne
77455 Marne-la-Vallée Cedex 2
France
e-mail: delmas@cermics.enpc.fr;
jourdain@cermics.enpc.fr

Library of Congress Control Number: 2006924181

Mathematics Subject Classification (2000): 60J10, 60J27, 60J80, 60K20, 60G70, 49L20, 62F12, 62N05, 90C15, 90B22, 90B25, 90B05, 92D20, 92D25, 92B15

ISSN 1154-483X
ISBN-10 3-540-33282-0 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-33282-4 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media

springer.com
Imprimé aux Pays-Bas

Imprimé sur papier non acide 3100/SPi - 5 4 3 2 1 0 -

À Ginger, Vickie et Gautier
À Erwan et Alexy

Préface

Ce livre reprend les notes d'un cours que nous enseignons à l'École Nationale des Ponts et Chaussées depuis l'année 2000. L'objectif de ce cours est de montrer comment des modèles aléatoires élémentaires permettent d'apporter des éléments de réponse intéressants et de se forger une intuition sur des problèmes concrets. Nous abordons plusieurs thèmes traditionnels des métiers d'ingénieur : algorithmes d'optimisation, gestion des approvisionnements, dimensionnement de files d'attente, fiabilité et dimensionnement d'ouvrages à l'aide des lois de valeurs extrêmes. Nous avons également choisi de regarder des problématiques plus récentes, voire en cours de développement. Ainsi, nous présentons des résultats sur l'étude de l'ADN : recherche de séquences exceptionnelles, de zones homogènes et estimation du taux de mutation. Nous proposons aussi une introduction aux phénomènes de coagulation qui interviennent dans la croissance des molécules de polymères ou d'aérosols. Les outils probabilistes que nous présentons pour modéliser les phénomènes considérés dans ce livre, comme les chaînes de Markov, les processus de renouvellement ou les lois de valeurs extrêmes, sont des outils généraux utilisés dans bien d'autres domaines des sciences de l'ingénieur, des sciences du vivant, de la physique, de la finance mathématique ou de l'assurance.

Le prérequis pour la lecture de ce livre est la maîtrise du contenu d'un cours d'initiation aux probabilités en première année d'école d'ingénieurs ou en troisième année du cycle Licence. Nous avons choisi d'utiliser des outils élémentaires afin que le livre soit accessible aux étudiants qui ne se destinent pas aux mathématiques : en particulier, nous ne recourons pas à la notion de martingale.

Nous avons séparé les modèles que nous présentons en deux grandes classes faisant chacune l'objet d'une partie : les modèles discrets et les modèles continus.

La première partie débute par un chapitre général sur les chaînes de Markov à temps discret et leur comportement asymptotique en temps long. Dans le chapitre 2, nous présentons l'algorithme du recuit simulé pour résoudre le problème du voyageur de commerce : trouver le trajet le plus court joignant un certain nombre de villes. L'avantage de cet algorithme stochastique est qu'il peut s'adapter facilement à des problèmes complexes d'optimisation plus généraux. Le chapitre 3 traite de l'optimisation d'un stock de pièces de rechange par un gestionnaire qui s'approvisionne auprès d'un fournisseur et doit répondre aux demandes de ses clients. La résolution du problème de minimisation des coûts repose sur la théorie du contrôle des chaînes de Markov qui est présentée à cette occasion. Le chapitre 4 aborde la modélisation des évolutions de population et le calcul des probabilités d'extinction à l'aide des processus de Galton-Watson. Ce chapitre, où la fonction génératrice constitue l'outil privilégié, peut être lu de manière isolée. Dans le chapitre 5, nous nous intéressons à la détection du sens de lecture d'un ADN circulaire quand on connaît seulement la succession des nucléotides. Pour retrouver l'information cachée du sens de lecture, nous considérons un modèle de chaîne de Markov cachée, et nous présentons puis utilisons l'algorithme Espérance-Maximisation (EM). Le chapitre 6 est consacré à la détection des séquences exceptionnellement rares ou fréquentes dans l'ADN et qui, de ce fait, sont susceptibles d'avoir une signification biologique. Dans ce but, nous comparons, pour des séquences de quelques nucléotides, le nombre d'occurences constaté avec le nombre d'occurences théorique prédit quand on modélise la succession des nucléotides par une chaîne de Markov. Enfin, le chapitre 7 traite de l'estimation du taux de mutation de l'ADN à partir des différences entre les séquences d'ADN observées chez les individus, dans le cadre du modèle d'évolution de population de Wright-Fisher et du processus de coalescence associé.

Le chapitre 8, qui débute la deuxième partie, présente une construction des chaînes de Markov à temps continu puis étudie leur comportement en temps long. Dans le chapitre 9, nous nous intéressons aux modèles de files d'attente et plus particulièrement au dimensionnement du nombre de serveurs. Lorsque les durées entre les temps d'arrivée des clients et les temps de service suivent des lois exponentielles, l'évolution au cours du temps du nombre de clients dans la file d'attente constitue une chaîne de Markov à temps continu. Chacun des chapitres 10 et 11 peut être lu de façon isolée. Le premier est consacré à une introduction à la fiabilité, c'est-à-dire à la modélisation des durées de bon fonctionnement des matériels. Nous y présentons les processus de renouvellement avec lesquels nous étudions des stratégies de maintenance préventive. Dans le chapitre 11, nous développons la théorie des lois de valeurs extrêmes qui permet d'estimer des probabilités d'événements rares. Cette théorie a de nombreuses applications dans l'étude des risques, comme le dimensionnement des digues contre les crues exceptionnelles. Enfin, le chapitre 12 traite des équations de coagulation et de fragmentation discrètes qui interviennent en astronomie, en physique et en chimie. Nous explicitons, dans des cas particuliers, l'expression analytique de la solution de ces équations. Nous proposons ensuite deux algorithmes qui permettent en toute généralité d'approcher cette solution et qui consistent à simuler des chaînes de Markov à temps continu.

Dans la troisième partie, l'appendice A reprend sans démonstration les définitions et les résultats de base correspondant à un cours d'initiation aux probabilités. Les autres appendices fournissent la démonstration de résultats qui dépassent a priori le cadre d'un tel cours et sont utilisés dans plusieurs chapitres du livre.

Remerciements

Nous tenons à remercier Vidal Cohen qui dans le courant de l'année 1999 nous a invité à proposer un cours sur les modèles aléatoires à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. L'intérêt des étudiants qui ont suivi ce cours depuis sa création nous a motivé pour rédiger un polycopié. Nous remercions Gilles Pagès qui nous a suggéré de transformer ce polycopié en livre, et notre éditeur, Bernard Ycart, ainsi que les deux rapporteurs anonymes dont les critiques constructives nous ont beaucoup aidé à améliorer la première version du livre. Nous tenons à remercier Aurélien Alfonsi, Jean-Stéphane Dhersin et Julien Guyon pour leur relecture approfondie de la version finale des différents chapitres. Nous devons beaucoup à Jean-Philippe Chancelier pour son aide précieuse concernant l'utilisation des logiciels Latex et surtout Scilab (`http://www.scilab.org/`) avec lequel nous avons réalisé les simulations et les illustrations du livre. Nous remercions également Bernard Lapeyre, Jacques Daniel, Sylvie Berte, Khadija Elouali ainsi que tous nos collègues du CERMICS pour l'ambiance de travail sympathique et stimulante qui règne au sein de ce laboratoire.

Enfin, nous voulons particulièrement remercier nos familles pour leur soutien durant la rédaction de ce livre ainsi que pour le bonheur qu'elles nous apportent jour après jour.

Champs sur Marne,
Octobre 2005

Jean-François Delmas
Benjamin Jourdain

Table des matières

partie I Modèles discrets

partie III Appendice