INSA Toulouse. STPI 2$^{\text{ème}}$ année IC Novembre 2009

Examen de Mathématique

Durée : 1h15. Les calculatrices, les téléphones portables et les documents ne sont pas autorisés.

EXERCICE 1

Soit ϕ la forme bilinéaire de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ définie par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2,\ \phi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1).$$

On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. (a) Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique.
   (b) Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère la famille $\mathcal{B} = (1 - X^2, X, X^2)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer la matrice de ϕ dans cette base.
   (c) En déduire l'expression, dans cette base, de ϕ et de la forme quadratique q associée.
   (d) ϕ est-il un produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(0) = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer une base de F.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F relativement à ϕ défini par
   $$F^{\perp} = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; \forall Q \in F, \phi(P,Q) = 0\}.$$

EXERCICE 2

Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2, \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer f la forme polaire associée à la forme quadratique q.
2. Démontrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
3. On munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire.
   Soient $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -2, 3)$ et $u_3 = (1, 3, 4)$ trois vecteurs de R^3.
   (a) Démontrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Appliquer la méthode Gram-Schmidt aux vecteurs (u_1, u_2, u_3) afin d'obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour le produit scalaire f.

EXERCICE 3

On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire euclidien usuel. Soit $F \subset \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel

$$F \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

1. Déterminer la dimension de F et de $F^\perp$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $u \in F$ et $v \in F^\perp$ tels que $x = u + v$.

Soit ϕ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}_2[X]^2$ tq

$\forall (P,Q)\in \mathbb{R}_2[X]^2$, $\phi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$.

1° a) mq ϕ est une forme bilinéaire symétique.

* Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P,Q,R)\in \mathbb{R}_2[X]^3$

$$\phi(\lambda P+R,Q) = [\lambda P(1)+R(1)]Q(-1) + [\lambda P(-1)+R(-1)]Q(1).$$
$$= \lambda[P(1)Q(-1)+P(-1)Q(1)] + R(1)Q(-1) + R(-1)Q(1).$$
$$= \lambda\phi(P,Q) + \phi(R,Q).$$

D'où ϕ est linéaire par rapport à sa 1ère variable.

* $\phi(Q,P) = Q(1)P(-1) + Q(-1)P(1) = \phi(P,Q)$.

D'où ϕ est symétrique. Ainsi ϕ est linéaire par rapport à sa 2e variable.

Donc ϕ est une forme bilinéaire symétique

b) Déterminer sa matrice par rapport à $(1,X,X^2)$.

$\phi(1,1) = +2$ $\phi(1,X) = -1+1 = 0$ $\phi(1,X^2) = 2$ $\phi(X,X^2) = 1-1 = 0$.

$\phi(X,X) = -2$ $\phi(X^2,X^2) = 2$.

Donc $\mathrm{mat}(\phi,\{1,X,X^2\}) = \begin{pmatrix} +2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2° Soit $\mathcal{B} = (1-X^2, X, X^2)$.

a) mq $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}_2[X]$.

card $\mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{cases} 1 = 1-X^2+X^2 \\ X = X \\ X^2 = X^2. \end{cases} \Rightarrow \underset{\mathbb{R}_2[X]}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Vect}(1,X,X^2)}} = \mathrm{Vect}(1-X^2,X,X^2).$$

D'où $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ de bon cardinal.

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$.

$\phi(1-X^2, 1-X^2) = 0$ car 1 et -1 sont racines de $1-X^2$.

$\phi(1-X^2, X) = 0$ $\phi(1-X^2, X^2) = 0$.

Par conséquent $\mathrm{mat}(\phi,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$

c) Expression de ϕ et de sa forme quadratique dans $\mathcal{B}$.

Soient $(P,Q)\in\mathbb{R}_2[X]^2$. $P(X) = a_1(1-X^2) + a_2X + a_3X^2$. $Q(X) = b_1(1-X^2) + b_2X + b_3X^2$

$\Rightarrow \phi(P,Q) = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}0\\-2b_2\\2b_3\end{pmatrix}$

$\phi(P,Q) = -2a_2b_2 + 2a_3b_3.$

De plus $q(P) = \phi(P,P) = -2a_2^2 + 2a_3^2.$

d) ϕ est-il un produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $P(X) = 1 - X^2 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Or $q(1-X^2) = 0 \Rightarrow q$ n'est pas définie.

Donc ϕ n'est pas un produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$.

3° Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ P(0) = 0\}$.

a) mq F est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$. Base de F ?

Soit $P(X) = a + bX + cX^2$.

$P \in F \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P(X) = a + bX + cX^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ P(X) = a + bX + cX^2 \end{cases} \Leftrightarrow P(X) = bX + cX^2.$

D'où $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$. Donc F est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$.

(X, X^2) libre car non colinéaires. Or elle est génératrice de F.

Donc (X, X^2) est une base de F.

b) Déterminer $F^\perp = \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ \forall Q \in F,\ \phi(P,Q) = 0\}$.

Soit $P \in F^\perp$. Ainsi $\phi(P,X) = 0$ et $\phi(P,X^2) = 0$.

$P(X) = a_1(1-X^2) + a_2X + a_3X^2.$

Par linéarité de ϕ, $\phi(P,X) = a_1\phi(1-X^2,X) + a_2\phi(X,X) + a_3\phi(X^2,X) = -2a_2 = 0$

$\phi(P,X^2) = a_1\phi(1-X^2,X^2) + a_2\phi(X,X^2) + a_3\phi(X^2,X^2) = 2a_3 = 0$

Donc $P(X) = a_1(1-X^2),\ a_1 \in \mathbb{R}$.

Au final $F^\perp = \mathrm{Vect}(1-X^2)$.

Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tq

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

1° Déterminer f la forme polaire associée à q.

Par la méthode de dédoublement des variables : $f(x,x) = q(x)$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

$f(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$

2° Démontrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Il suffit de mq q est définie et positive.

$q(x) = (x_1+x_2)^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ q est positive.

$q(x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\Rightarrow$ q est définie.

Donc f est un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3° On munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire. Soient $u_1 = (-1,1,1)$, $u_2 = (2,-2,3)$ et $u_3 = (1,3,4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) mq (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

card$(u_1,u_2,u_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

$$\det(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \underset{C_2+2C_1 \quad C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\times(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

$\Rightarrow$ (u_1, u_2, u_3) est libre.

Au final (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Appliquer Gram-Schmidt à (u_1,u_2,u_3) pour obtenir une BON de $\mathbb{R}^3$ pour f

• $v_1 = \dfrac{u_1}{\sqrt{q(u_1)}}$ $\qquad q(u_1) = 2\times(-1)^2 \cancel{+2\times(-1)\times 1} \cancel{+2\times(-1)\times 1} + 2\times(1)^2 + 2\times 1\times 1 + 2\times 1^2 = 4$.

$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}(-1,1,1)$.

• $v_2' = u_2 - f(u_2, v_1)v_1 = (2,-2,3) - \frac{1}{4} f(u_2,u_1)u_1$.

Pour faciliter les calculs, utilisons $A = \text{mat}(f, (e_1,e_2,e_3))$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi $f(u_2,u_1) = u_2^T A u_1 = (2\ {-2}\ 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(u_2,u_1) = (2\ {-2}\ 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 6 = 2$.

D'où $v_2' = (2,-2,3) - \frac{1}{4} \times 2 \times (-1,1,1) = \left(2+\frac{1}{2}, -2-\frac{1}{2}, 3-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Or $q(v_2') = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 = 5^2$.

Ainsi $v_2 = \dfrac{v_2'}{\sqrt{q(v_2')}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{(1,-1,1)}_{w_2}$.

• $v_3' = u_3 - f(u_3,v_1)v_1 - f(u_3,v_2)v_2 = u_3 - \frac{1}{4} f(u_3,u_1)u_1 - \frac{1}{4} f(u_3,w_2)w_2$.

$$f(u_3,u_1) = (1\ 3\ 4)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = (1\ 3\ 4)\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = 6+8 = 14.$$

$$f(u_3,w_2) = (1\ 3\ 4)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = (1\ 3\ 4)\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 2+8 = 10.$$

$\Rightarrow v_3' = (1,3,4) - \frac{1}{4}\times 14\times(-1,1,1) - \frac{1}{4}\times 10 \times (1,-1,1)$

$= \left(1+\frac{7}{2}-\frac{5}{2}, 3-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}, 4-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right) = (2,2,-2)$

$q(v_3') = (2+2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 = 16$.

Ainsi $v_3 = \dfrac{v_3'}{\sqrt{q(v_3')}} = \frac{1}{4}(2,2,-2) = \frac{1}{2}(1,1,-1)$.

Donc (v_1,v_2,v_3) est une BON de $\mathbb{R}^3$ pour le ps f.

$\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire euclidien usuel.

Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$.

1° Déterminer $\dim F$ et $\dim F^\perp$.

Soit $v_1 = (1, 2, 1, -2)$ et $v_2 = (1, -1, -1, -1)$.

$F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ \langle x, v_1 \rangle = 0,\ \langle x, v_2 \rangle = 0\}$.

D'où $F^\perp = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

v_1, v_2 non colinéaires $\Rightarrow \dim F^\perp = 2$ car (v_1, v_2) base de $F^\perp$.

Or $\mathbb{R}^4 = F \oplus F^\perp \Rightarrow \dim F = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F^\perp = 2$.

1° Déterminer une BON de $F^\perp$.

$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$. $\quad \|v_1\| = \sqrt{1+4+1+4} = \sqrt{10} \quad \|v_2\| = \sqrt{4} = 2$.

On pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, -2) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, -1)$.

Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une BON de $F^\perp$.

° Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $u \in F$ et $v \in F^\perp$ tq $x = u + v$.

$v = \langle x, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle x, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \frac{1}{10}(x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4) \times (1, 2, 1, -2) + \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 - x_4)(1, -1,$

$= \frac{1}{20}(7x_1 + x_2 - 3x_3 - 9x_4,\ -x_1 + 13x_2 + 9x_3 - 3x_4,\ -3x_1 + 9x_2 + 7x_3 + x_4,\ -9x_1 - 3x_2 + x_3 + 13x$

$u = x - v = \frac{1}{20}(13x_1 + x_2 + 3x_2 + 9x_4,\ x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 3x_4,\ 3x_1 - 9x_2 + 13x_3\ x_4,\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4)$

<u>Autre méthode:</u>

$x \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_4 = 3x_2 + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2 + 3x_3 \\ x_4 = 3x_2 + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow x = (4x_2 + 3x_3, x_2, x_3, 3x_2 + 2x_3)$

$\Leftrightarrow x = x_2 \underbrace{(4, 1, 0, 3)}_{w_1} + x_3 \underbrace{(3, 0, 1, 2)}_{w_2}$

$F = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$.

(w_1, w_2) libre car non colinéaires

$\Rightarrow (w_1, w_2)$ base de $F \Rightarrow \dim F = 2$.

Donc $\dim F^\perp = 2$ car $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$.

$x \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -4x_1 - 3x_4 \\ x_3 = -3x_1 - 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow x = (x_1, -4x_1 - 3x_4, -3x_1 - 2x_4, x_4$

$\Leftrightarrow x = x_1 \underbrace{(1, -4, -3, 0)}_{u_1} + x_4 \underbrace{(0, -3, -2, 1)}_{u_2}$.

$F^\perp = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$

(u_1, u_2) libre car non colinéaires

$\Rightarrow (u_1, u_2)$ base de $F^\perp$.

Gram-Schmidt sur (u_1, u_2).

Correction Exercice 9

Feuille TD 1

$\Rightarrow \sin\theta < 0 \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{11\pi}{6}}$.

u est donc la rotation autour de l'axe $\Delta = \text{Vect}(1,-1,1)$ et d'angle $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

$\boxed{\text{Exercice 9}}$ $q(x,y,z) = 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy + 4yz$.

1) La matrice de q dans $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

On va trouver une base orthonormée directe formée de vecteurs propres de A.

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

- $E_3 = \text{Ker}(A - 3I_3)$: $v = (x,y,z)$; $(A - 3I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x + 2z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow E_3 = \{(2z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\underbrace{(2,-2,1)}_{\boxed{v_1}}.$$

$\|v_1\| = \sqrt{9} = 3$

Soit $b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.

- $E_6 = \text{Ker}(A - 6I_3)$; $v = (x,y,z)$, $(A - 6I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow E_6 = \{(2y,y,-2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\underbrace{(2,1,-2)}_{\boxed{v_2}}$$

$\|v_2\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{3}(2,1,-2)$.

- $E_9 = \text{Ker}(A - 9I_3)$: $v = (x,y,z)$, $(A - 9I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ y = z = 2x \Rightarrow E_9 = \{(x,2x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\underbrace{(1,2,2)}_{\boxed{v_3}}$$

$\|v_3\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$.

$\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3)$ est une <u>base orthonormé</u>. (on vérifie bien que $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, pour $i \neq j$)

Rmq. : On peut démontrer en général que, si A matrice symétrique, alors
- A diagonalisable
- les espaces propres sont orthogonaux 2 à 2
- il existe une base orthonormée formée de vect. propres

- Vérifier si B est une base directe :

$$P = P_{\mathcal{E}B} = \frac{1}{3}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} v_1' & v_2' & v_3' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

(la matrice de passage entre $\mathcal{E}$ et B)

$$\det(P_{\mathcal{E}B}) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{[C_2 \leftarrow C_2 - C_1\,;\, C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3]}{=} \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\cdot\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$= 1 \Rightarrow$ B est une <u>base directe</u>.

- La matrice semblable à A dans la base B est :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$ On a $D = P^{-1}AP$.

P est la matrice de passage entre deux bases <u>orthonormés</u>

$\Rightarrow$ P est <u>orthogonale</u>.

(car les colonnes de P sont 2 à 2 orthogonaux et de norme 1 (base orthonormée))

On a donc $P^{-1} = P^T \Rightarrow D = P^T A P$.

On reconnait la formule de chang. de base pour les formes quadratiques

$\Rightarrow$ D est la matrice de q dans la base B

$\Rightarrow$ si $v = X b_1 + Y b_2 + Z b_3$, alors $q(v) = 3X^2 + 6Y^2 + 9Z^2$.

2) P est orthogonale et $\det(P) = 1 \Rightarrow$ la transf. géométrique associée à P est une <u>rotation</u>.