P01C2 - Mathématiques I Corrigé CC 1. 10/11

Exercice 1

1. Par dédoublement de variable, on a (2pts)

$$q(x,y,z,t) = [x\ y\ z\ t]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

ce qui montre que q est une forme quadratique et donne la matrice A associée et la forme polaire f.

2. On procède par identification (0,5pt) $ax^2 + 3(y+bx)^2 + 4z^2 + (t+cx)^2 =$

$(a+3b^2+c^2)x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6bxy + 2cxt = q(x,y,z,t)$

D'où $6b = 2 \Rightarrow b = 1/3$, $2c = 1 \Rightarrow c = 1/2$, $a + 3b^2 + c^2 = 1$

d'où $a = 1 - 1/3 - 1/4 = 5/12$. (1pt)

3. $q(x,y,z,t) \geq 0$ et $q(x,y,z,t) = 0$ entraine $\{x=0, y+bx=0, z=0, t+cx=0\}$ (1,5pt)

d'où $x=0, y=0, z=0$ et $t=0$; f définit bien un p^t scalaire (0,5pt)

4. (a) A étant symétrique à coefficients réels a toutes ses v.p. réelles (0,5pt)

(b) A étant définie ne peut avoir de v.p. nulle (0,5pt)

(c) A étant positive ne peut avoir de v.p. négative (0,5pt)

Exercice 2

1. $u^T v = 18 - 12 + 3\lambda = 0$, d'où $\lambda = -2$. (1pt)

2. $[x\ y\ z]^T \in E^\perp$ ssi $\{6x - 2y + 3z = 0,\ 3x + 6y - 2z = 0\}$

$2 \times Eq(2) - Eq(1) \rightarrow 14y - 7z = 0$ d'où $y = z/2$ (2pts)

$6x - z + 3z = 0$ d'où $x = -z/3$

$E^\perp = \left\{\frac{t}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$ (1pt)

3. A doit être une matrice orthogonale : on a donc $\alpha = \pm 7$ (1pt)

et $w = \frac{\varepsilon}{7}[-2\ 3\ 6]$ (0,5pt) avec $\varepsilon = \pm 1$ (1pt)

A est une rotation et donc $\det A = \varepsilon\, sgn(\alpha) = 1$. (1,5pt)

4. Axe de la rotation : 1 doit être v.p. de A (1pt). Si on choisit $\alpha = +7$ on a $\varepsilon = +1$ et

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 3 & -2 \\ +2 & -2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrr} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrr} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

z variable libre : $y = z$ et $-x + 3z - 2z = 0$, $x = z$

A est la matrice d'une rotation autour de l'axe ayant pour vecteur directeur $[1\ 1\ 1]^T$ (1pt)

Angle de la rotation vérifie $2\cos\theta + 1 = \frac{18}{7}$

$\theta = \pm \arccos(11/14)$. (1pt)

$v \perp [1\ 1\ 1]^T$ (par exemple $v = [1\ -1\ 0]^T$)

$Av = \frac{1}{7}[3\ -8\ 5]^T$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3/7 & 1 \\ 1 & -8/7 & 1 \\ 0 & 5/7 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = -15/7$$

$\theta = -\arccos(11/7)$ (1pt)

Si on avait choisi $\alpha = -7$, on aurait eu $\varepsilon = -1$ et vect. directeur $[-1\ 1\ 5]^T$ et $\theta = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.